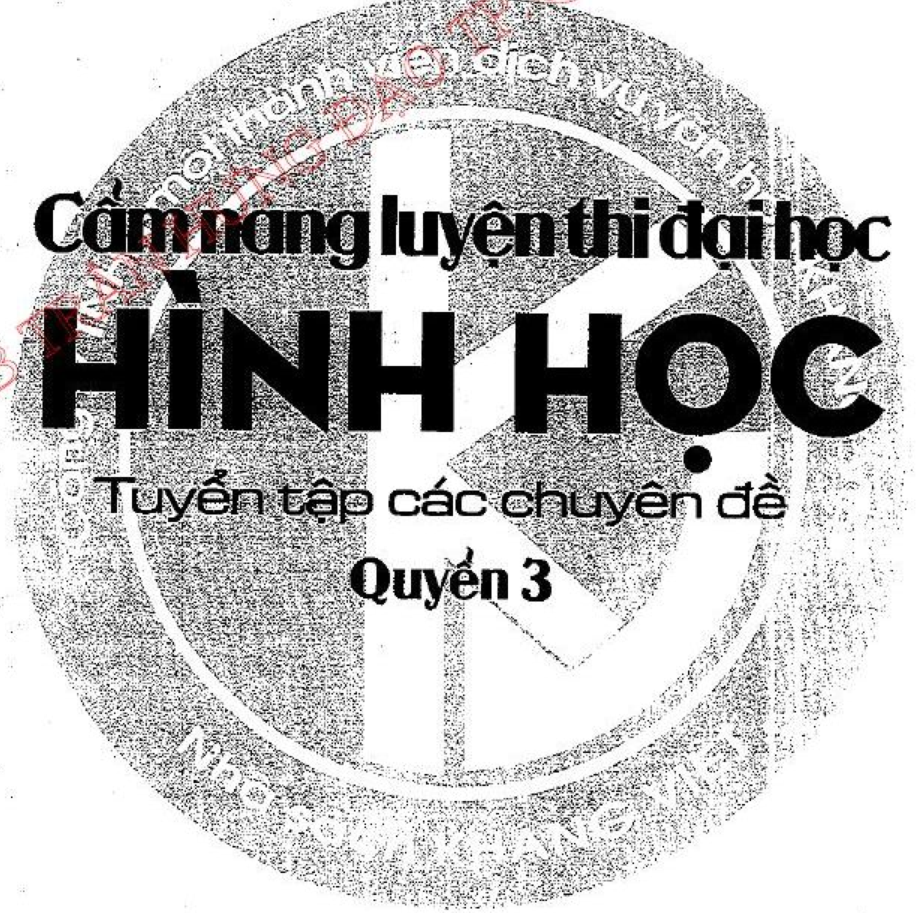
NGUYỄN THÀNH LONG



Cẩm nang luyện thi đại học
HÌNH HỌC
Tuyển tập các chuyên đề
Quyển 3

VV 18.869

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Tham dự những đợt thi thử Đại học – Cao đẳng là một việc hết sức quan trọng và cần thiết, điều đó giúp cho các thí sinh có điều kiện tập dượt, kiểm tra trình độ của mình cũng như làm quen với các dạng bài tập mới ít gặp ở chương trình phổ thông, qua đó giúp các em củng cố kiến thức, kĩ năng kĩ xảo khi làm bài. Thi thử cũng giúp cho học sinh làm quen với áp lực trong phòng thi, tâm lý bình tĩnh, tự tin khi làm bài, phân bố thời gian hợp lý hơn.

Nhằm giúp các em học sinh củng cố kiến thức và các giáo viên, phụ huynh có thêm tài liệu giảng dạy, tham khảo, chúng tôi biên soạn bộ sách ***"Cẩm nang luyện thi đại học"***.

Bộ sách chia làm 4 tập, tập 1 là ***"Giải tích"*** gồm 5 chuyên đề tương ứng với 4 điểm trong đề thi đại học, tập 2 là ***"Đại số"*** gồm 3 chuyên đề tương ứng 3 điểm, tập 3 là tập ***"Hình học"*** gồm 2 chuyên đề còn lại tương ứng với 3 điểm còn lại và tập 4 là ***"Bộ đề thi thử của ba miền"***. Để làm tốt bộ đề thi thử trước tiên phải rèn luyện phương pháp, kĩ năng làm bài thông qua 10 chuyên đề được chia làm 3 tập

Tập 3: Gồm 2 chuyên đề có phương pháp giải, có bình luận, nhận xét và hướng dẫn các kĩ năng làm bài

Chuyên đề 9: *Chuyên đề hình học không gian, chuyên đề này xoay quanh những vấn đề trọng tâm như các phương pháp tính thể tích, khoảng cách, góc, các bài toán liên quan tới mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp đặc biệt là phương pháp ứng dụng tọa độ trong không gian để giải các bài toán không gian*

Chuyên đề 10: *Chuyên đề hình học giải tích trong mặt phẳng và hình học giải tích trong không gian, chuyên đề này xoay quanh những vấn đề trọng tâm như viết phương trình đường thẳng, đường tròn, ba đường conic và đặc biệt là các bài toán về vị trí tương đối của chúng, còn trong không gian thì xoay quanh những vấn đề trọng tâm như viết phương trình đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu và đặc biệt là các bài toán về vị trí tương đối của chúng*

Hi vọng 4 tập tài liệu này sẽ giúp ích cho các bạn học sinh củng cố kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo làm bài khi kì thi đại học sắp tới gần, cũng như các bạn giáo viên có thêm tài liệu giảng dạy và ra đề. Ngoài ra các bạn học sinh lớp 10, 11 có thể tham khảo học tập dần.

Tuy đã cố gắng biên soạn hết mình nhưng trong một thời gian ngắn, cộng thêm tuổi đời còn trẻ, kinh nghiệm và kiến thức còn hạn chế nên không thể tránh khỏi những sai sót trong quá trình biên soạn. Chúng tôi rất mong các bạn thí sinh cũng như các bậc phụ huynh, các bạn đồng nghiệp, các quý vị độc giả góp ý kiến, nhận xét, phê bình để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn

Tác giả

CHUYÊN ĐỀ 9: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

§ 1: QUAN HỆ VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

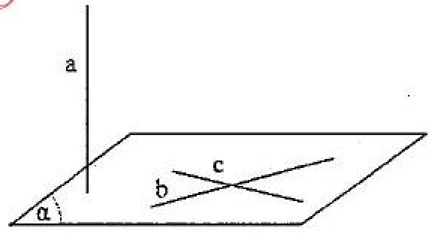
1. Định nghĩa :

Một đường thẳng gọi là *vuông góc* với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

$a \perp (\alpha) \Leftrightarrow a \perp b\ ;\ \forall b \subset (\alpha)$

2. Định lí 1: (Tiêu chuẩn vuông góc)

Nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau b và c cùng nằm trong $mp(\alpha)$ thì đường thẳng a vuông góc với $mp(\alpha)$.

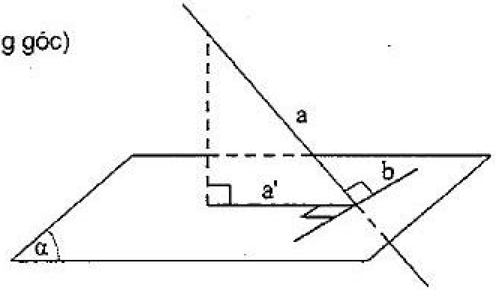


$$\left.\begin{array}{l} a \perp b; a \perp c \\ b \cap c = \{I\} \\ b \subset (\alpha); c \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$

3. Định lí 2: (Định lí ba đường vuông góc)

a. Phần thuận:

$$\left.\begin{array}{l} a' = hc_{(\alpha)}a \\ b \subset (\alpha) \\ b \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a'$$



b. Phần đảo :

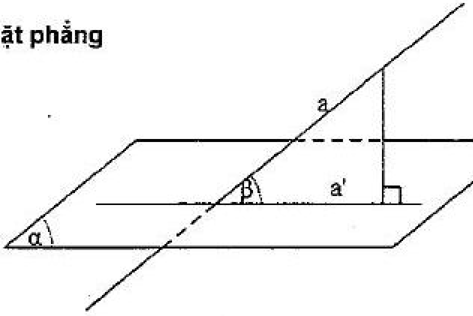
$$\left.\begin{array}{l} a' = hc_{(\alpha)}a \\ b \subset (\alpha) \\ b \perp a' \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$$

4. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa:

Nếu đường thẳng a không vuông góc với $mp(\alpha)$ thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên $mp(\alpha)$ gọi là góc giữa a và $mp(\alpha)$.

$\widehat{\left(a,(\alpha)\right)} = \left(\widehat{a,a'}\right)$

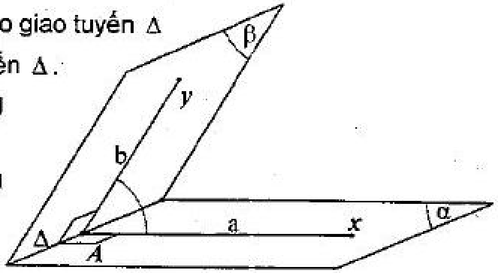


II. MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng :

- Cho mp(α) và mp(β) cắt nhau theo giao tuyến Δ
- Gọi A là điểm tùy ý thuộc giao tuyến Δ.
- Tia Ax nằm trong mp(α) và vuông góc với giao tuyến Δ tại A.
- Tia Ay nằm trong mp(β) và vuông góc với giao tuyến Δ tại A.

Khi đó $\widehat{((\alpha);(\beta))} = \widehat{xAy}$



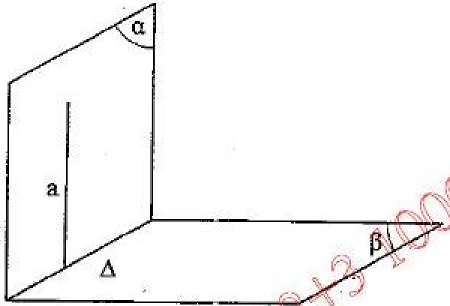
2. Định lí (Tiêu chuẩn vuông góc)

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

3. Định lí 2:

Nếu hai mp(α) và mp(β) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mp(α), vuông góc với giao tuyến của mp(α) và mp(β) đều vuông góc với mp(β).

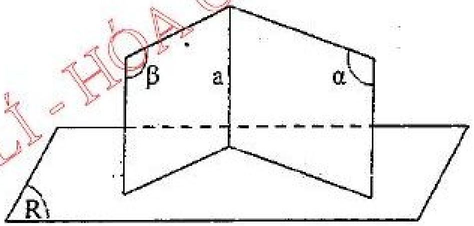
$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\perp(\beta)\ ;\ (\alpha)\cap(\beta)=\Delta\\ a\subset(\alpha): a\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(\beta)$$



4. Định lí 3 :

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=a\\ (\alpha)\perp(R);(\beta)\perp(R)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(\lambda)$$



5. Định lí 4:

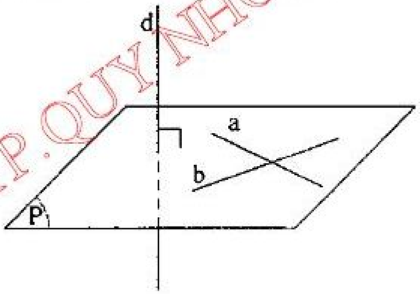
Gọi S là diện tích là diện tích của đa giác H trong mp(P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mp(P') thì $S' = S\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

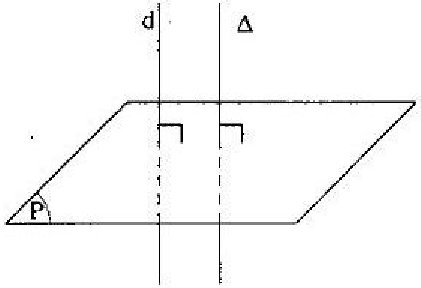
Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

- **Phương pháp 1:**
  Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng a và b cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P)

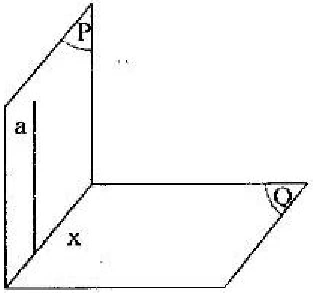
$$\left.\begin{array}{l}d\perp a\\ d\perp b\\ a,b\subset(P)\\ a\cap b=I\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp(P)$$



- **Phương pháp 2:**
  Sử dụng tính chất: d // Δ, mà Δ ⊥ (P) thì d ⊥ (P)

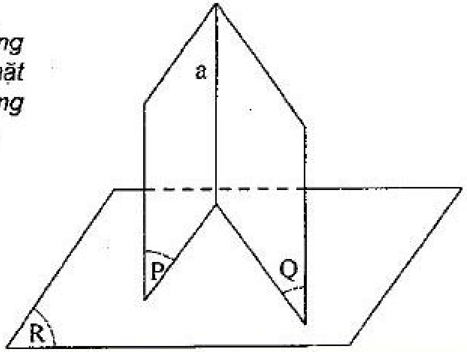


- **Phương pháp 3:**
  Sử dụng định lý: *Nếu hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến x, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (P) mà vuông góc với giao tuyến x thì vuông góc với mặt phẳng (Q).*

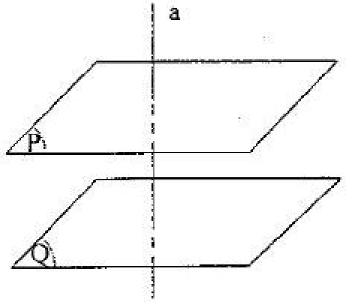


- **Phương pháp 4:**
  Sử dụng tính chất: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.*

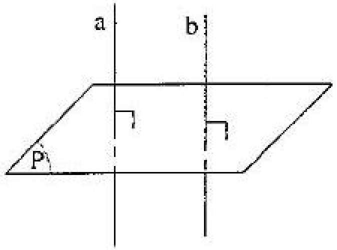
$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\\ (P)\cap(Q)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(R)$$



- **Phương pháp 5:**
  Sử dụng tính chất: *Nếu hai mặt phẳng song song với nhau, đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng này thì nó vuông góc với mặt phẳng kia.*
  $\left.\begin{matrix}(P)//(Q)\\ a\perp(P)\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp(Q)$



- **Phương pháp 6:**
  Sử dụng tính chất: *Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, mà đường thẳng a vuông góc mặt phẳng (P) thì đường thẳng b cũng vuông góc với mặt phẳng (P).*
  $\left.\begin{matrix}a//b\\ a\perp(P)\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp(P)$



THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP

Giải:

Chứng minh AM vuông góc với BP

Gọi H là trung điểm của AD. Do ΔSAD đều nên SH ⊥ AD.

Do (SAD) ⊥ (ABCD) nên SH⊥ (ABCD) ⇒ SH ⊥ BP (1)

Xét hình vuông ABCD ta có ΔCDH = ΔBCP

CH ⊥ BP (2)

Từ (1) và (2) ⇒ BP⊥ (SHC).

Tính thể tích của khối tứ diện CMNP

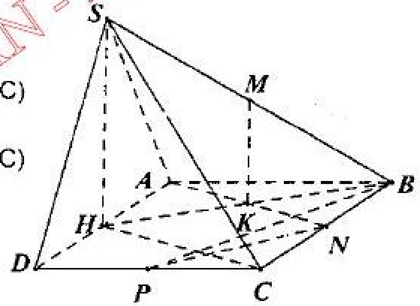
Vì MN // SC và AN // CH ⇒ (AMN) // (SHC)

Do đó: BP ⊥ (AMN) ⇒ BP ⊥ AM.

Vì MN // SC và AN // CH ⇒ (AMN) // (SHC)

Do đó: BP ⊥ (AMN) ⇒ BP ⊥ AM.

Kẻ MK ⊥ (ABCD)



Ta có: $V_{CMNP}=\frac{1}{3}MK.S_{CNP}$

$MK=\frac{1}{2}SH=\frac{a\sqrt{3}}{4};S_{CNP}=\frac{1}{2}CN.CP=\frac{a^2}{8};V_{CMNP}=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt)

Cách khác tính thể tích (dựa vào tỉ số thể tích)

Ta có $\frac{V_{CMNP}}{V_{CMDB}}=\frac{CN}{CB}.\frac{CP}{CD}=\frac{1}{4}$

$\frac{V_{CMDB}}{V_{CSDB}}=\frac{V_{M.BCD}}{V_{S.BCD}}=\frac{MB}{SB}=\frac{1}{2}$

Nhân theo từng vế ta được

$V_{CMNP}=\frac{1}{8}V_{S.BCD}=\frac{1}{8}.\frac{1}{3}.SH.S_{BCD}=\frac{1}{8}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt)

Thí dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD

Giải:

Gọi H là tâm ABCD ⇒ SH ⊥(ABCD).

Từ BH ⊥ AC và BH ⊥ SH

suy ra BH ⊥ (SAC)

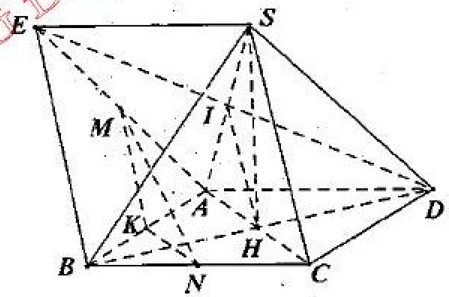
và gọi I, K là trung điểm SA và AB :

IH // BE và MK // BE nên IH // MK

MK // IH (1) và KN // AC (2)

Từ (1) và (2) ⇒ (MKN) // (SAC)

(MKN) ⊥ BD ⇒ MN ⊥ BD



Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0$, A = BC = a, AD = 2a. cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông

Giải:

Cách 1: Chứng minh tam giác SCD vuông

Kẻ CE vuông góc AD, thì tứ giác OBCE là hình vuông nên

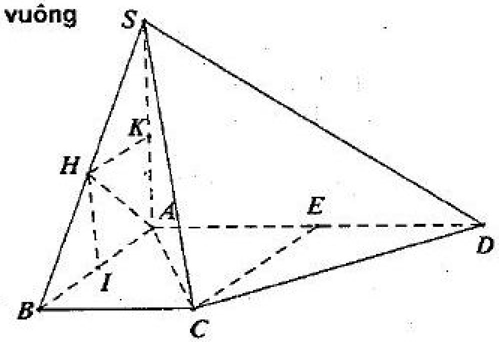
CE = AE = ED = a.

Sử dụng định lý Pitago ta có:

$CD^2=2a^2$, $SC^2=4a^2$, $SD^2=6a^2$

$SD^2=SC^2+SD^2$

⇒ Δ SCD vuông tại C.



Cách 2: Chứng minh tam giác SCD vuông

Gọi E là trung điểm của AD. Ta có EA = ED = a

Do EA = EB = a, EA // BC ⇒ Tứ giác EABC là hình vuông

(kết hợp với $AB=a,\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0$)

Từ đó ta có EC = a

Vì EA = ED = EC = a ⇒ ΔACD vuông tại C

$CA \perp CD$. Do đó $SC \perp CD$ (định lý 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C.

Thí dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP.

Giải:

Chứng minh rằng đường thẳng $MN \perp SP$

Theo giả thiết M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD

Ta có MN // AB (tính chất đường trung bình) (1)

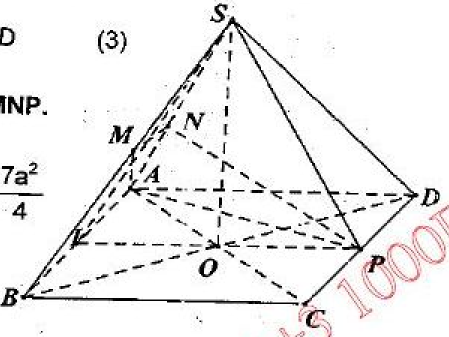
AB // CD (vì tứ giác ABCD là hình vuông) (2)

Mặt khác SC = CD (vì tam giác SCD cân tại S)

và PC = PD

(vì P là trung điểm của CD) $\Rightarrow SC \perp CD$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow MN \perp SP$



Tính theo a thể tích của khối tứ diện AMNP.

Gọi I là trung điểm của AB

Ta có ΔSIP cân tại S, $SI^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow SI = SP = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD,

Ta có $SO^2 = SI^2 - OI^2 = \frac{7a^2}{4} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{6a^2}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

H là hình chiếu vuông góc của P xuống mặt phẳng SAB

Ta có $S_{(SIP)} = \frac{1}{2}SO.IP = \frac{1}{2}PH.SI$

$\Rightarrow PH = \frac{SO.IP}{SI} = \frac{a\sqrt{6}}{2}a\frac{2}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

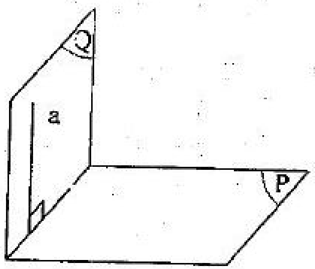
Vậy $V = \frac{1}{3}S_{(AMN)}.PH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}$ (đvtt)

Dạng 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

- **Phương pháp 1:**

Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.

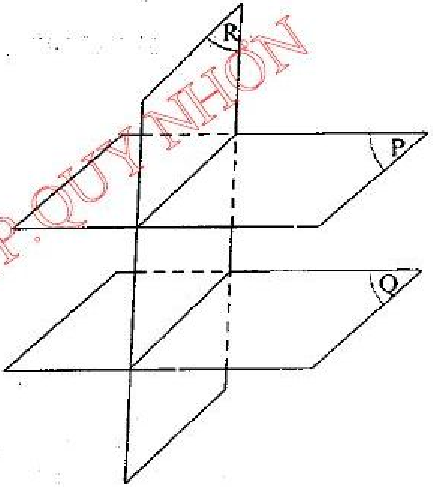
$\left.\begin{matrix} a \perp (P) \\ a \subset (Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$



- **Phương pháp 2:**

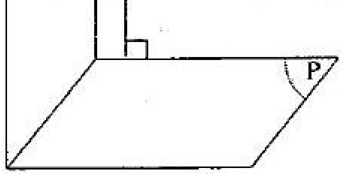
Sử dụng tính chất:

$\left.\begin{matrix} (P)//(Q) \\ (R) \perp (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (R) \perp (Q)$



- **Phương pháp 3:**

Sử dụng tính chất: (P) ⊥ d , (Q) // d hoặc chứa d thì (P) ⊥ (Q)

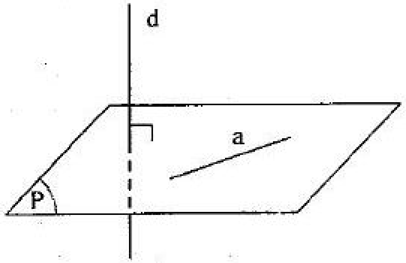


Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

- **Phương pháp 1:**

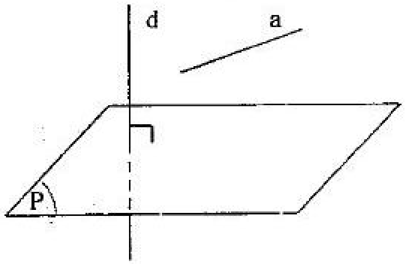
Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau ta chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

$\left.\begin{matrix} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp a$



- **Phương pháp 2:**

Sử dụng định lý: *Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (P), mà đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (P), thì d vuông góc với đường thẳng a.*



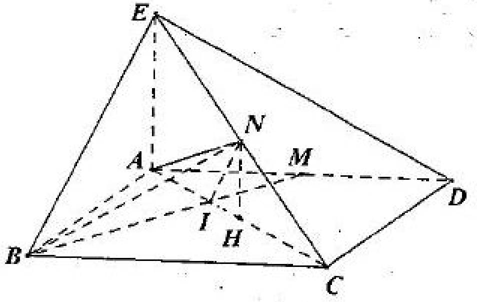
THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng: mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) và tính thể tích của khối tứ diện ANIB

Giải:

Chứng minh rằng: mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB)

Cách 1:



Dễ thấy I là trọng tâm ΔABD

$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

và $AI = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔABI có

$BI^2 + AI^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{3a^2}{9} = a^2 = AB^2$

$\Rightarrow BI \perp AI$ và $BI \perp SA \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$

Tính thể tích của khối tứ diện ANIB

Khối tứ diện SABC có thể chia làm 3 tứ diện: SABN ; CNBI ; ANIB

Gọi $V = V_{SABC}$; $V_1 = V_{SABN}$; $V_2 = V_{CNBI}$

Ta có : $\begin{cases} \frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} = \frac{SN.SA.SB}{SC.SA.SB} + \frac{CN.CI.CB}{SC.CA.CB} \\ \frac{V_1 + V_2}{V} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{6}V_{SABC} = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}BA.BC.SA = \frac{1}{36}a.a\sqrt{2}.a \Rightarrow V_{ANIB} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Cách 2:

Chứng minh rằng: mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB)

Xét ΔABM và ΔBCA vuông đồng dạng ?

$\widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow MB \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$

Tính thể tích của khối tứ diện ANIB

Gọi H là trung điểm của AC ⇒ NH là đường trung bình của ΔSAC

$\Rightarrow NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$ và NH//SA nên $NH \perp (ABI)$, do đó $V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.S_{ABI} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Thí dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Cho SA = a, AD = $a\sqrt{2}$, AB = a. Chứng minh rằng mặt phẳng (SBM) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và tính thể tích của tứ diện ABN.

Giải:

Chứng minh rằng mặt phẳng (SBM) vuông góc với mặt phẳng (SAC)

Xét ΔABM và ΔBCA vuông có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow$ ΔABC đồng dạng ΔBCA

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0$

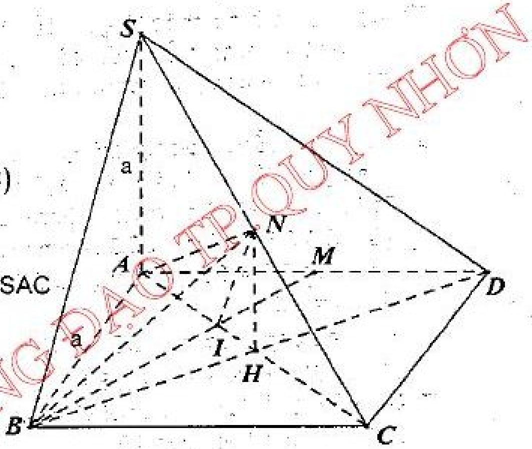
$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0$

$\Rightarrow MB \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$



Tính thể tích

Gọi H là trung điểm của AC

⇒ NH là đường trung bình của ΔSAC

$\Rightarrow \begin{cases} NH // SA \\ NH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$

nên NH là đường cao của khối tứ diện ANIB.

Do đó: $V_{ANIB} = \frac{1}{3}NH.S_{\Delta ABI}$

Ta có:

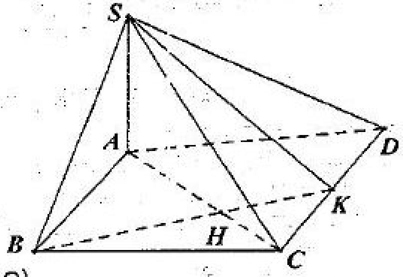
$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, BI^2 = AB^2 - AI^2 \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow V_{ANIB} = \frac{1}{3}.NH.S_{\Delta ABI} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ (đvtt)

Thí dụ 3: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AD = a\sqrt{2}$, CD = 2a. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2a}, (a > 0)$. Gọi K là trung điểm của cạnh DC. Chứng minh mặt phẳng (SBK) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và tính thể tích khối chóp SBCK theo a.

Giải:

Chứng minh mặt phẳng (SBK) vuông góc với mặt phẳng (SAC)



Gọi H là giao của AC và BK thì

$BH = \frac{2}{3}BK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

và $CH = \frac{1}{3}CA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow BH^2 + CH^2 = 2a^2 = BC^2 \Rightarrow BK \perp AC$.

Từ $BK \perp AC$ và

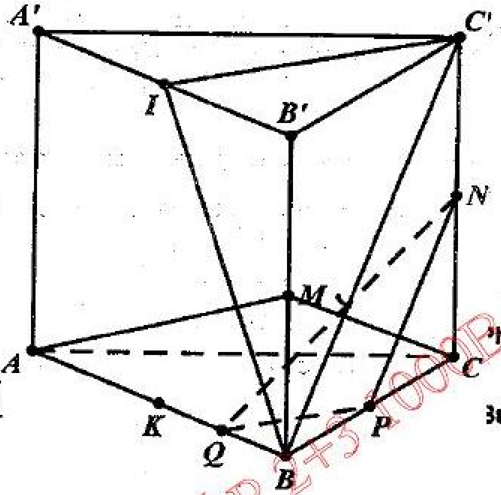
$BK \perp SA \Rightarrow BK \perp (SAC) \Rightarrow (SBK) \perp (SAC)$

Tính thể tích khối chóp SBCK theo a.

$V_{S.BCK} = \frac{1}{3}.SA.S_{BCK} = \frac{1}{3}.3a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{6}}{2} = a^3$ (đvtt)

Thí dụ 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân đỉnh đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng (ABB'A') góc 60^0 và AB = AA' = a. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BB', CC', BC và Q là một điểm trên cạnh AB s cho $BQ = \frac{a}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và chứng minh rằ $(MAC) \perp (NPQ)$.

Giải:



Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'

Gọi I là trung điểm A'B' thì

$$\left.\begin{array}{l} C'I \perp A'B' \\ C'I \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow C'I \perp (ABA'B')$$

Suy ra góc giữa BC'

và mp(ABB'A') chính là góc $\widehat{C'BI}$.

Suy ra $\widehat{C'BI} = 60^0$

$$C'I = BI.\tan\widehat{C'BI} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{A'B'C'}$$

$$= AA'.\frac{1}{2}CI.A'B' = \frac{a^3.\sqrt{15}}{4}$$

Chứng minh rằng $(MAC) \perp (NPQ)$.

$$\left.\begin{array}{l} NP//BC' \\ PQ//C'I \end{array}\right\} \Rightarrow (NPQ)//(C'BI) \quad (1)$$

$\Delta ABM = \Delta BB'I$ (c – g – c) suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{BIB'}$

suy ra $\widehat{AMB} + \widehat{B'BI} = 90^0 \Rightarrow AM \perp BI$

Mặt khác theo chứng minh trên $C'I \perp AM$ nên $AM \perp (C'BI)$

Suy ra $(AMC) \perp (C'BI)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(MAC) \perp (NPQ)$

Thí dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng *a*. *M* là điểm thuộ cạnh *CD* với $CM = x$ $(0 < x < a)$, *N* là trung điểm cạnh $A'D'$. Tính theo *a* thi tích của khối tứ diện $B'MC'N$. Xác định *x* để hai đường thẳng $B'M$ và $C'N$ vuông góc với nhau.

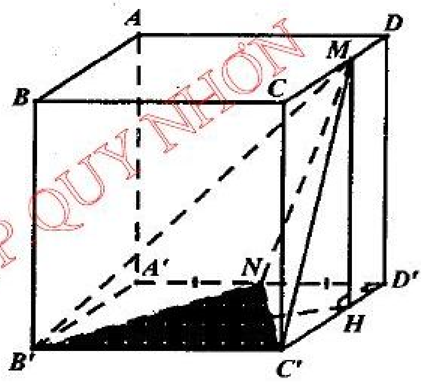
Giải:

Tính thể tích tứ diện *B'MC'N*:

$$V_{B'MC'N} = V_{M.B'C'N} = \frac{1}{3}S_{\Delta B'C'N}.d(M,(A'B'C'D'))$$

$$= \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}A'B'.B'C'\right).AA' = \frac{a^3}{6}$$

ìm x để *B'M* ⊥ *C'N*



Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *M* trên *(A'B'C')*

$\Rightarrow$ *B'H* là hình chiếu vuông góc của *B'M* trên *(A'B'C')*.

Vậy $B'M \perp C'N \Leftrightarrow B'H \perp C'N$

$\Leftrightarrow \widehat{C'B'H} = \widehat{D'C'N} \Leftrightarrow \Delta B'C'H = \Delta C'D'N$

$\Leftrightarrow C'H = D'N \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

§ 2: BÀI TOÁN TÌM KHOẢNG CÁCH

Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

hương pháp: Giả sử ta cần tính khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P). Ta có thể tiến hành như sau:

ước 1: Lấy một mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P).

Tức là mặt phẳng (Q) chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) hoặc mặt phẳng (P) chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q).

ước 2: Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q).

ước 3: Từ điểm M kẻ MH vuông góc với giao tuyến Δ, với $H \in \Delta$. Khi đó $MH \perp (P)$ và do đó đoạn MH là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng có thể dựa vào các kết quả của hình học phẳng và thường gắn liền với đường cao trong tam giác: Tam giác vuông; hệ thức lượng trong tam giác.

Trên đây là phương pháp chung để giải quyết bài toán này. Ngoài ra, nếu bài toán có yêu cầu đặc biệt nào đó ta có thể tính dựa vào các kết quả dưới đây:

ính chất 1: Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) tại điểm I khác A, B thì $\frac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))} = \frac{IA}{IB}$.

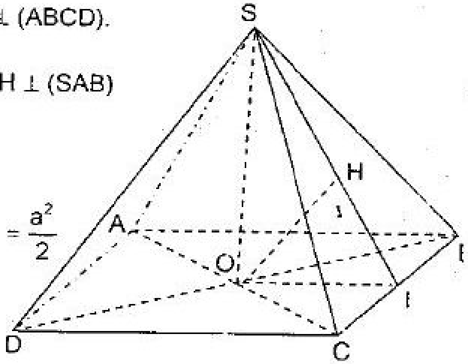
ính chất 2: Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), M là một điểm thuộc d thì $d(M,(\alpha)) = d(I,(\alpha))$, với mọi điểm I thuộc đường thẳng d.

ính chất 3: Nếu mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và M là một điểm thuộc mặt phẳng (β) thì $d(M,(\alpha)) = d(I,(\alpha))$, với mọi điểm I thuộc (β).

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho hình chóp đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạ bằng a, SA = a. Tính khoảng cách từ điểm O đến mp(SAB).

Giải:



S.ABCD là hình chóp đều nên SO ⊥ (ABCD).

Qua O kẻ OI vuông góc với AB

$\Rightarrow (SOI) \perp (SAB)$. Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$

$\Rightarrow d(O;(SAB)) = OH$

Ta có: $AC = BD = a\sqrt{2}$, $OI = \frac{a}{2}$

Xét ΔSAO ta có: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = \frac{a^2}{2}$

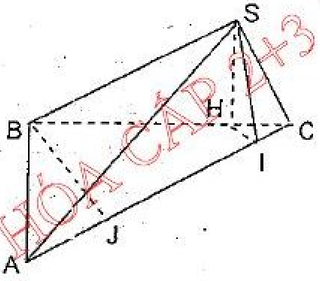
Xét ΔSOI: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{6}{a^2}$

$\Rightarrow OH = a\sqrt{6}$

Vậy: $d(O;(SAB)) = a\sqrt{6}$

Thí dụ 2: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). B $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách điểm *B* đến mặt phẳng (*SAC*) theo *a*.

Giải:



Cách 1:

Gọi H là hình chiếu của S xuống BC.

Vì (SBC) ⊥ (ABC) nên SH ⊥ (ABC)

Ta có $SH = a\sqrt{3}$

Thể tích khối

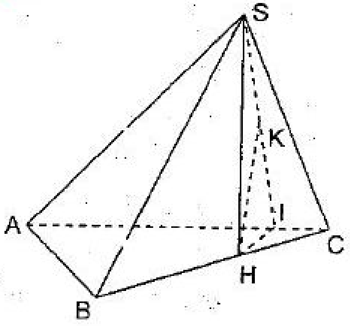
$(SABC) = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{1}{2}3a.4a.a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$

Ta có: Tam giác SAC vuông tại S vì

$SA = a\sqrt{21}$; $SC = 2a$; $AC = 5a$.

Diện tích $\Delta SAC = a^2\sqrt{21}$

$d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3.2a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$



Cách 2: (Tính khoảng cách)

Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Xét ΔSHB ta có:

$SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$; $BH = SB.\cos 30^0 = 3a$

Qua H kẻ HI ⊥ AC tại I

$\Rightarrow (SHI) \perp (SAC)$. Kẻ $HK \perp SI$ tại K

$\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H;(SAC)) = HK$

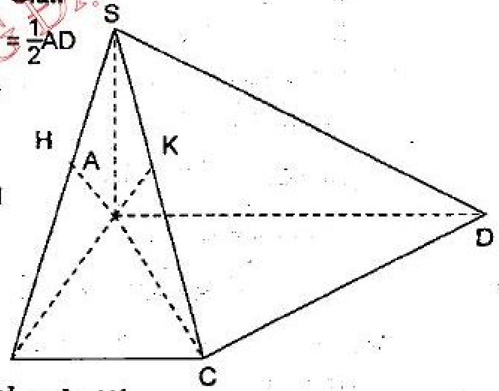
Ta có $\Delta CHI \sim \Delta CAB(g-g) \Rightarrow HI = \frac{AB.CH}{AC} = \frac{3a}{5}$

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{7}} \Rightarrow d(H;(SAC)) = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$

Mà $\frac{d(B;(SAC))}{d(H;(SAC))} = \frac{BC}{HC} = 4 \Rightarrow d(B;(SAC)) = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$

Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

Giải:



Gọi I là trung điểm của AD ta có $CI = \frac{1}{2}AD$

$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C hay $AC \perp CD$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Kẻ AI vuông góc SC tại I

$\Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AI$

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$

$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2}$

$\Rightarrow AI = a \Rightarrow d(A;(SCD)) = a$

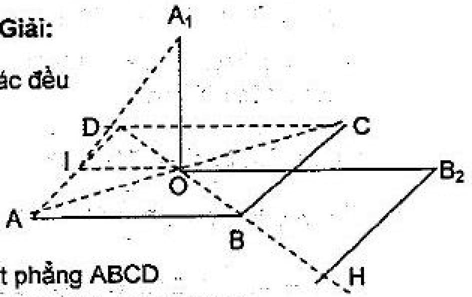
Nối AB cắt CD tại K ⇒ B là trung điểm của AK

$\Rightarrow \frac{d(B;(SCD))}{d(A;(SCD))} = \frac{BK}{CK} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(B;(SCD)) = \frac{a}{2}$

$\frac{d(H;(SCD))}{d(B;(SCD))} = \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(H;(SCD)) = \frac{2}{3}d(B;(SCD)) = \frac{a}{3}$

Thí dụ 4: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật. AB = a, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Giải:



Ta có: $OI = \frac{a}{2}$, ΔOIA_1 là nửa tam giác đều

$\Rightarrow A_1I = 2OI = a$

Tính thể tích khối lăng trụ

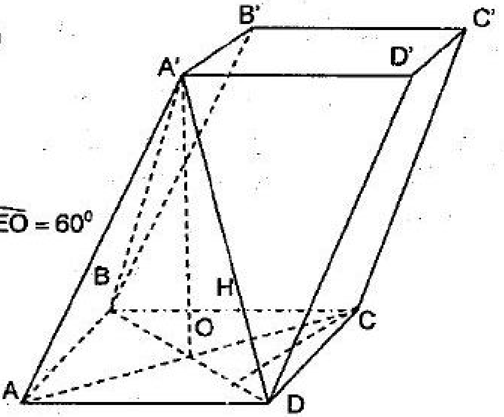
$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

Gọi B_2 là điểm chiếu của B_1 xuống mặt phẳng ABCD

Vậy d (B_1, A_1BD) chính là đường cao vẽ từ B_2 của ΔOB_2B

$$S_{(OBB_2)}=\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}OB.B_2H\Rightarrow B_2H=2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Cách khác tính khoảng cách



Gọi O là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow A'O\perp(ABCD)$

Gọi E là trung điểm của AD

$\Rightarrow OE\perp AD;\ A'E\perp AD$

$\Rightarrow \widehat{A'EO}$ là góc giữa

mp(ADD'A') và mp(ABCD) $\Rightarrow \widehat{A'EO}=60^0$

$\Rightarrow A'O=OE.\tan\widehat{A'EO}$

$$=\frac{AB}{2}.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có $B'C\perp(A'BD)$

$\Rightarrow d\left(B';(A'BD)\right)=d\left(C;(A'BD)\right)$

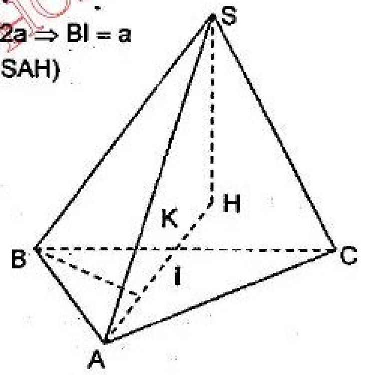
Kẻ $CH\perp BD$ tại $H\Rightarrow CH\perp(A'BD)\Rightarrow d\left(C;(A'BD)\right)=CH$

Mà $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CB^2}+\frac{1}{CD^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(B';(A'BD))=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thí dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh A, $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc H của S lên (ABC) thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mp(ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ trung điểm E của SB đến mp(SAH).

Giải:



Ta có $BC^2=AB^2+AC^2=4a^2\Rightarrow BC=2a\Rightarrow BI=a$

Kẻ BK vuông góc với AH tại $K\Rightarrow BK\perp(SAH)$

$\Rightarrow d\left(B;(SAH)\right)=BK$

Mà $\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BI^2}=\frac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow d(B;(SAH))=BK=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{d(E;(SAH))}{d(B;(SAH))}=\frac{ES}{BS}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(E;(SAH))=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

Dạng 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp: Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2, ta có thể tiến hành theo một trong các cách dưới đây:

Cách 1: Dựa vào định nghĩa (xác định đường vuông góc chung).

Cách này thường được tiến hành khi ta biết được hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau. Khi đó ta làm như sau:

Bước 1: Xác định một mặt phẳng (P) chứa d_1 và vuông góc với đường thẳng d_2.

Tức là đường thẳng d_2 vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P), trong đó có đường thẳng d_1.

Bước 2: Tìm giao điểm I của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (P). Từ I kẻ IH vuông góc với d_1, với $H\in d_1$. Khi đó IH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bước 3: Tính độ dài đoạn thẳng IH.

Ta thường vận dụng hệ thức lượng trong tam giác và tam giác đồng dạng; định lý Pitagor để tính độ dài đoạn IH.

Cách 2: Dựa vào khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song.

Giả sử ta cần tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2, ta có thể tiến hành như sau:

Bước 1: Lấy mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2. Khi đó $d(d_1,d_2)=d\left(d_2,(P)\right)$.

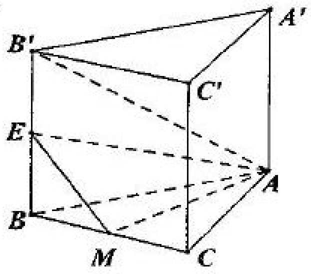
Nên lấy sao cho ta dễ dàng tính được khoảng cách.

Bước 2: Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P).

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Giải:



Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông cân tại B.

Thể tích khối lăng trụ là

$$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{2}.\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}\text{ (đvtt).}$$

Gọi E là trung điểm của BB'.

Khi đó mặt phẳng (AME)//B'C

nên $d(AM,B'C)=d\left(B'C,(AME)\right)$

Nhận thấy $d\left(B,(AME)\right)=d\left(C,(AME)\right)$

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME).

Do tứ diện BAME có BA, BM, BE đôi một vuông góc nên suy ra đường cao :

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BM^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{7}}{7}$$

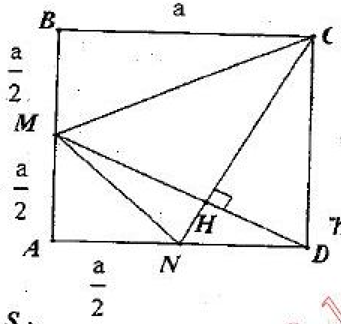
Khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C và AM bằng khoảng cách từ B đến m phẳng (AME): $h=\frac{a\sqrt{7}}{7}$

Thí dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và D Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH=a\sqrt{3}$. Tính thể tích kh chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải:

Tính thể tích khối chóp S.CDNM

Ta có: $SH\perp(ABCD)$ suy ra *SH* là đường cao



$$\Rightarrow V_{S.CMND}=\frac{1}{3}SH.S_{CMND}$$

$$S_{CMND}=S_{ABCD}-S_{CBM}-S_{AMN}=a^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{8}=\frac{5a^2}{8}$$

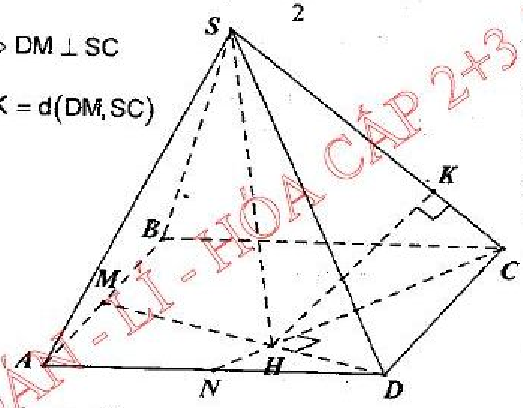
$$\Rightarrow V_{S.CMND}=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{5a^2}{8}=\frac{a^3 5\sqrt{3}}{24}\text{ (đvtt)}.$$

Tính khoảng cách giữa DM và SC

+ Ta có : $\Delta CDN=\Delta DAM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow\begin{cases}CN\perp DM\\SH\perp DM\end{cases}\Rightarrow DM\perp(SCN)\Rightarrow DM\perp SC$$

Kẻ $HK\perp SC\Rightarrow HK\perp MD\Rightarrow HK=d(DM,SC)$



$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HC^2}$$

$$\text{Với }\begin{cases}SH=a\sqrt{3}\\CN.CH=CD^2\end{cases}$$

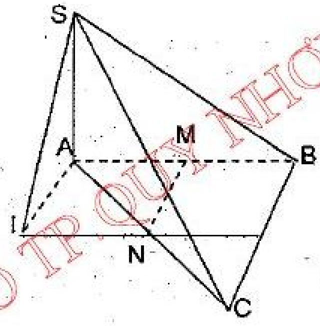
$$\Rightarrow CH^2=\frac{CD^4}{CN^2}=\frac{a^4}{\frac{5a^2}{4}}=\frac{4a^2}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{19}{12a^2}\Rightarrow HK=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S. BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a

Giải:

- Theo giả thiết $\begin{cases}(SAB)\perp(SAC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SA$ là đường cao hình chóp S. BCMN



$$\text{Do }\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$$

$$\Rightarrow\widehat{(SBC),(ABC)}=\widehat{SAB}=60^0$$

Trong tam giác vuông SAB ta có

$SA=AB.\tan 60^0=2a\sqrt{3}$ và

$$S_{BCMN}=S_{ABC}-S_{AMN}$$

$$=2a^2-\frac{1}{2}MA.MN=2a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2$$

Nên $V_{(SMNCB)}=\frac{1}{3}SA.S_{BCMN}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}a^2.2a\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}$.

Kẻ NI // AB để có AMNI là hình vuông, vậy khoảng cách của AB đến SN chính là đường cao của ΔSAI, gọi h là chiều cao đó, ta có:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{(2a\sqrt{3})^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{13}}.$$

hí dụ 4: Trong không gian với hệ toạ độ Đềcác Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc toạ độ O.

Biết $A(2;0;0),B(0;1;0),\ S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tính thể tích hình chóp S.ABMN.

Giải:

ách 1 :

Giả thiết $\Rightarrow SO\perp(ABCD)$; $SA=SC=2\sqrt{3}$

Ta có OM // SA ⇒ Góc (SA, MB) = $\widehat{OMB}$

$OB\perp(SAC)\Rightarrow OB\perp OM$

Tam giác OBM có $\tan\widehat{OMB}=\frac{OB}{OM}\Rightarrow\tan\widehat{OMB}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{OMB}=30^0$

Vẽ $OH\perp SA\Rightarrow OH\perp OM$ và $OH\perp OB\Rightarrow OH\perp(OMB)$

Vì SA // OM ⇒ SA // (OMB) ⇒ d(SA, MB) = d(H, (OMB)) = $OH=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$(ABM)\cap SD=N\Rightarrow$ N là trung điểm SD

Ta có : $\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SMNB}=\frac{1}{4}V_{SBCD}=\frac{1}{8}V_{SABCD}$

Tương tự : $V_{SABN}=\frac{1}{4}V_{SABCD}$

Vậy $V_{SABMN}=V_{SMNB}+V_{SABN}=\frac{3}{8}V_{SABCD}=\frac{3}{8}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AC.BD.SO=\frac{1}{16}.4.2.2.\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Cách 2:

a. O là trung điểm BD $\Rightarrow D(0;-1;0)$; O là trung điểm AC $\Rightarrow C(-2;0;0)$

- M là trung điểm SC $\Rightarrow M\left(-1;0;\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SA}=(-2;0;2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BM}=(-1;-1;\sqrt{2})$;

Gọi φ là góc nhọn tạo bởi SA và BM

$$\cos\varphi=\frac{|2+0+4|}{\sqrt{4+8}\sqrt{1+1+2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=30^0.$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa SA và // BM. Suy ra PT: $(\alpha):\sqrt{2}x+z+-2\sqrt{2}=0$

Ta có : $d(SA,BM)=d(B,\alpha)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

PT mp (ABM): $\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+3z-2\sqrt{2}=0$

PT tham số SD: $\begin{cases}x=0\\ y=-1-t\ (t\in R)\\ z=-2\sqrt{2}t\end{cases}$

Tọa độ điểm $N=SD\cap(ABM)\Rightarrow N\left(0;-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{BS}=(0;-1;2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BA}=(2;-1;0)$; $\overrightarrow{BN}=\left(0;-\frac{3}{2};\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{BM}=(-1;-1;\sqrt{2})$

$\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right]=(2\sqrt{2};0;0)$; $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BA}=4\sqrt{2}$; $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BM}=-2\sqrt{2}$

Vậy $V_{SABMN}=V_{SABN}+V_{SMNB}=\frac{1}{6}.4\sqrt{2}+\frac{1}{6}.2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ (đvdt).

§ 3: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH GÓC - GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG V GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

- Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (P) là góc tạo bởi đường thẳng SA v hình chiếu SB của nó trên mặt phẳng (P)

  Tức là $\left(\widehat{SA,(P)}\right)=\left(\widehat{SA,SB}\right)\Leftrightarrow SB\perp(P)\Leftrightarrow SB$ là hình chiếu của SA trên mi phẳng (P).

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau nằm trong h mặt phẳng đó và cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng

  Tức là $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{d,d'}\right)$ với $\begin{cases}d\subset(P)\\ d'\subset(Q)\\ d,d'\perp\Delta=(P)\cap(Q)\end{cases}$

Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau là góc tạo bởi một đường thẳng này và một đường thẳng song song với đường thẳng kia

Tức là $\left(\widehat{d,d'}\right)=\left(\widehat{d,\Delta}\right)$ với $d'//\Delta$

Hoặc giữa hai đường thẳng chéo nhau là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với hai đường thẳng kia

Tức là $\left(\widehat{d,d'}\right)=\left(\widehat{\Delta',\Delta}\right)$ với $d'//\Delta$ và $d//\Delta'$.

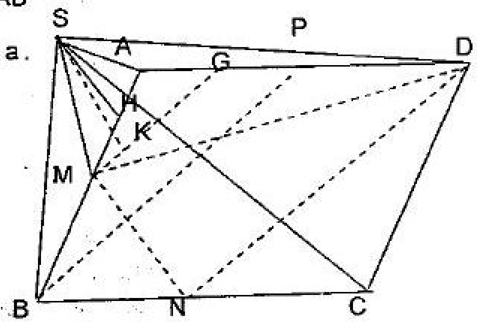
HÍ DỤ MINH HỌA

hí dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Giải:

Gọi H là hình chiếu của S trên AB $\Rightarrow SH\perp(ABCD)$ hay SH là đường cao của hình chóp S.BMDN

Ta có $SA^2+SB^2=a^2+3a^2=4a^2=AB^2$



nên ΔSAB vuông tại S $\Rightarrow SM=\frac{AB}{2}=a$.

Do đó ΔSAM đều cạnh a, nên ta có:

$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích tứ giác BNDM

$$S_{BMDN}=S_{ABCD}-S_{MAD}-S_{NDC}$$
$$=ha^2-\frac{1}{2}.a.2a-\frac{1}{2}a.2a=2a^2$$

$$V_{S.BNDM}=\frac{1}{3}S_{BMDN}.SH=\frac{1}{3}2a^2\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Kẻ thêm MG //ND, ta có $ND=\sqrt{(2a)^2+a^2}=a\sqrt{5}$ và ta có: $MG=\frac{1}{2}ND=\frac{1}{2}a\sqrt{5}$

Kẻ thêm SK vuông góc với MG, ta có: MH.MA = MK.MG

$$\Rightarrow MK=\frac{\frac{a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{5}}\Rightarrow\cos\left(\widehat{SM,ND}\right)=\frac{\frac{a}{\sqrt{5}}}{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

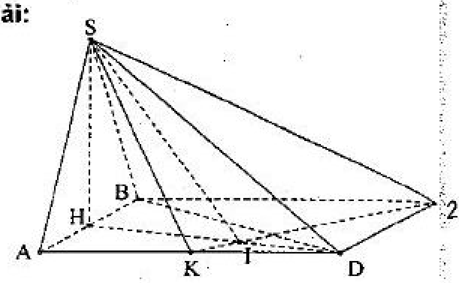
hú ý: Ta có thể tính diện tích tứ giác BNDM

$$S_{BMND}=\frac{1}{2}MN.BD=\frac{1}{2}.2a\sqrt{2}.a\sqrt{2}=2a^2\ (\text{vì } MN\perp BD).$$

Thí dụ 3: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAB* là tam giác đều và $SC=a\sqrt{2}$. Gọi *H* và *K* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB* và *AD*.

1. Chứng minh $SH \perp (ABCD), AC \perp (SHK)$.
2. Tính số đo góc giữa *SC* và mặt phẳng (*SHD*).

Giải:



1. $SB = BC = a \Rightarrow SC^2 = SB^2 + BC^2$.

Do đó ΔSBC vuông tại B.

$CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp (SH)$

Mặt khác $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có $HK // BD \Rightarrow HK \perp AC$.

Suy ra $AC \perp (SHK)$.

2. Gọi $I = CK \cap HD \Rightarrow \Delta DIK \sim \Delta CDK$

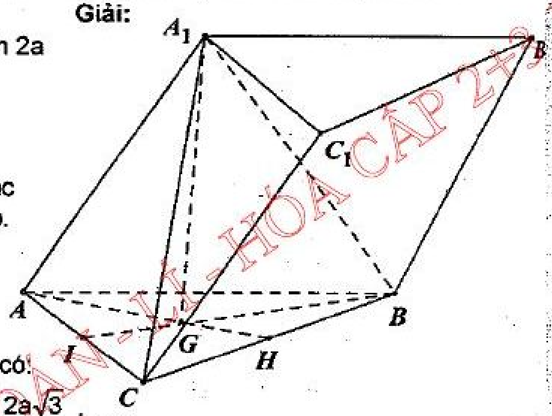
$\Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp HD$. Góc $\widehat{CSI}$ là góc giữa SC và (SHD).

$$\Delta DIK \sim \Delta DHA \Rightarrow DI = \frac{DA.DK}{DH} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$SI = \sqrt{SH^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\widehat{CSI} = \frac{SI}{SC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

Thí dụ 4: Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh 2 điểm A_1 cách đều ba điểm A, B, C. Cạnh bên A_1A tạo với mặt phẳng đáy m góc α. Hãy tìm α, biết thể tích khối lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ bằng $2\sqrt{3}a^3$.

Giải:



Ta có tam giác ABC đều cạnh 2a

nên $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Mặt khác $A_1A = A_1B = A_1C$

$\Rightarrow A_1ABC$ là tứ diện đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có A_1G là đường cao.

Trong tam giác ABC có

$$AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông A_1AG có:

$$\widehat{A_1AG} = \alpha,\ A_1G = AG.\tan\alpha = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.\tan\alpha$$

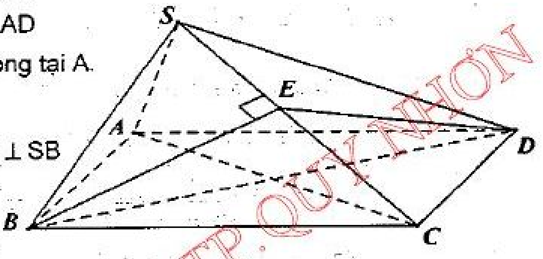
$$V_{\text{Lăng Trụ}} = A_1G.S_{ABC} = 2\sqrt{3}a^3 \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

Thí dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, SA = vuông góc với đáy (ABCD).

1. Chứng tỏ các mặt bên của hình chóp là tam giác vuông.
2. Tính cosin góc nhị diện (SBC, SDC).

Giải:

1. Các mặt bên là tam giác vuông.



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$

$\Rightarrow$ Các tam giác SAB, SAD vuông tại A.

Ta có:

$\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow$ Tam giác SCD vuông tại D.

2. Cosin góc nhị diện (SBC, SDC).

Vẽ $BE \perp SC$. Vì tam giác SBC và tam giác SDC có các cạnh bằng nhau tương ứng nên $DE \perp SC$ và BE = DE.

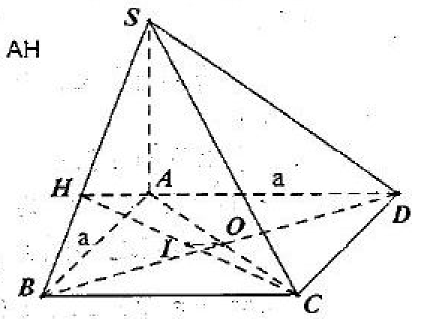
$$\text{Tam giác SBC có: } \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ta có } \cos\left(\overline{SBC, SDC}\right) = \frac{BE^2 + ED^2 - BD^2}{2EB.ED} = -\frac{1}{2}$$

Thí dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$.

1. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) và tính AH.
2. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD).
3. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

Giải:



1. Chứng minh $AH \perp (SBC)$ và tính AH:

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $SB \perp AH$

ΔSAB vuông cho:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{7} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{42}}{7}$$

2. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD):

Hình chiếu của SC lên (ABCD) là AC.

$\Rightarrow$ Góc của SC và (ABCD) là $\widehat{SCA}$.

$$\text{Ta có: } \tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$$

3. Tính khoảng cách từ O đến (SBC):

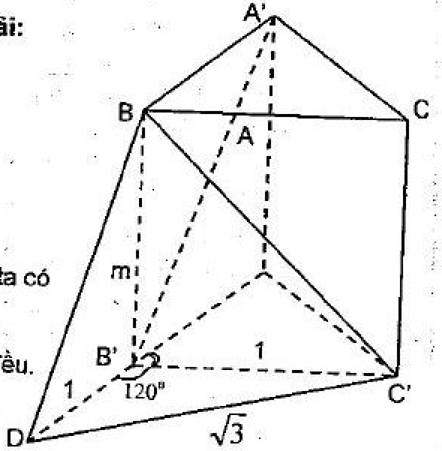
Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$. Vẽ $OI \perp HC$

$\Rightarrow OI \perp (SBC) \Rightarrow$ OI là khoảng cách từ O đến (SBC)

$\Rightarrow OI = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$ (đường trung bình).

Thí dụ 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = 1, CC' = m (m >
AB = 1, CC' = m (m > 0). Tìm m biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB'
BC' bằng 60^0.

Giải:



Kẻ BD // AB' (D ∈ A'B')

$\Rightarrow (AB', BC') = (BD, BC') = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{DBC'} = 60^0$ hoặc $\widehat{DBC'} = 120^0$.

TH1: Nếu $\widehat{DBC'} = 60^0$

Vì lăng trụ đều nên $BB' \perp (A'B'C')$.

Áp dụng định lý Pitago và định lý cosin ta có

$BD = BC' = \sqrt{m^2+1}$ và $DC' = \sqrt{3}$.

Kết hợp $\widehat{DBC'} = 60^0$ ta suy ra $\Delta BDC'$ đều.

Do đó $m^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

TH2: Nếu $\widehat{DBC'} = 120^0$

Áp dụng định lý cosin cho $\Delta BDC'$ suy ra $m = 0$ (loại).

Vậy $m = \sqrt{2}$.

Chú ý: Có thể sử dụng phương pháp vecto hoặc tọa độ với nhận xét

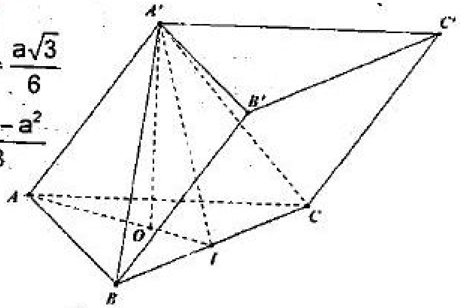
$$\cos(AB', BC') = \left|\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}\right|}{AB'.BC'}$$

Thí dụ 8: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' với A'.ABC là hình chóp tam giác đều cạnh đáy AB = a; cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa hai mp(ABC) và mp(A'BC). Tính tan α và thể tích chóp A'.BCC'B'.

Giải:

Gọi O là tâm đáy suy ra $A'O \perp (ABC)$ và góc $\alpha = \widehat{AIA'}$

Tính tan α



$$\tan\alpha = \frac{A'O}{OI} \text{ với } OI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$A'O^2 = A'A^2 - AO^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$$

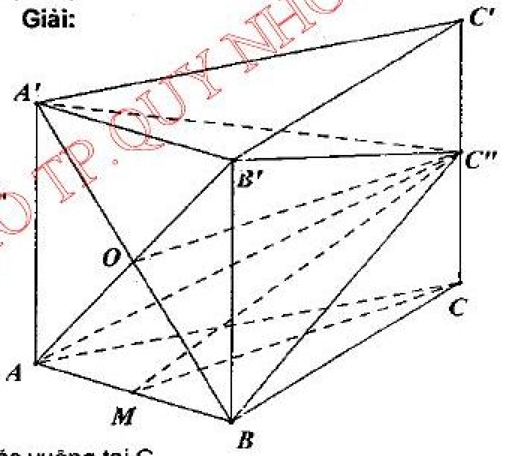
Tính $V_{A'.BCC'B'}$

$$V_{A'.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} = A'O.S_{ABC} - \frac{1}{3}A'O.S_{ABC}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$$

hí dụ 9: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi C" là trung điểm của C'C, tính góc giữa hai đường thẳng C"B và A'B'. Tính góc giữa hai mặt phẳng (C"AB) và (ABC).

Giải:



Vì AB//A'B' nên góc giữa BC" và A'B' là góc giữa BC" và AB,

Dễ thấy AC"= BC" nên ABC" là tam giác cân. Từ đó $\widehat{ABC''} < 90^0$

Vậy góc giữa AB và BC" là $\widehat{ABC''}$

Gọi M là trung điểm của AB thì

$MB = \frac{a}{2}$, $BC'' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $MB \perp MC''$

Từ đó $\cos\widehat{ABC''} = \frac{MB}{BC''} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Cũng từ kết quả trên, ta có

$(CMC'') \perp AB$ vạ CMC" là tam giác vuông tại C

Nên góc giữa mp(BAC") và (CAB) là $\widehat{CMC''}$

$$\text{Ta có } \tan\widehat{CMC''} = \frac{CC''}{MC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

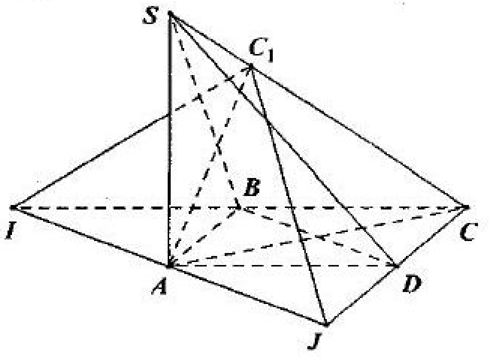
Vậy $\widehat{CMC''} = 30°$ hay góc giữa mp(ABC") và mp(ABC) bằng 30^0

Thí dụ 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, AB = a, BC = 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, SA = a. Tính:

a. Các góc giữa hai mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp

b. Góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên liên tiếp hoặc hai mặt bên đối diện của hình chóp.

Giải:



a. Dễ thấy $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\(SAD) \perp (ABCD)\end{cases}$

nên góc giữa mặt bên (SAB) và (SAD) với mp(ABCD) bằng 90^0

Ta có $(SDA) \perp CD$ và SDA là tam giác vuông tại A nên $\widehat{SDA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (ABCD)

Từ đó $\tan\widehat{SDA} = \frac{1}{2}$

Tương tự $\tan\widehat{SBA} = 1 \Leftrightarrow \widehat{SBA} = 45^0$

Vậy mp(SCD) tạo với mp(ABCD) góc bằng φ mà $\tan\varphi = \frac{1}{2}$ và mp(SBC) với mp(ABCD) góc 45^0.

b. Vì $(SAD) \perp (SAB)$ nên góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 90^0.

Ta cũng có $CD \perp (SAD)$ nên $(SCD) \perp (SAD)$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng 90^0.

Tương tự, ta cũng có góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 90^0.

Ta cần phải tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC)

Trong mp(ABCD), qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AC, nó cắt hai đư thẳng BC và DC lần lượt tại I và J, thì $IJ \perp SC$

Do đó, $\widehat{IC_1J}$ hoặc $180^0 - \widehat{IC_1J}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD)

Ta có: $AJ = AC.\tan\widehat{ACD} = 2a\sqrt{5}$

$$\frac{1}{AC_1^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{5a^2} = \frac{6}{5a^2} \Rightarrow AC_1 = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Đặt $\widehat{AC_1J} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \frac{AJ}{AC_1} = \frac{2a\sqrt{5}}{\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = 2\sqrt{6}$

Đặt $\widehat{AC_1I} = \beta$ thì $\tan\beta = \frac{AI}{AC_1} = \frac{AC\tan\widehat{ACI}}{AC_1} = \frac{a\sqrt{5}.\frac{1}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Đặt $\widehat{IC_1J} = \varphi$ thì $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}}{1 - 2\sqrt{6}.\frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy góc giữa mp(SBC) và (SCD) là $180^0 - \varphi$ mà $\tan\varphi = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo b cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳ $(A_1B_1C_1)$ thuộc đường thẳng B_1C_1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A và B_1C_1 theo a.

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD

Biết thể của khối tứ diện ABCD bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi ABCD, SO vuông góc với đáy, O là giao điểm của hai đường chéo, $SO = 2\sqrt{2}, AB = \sqrt{5}$, đường chéo AC = 4 và M là trung điểm của SC. Tính thể tích SDMB, khoảng cách giữa SA và BM.

Bài 4: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D', có AB = a, AD = b, AA' = c và đáy ABCD là hình bình hành có góc BAD bằng 60^0. Gọi M là điểm trên đoạn CD sao cho DM = 2MC. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng BDA' theo a, b, c.

Bài 5: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A, AB = 2a, BC = 4a, $A'C = 2a\sqrt{3}$ $(a > 0)$. Gọi M là trung điểm BC, biết $A'B \perp (AB'M)$. Chứng minh tam giác A'BC vuông và tính thể tích lăng trụ theo a.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC.

a. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN

b. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Bài 7: Cho hình chóp S.ABC có mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC), SA = AB = a, AC = 2a và $\widehat{ASC} = \widehat{ABC} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBC).

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có $SC \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120^0$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 45^0. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BD.

Bài 9: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, AB = a. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng A'C tạo với mặt đáy (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp A'.BCC'B' và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và A'C theo a.

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Đường thẳng SD tạo với đáy ABCD một góc 60^0. Gọi M là trung điểm AB. Biết $MD = \frac{3\sqrt{5}}{2}a$, mặt phẳng (SDM) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích hình chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SM theo a.

Bài 11: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A,B biết BA = BC = a, AD = 2a, SA = 3a vuông góc với đáy ABCD.

a. Chứng minh rằng các mặt bên của chóp S.ABCD đều là tam giác vuông

b. Gọi H là hình chiếu của A trên (SCD). Tính AH

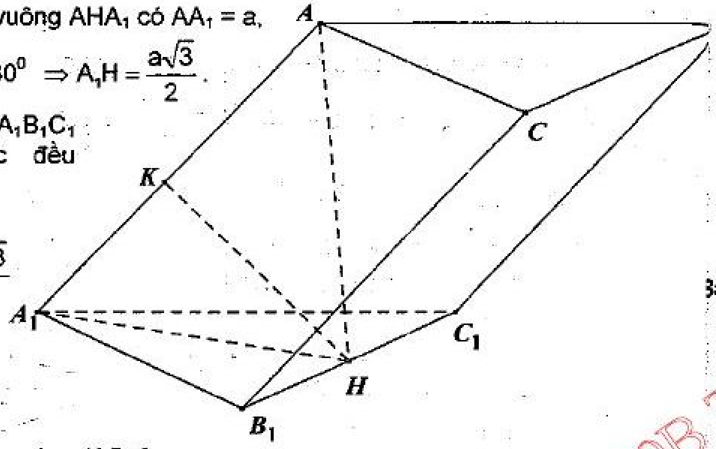
HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc $\widehat{AA_1H}$ là góc giữa AA_1 và $(A_1B_1C_1)$, theo giả thiết thì góc $\widehat{AA_1H}$ bằng 30^0.

Xét tam giác vuông AHA_1 có $AA_1 = a$,

Góc $\widehat{AA_1H} = 30^0 \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Do tam giác $A_1B_1C_1$ là tam giác đều cạnh a, H thuộc B_1C_1 và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên A_1H vuông góc với B_1C_1.

Mặt khác $AH \perp B_1C_1$ nên $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

Kẻ đường cao HK của tam giác AA_1H thì HK chính là khoảng cách giữa AA_1 B_1C_1

Ta có $AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài 2:

Gọi E là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AE$. Ta có ΔACD cân tại A nên $CD \perp A$

Tương tự ΔBCD cân tại B nên $CD \perp BE$. Suy ra $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BH$

Mà $BH \perp AE$ suy ra $BH \perp (ACD)$

Do đó $BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$ và góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là α

Thể tích của khối tứ diện ABCD là

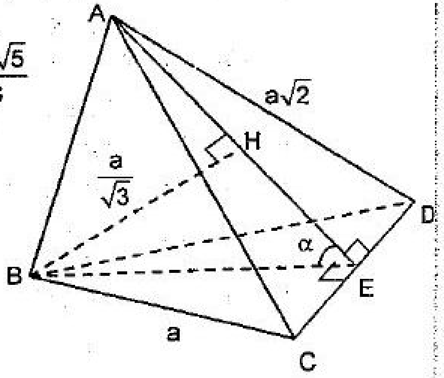
$$V = \frac{1}{3}BH.S_{ACD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{27} \Rightarrow S_{ACD} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow AE.DE = \frac{a^2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AE^2.DE^2 = \frac{5a^4}{9}$$

Mà $AE^2 + DE^2 = 2a^2$

Khi đó AE^2, DE^2 là 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2a^2x + \frac{5}{9}a^4 = 0$$



$$\begin{cases} AE^2 = \frac{a^2}{3} \\ DE^2 = \frac{5a^2}{3} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} AE^2 = \frac{5a^2}{3} \\ DE^2 = \frac{a^2}{3} \end{cases}$$

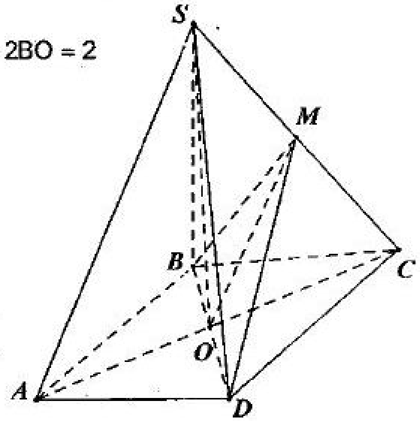
Trường hợp $DE^2 = \frac{5}{3}a^2$ (loại vì DE < a).

Xét ΔBED vuông tại E nên $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Xét ΔBHE vuông tại H nên $\sin\alpha = \frac{BH}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

Vậy góc giữa hai mp(ACD) và (BCD) là $\alpha = 45^0$

Bài 3:



Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$, trong đó $BD = 2BO = 2$

Hay $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = 4$, do đó

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ suy ra

$V_{SBCD} = \frac{1}{2}V_{SABCD} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác $\frac{V_{SMBD}}{V_{SBCD}} = \frac{1}{2}$ nên $V_{SMBD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Do $MO // SA$ nên $SA // (MBD)$ vì vậy

$$d(SA;BM) = d(SA;(BMD)) = d(S;(BMD)) = \frac{3V_{SBMD}}{S_{BMD}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Bài 4:

$\frac{ME}{AE} = \frac{MD}{AB} = \frac{2}{3}$, do đó $\frac{d(M,(BDA'))}{d(A,(BDA'))} = \frac{ME}{AE} = \frac{2}{3}$

$AF \perp BD$; $AH \perp A'F$ Khi đó $d(A,(BDA')) = AH$.

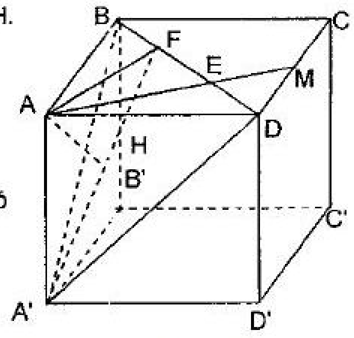
Tam giác ABD có AB = a, AD = b, góc BAD bằng 60^0 nên

$$AF = \frac{2S_{ABD}}{BD} = \frac{ab\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + b^2 - ab}}$$

Trong tam giác vuông A'AF (vuông tại A), ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AF^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{abc\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 4abc^2}}$$



Vậy $d(M,(BDA')) = \dfrac{2abc\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 4abc^2}}$

Bài 5:

Gọi I là giao điểm AB' và A'B, $A'B \perp (AB'M) \Rightarrow A'B \perp MI$,

MI là đường trung bình của tam giác A'BC

nên MI // A'C do đó $A'B \perp A'C \Rightarrow \Delta A'BC$ vuông tại A'

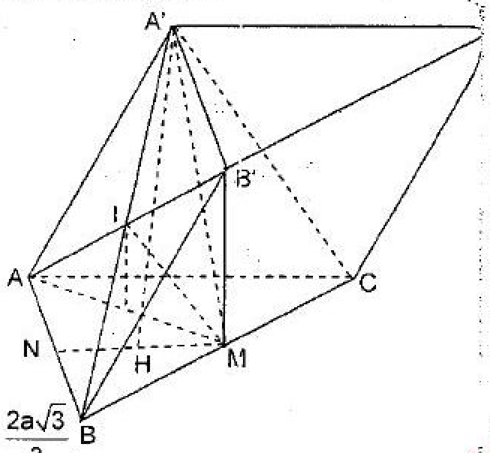
$\Rightarrow A'M = \dfrac{1}{2}BC = 2a$ và $A'B = 2a$,

tam giác ABC vuông tại A suy ra AM = 2a,

$A'B \perp (AB'M) \Rightarrow A'B \perp AB'$

từ đó suy ra tứ giác ABB'A' là hình thoi, suy ra AA' = AB = 2a vậy tứ diện A'ABM là tứ diện đều cạnh bằng 2a. Gọi N là trung điểm AB $\Rightarrow MN = a\sqrt{3}$, Gọi H là tâm tam giác đều ABN

$\Rightarrow A'H \perp (ABM)$ và $HM = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$



suy ra $A'H = \sqrt{A'M^2 - HM^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $V = S_{ABC}.A'H = \dfrac{1}{2}AB.AC.A'H = 4\sqrt{2}a^3$

Bài 6:

a) Gọi H là hình chiếu của S trên AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$
Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$ nên ΔSAB vuông tại S.

Suy ra: $SM = \dfrac{AB}{2} = a$. Do đó ΔSAM đều, suy ra $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy: $V_{S.BMDN} = \dfrac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

b) Kẻ ME// DN ($E \in AD$). Suy ra $AE = \dfrac{a}{2}$

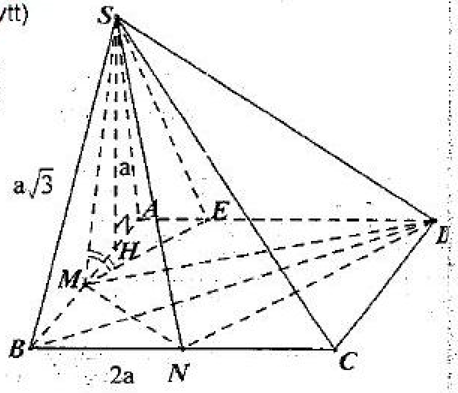
Gọi φ là góc giữa SM và DN

$\Rightarrow \varphi = (\widehat{SM,ME})$

Ta có: $AH \perp AE \Rightarrow SA \perp AE$

Vậy: $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

$ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$



ΔSME cân tại E, có $\varphi = \widehat{SME}$, suy ra $\cos\varphi = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Vậy côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN là $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

ài 7:

Kẻ SH vuông góc AC ($H \in AC$) $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

$\Rightarrow SC = BC = a\sqrt{3}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

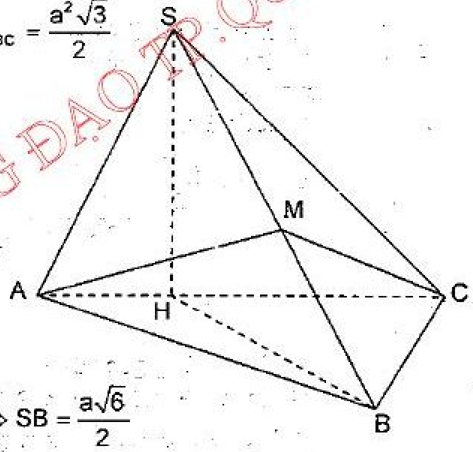
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3}{4}$

Gọi M là trung điểm SB và φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ta có: SA = AB = a, $SC = BC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AM \perp SB$ và $CM \perp SB$

$\Rightarrow \cos\varphi = \left|\cos\widehat{AMC}\right|$



$\Delta SAC = \Delta BAC \Rightarrow SH = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

AM là trung tuyến ΔSAB nên:

$AM^2 = \dfrac{2AS^2 + 2AB^2 - SB^2}{4} = \dfrac{10a^2}{16} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

Tương tự: $CM = \dfrac{a\sqrt{42}}{4} \Rightarrow \cos\widehat{AMC} = \dfrac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2.AM.CM} = -\dfrac{\sqrt{105}}{35}$

Vậy: $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{105}}{35}$.

ài 8:

Kẻ $SK \perp AB$ ($K \in AB$) $\Rightarrow CK \perp AB$ (định lí 3 đường vuông góc)

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng *(SAB)* và (ABCD) là góc giữa SK và CK.

Do $\widehat{SKC}$ nhọn nên $\widehat{SKC} = 45^0$

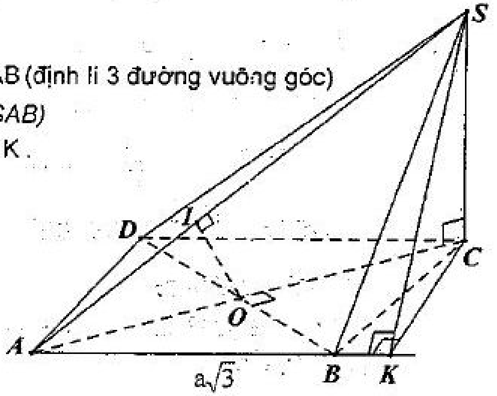
$\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CBK} = 60^0$

Trong tam giác vuông CBK :

$CK = CB\sin 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

Tam giác SCK vuông cân tại C

nên $SC = \dfrac{3a}{2}$. Ta có $S_{ABCD} = AB.BC\sin 120^0 = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$



Do đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SC=\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$ (đvtt)

Gọi $O=AC\cap BD$

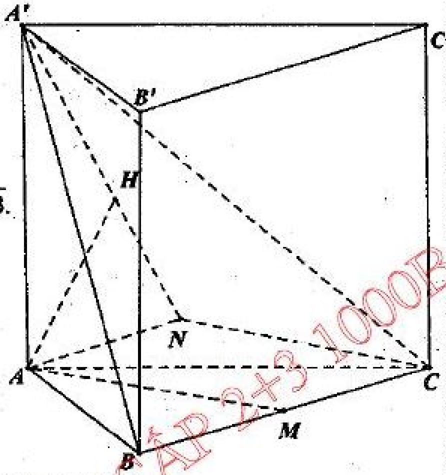
Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp SC\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$ tại O.

Kẻ $OI\perp SA$ $(I\in SA)\Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của *SA* và *BD*.

Dùng hai tam giác đồng dạng AOI và ASC suy ra $OI=\frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

Vậy $d(SA,BD)=\frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

Bài 9:



Theo giả thiết ta có $\widehat{A'CA}=60^0$.

Suy ra

$AA'=AC.\tan\widehat{A'CA}=a.\tan60^0=a\sqrt{3}$.

Từ đó

$$V_{A'.BCC'B'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{A'.ABC}$$
$$=A'A.S_{ABC}-\frac{1}{3}.A'A.S_{ABC}$$
$$=\frac{2}{3}.A'A.\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Dựng hình bình hành *AMCN*.

Ta có $d(AM,A'C)=d(AM,(A'CN))=d(A,(A'CN))$.

Hạ $AH\perp A'N$ (1). Ta có $AM\perp CM\Rightarrow CN\perp AN$

Mặt khác ta có $CN\perp AA'\Rightarrow CN\perp(AA'N)\Rightarrow CN\perp AH$ (2).

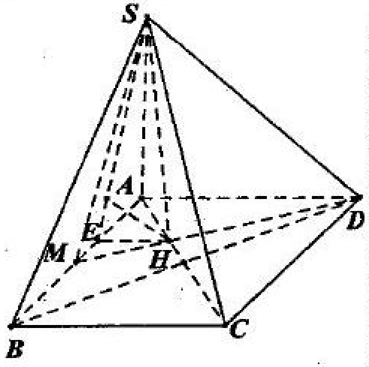
Từ (1) và (2) ta suy ra $AH\perp(A'NC)\Rightarrow d(AM,A'C)=AH$.

Trong tam giác vuông *AA'N* ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{(a\sqrt{3})^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $d(AM,A'C)=AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 10:



Ta có $AD^2+AM^2=MD^2$

$\Leftrightarrow AD^2+\frac{AD^2}{4}=\frac{45}{4}a\Leftrightarrow AD=3a$

$\Rightarrow S_{ABCD}=9a^2$

Gọi H là giao của AC và DM, Do (SAC) và (SDH) cùng vuông góc với đáy (ABCD) nên $SH\perp(ABCD)$

Suy ra $\widehat{SDH}=60^0$;

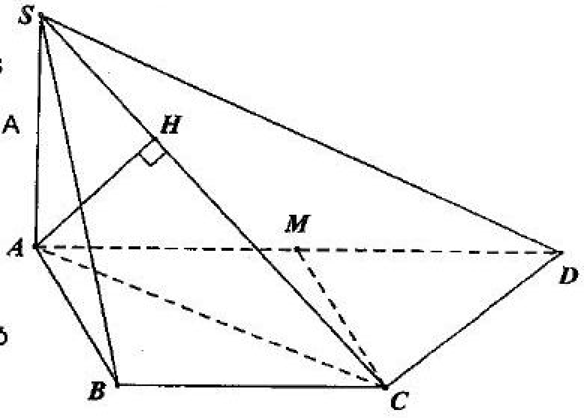
$SH=HD.\tan60^0=\frac{2}{3}DM\tan60^0=\sqrt{15}a$. (vì H là trọng tâm tam giác ADB)

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\sqrt{15}a.9a^2=3\sqrt{15}a^3$.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên AB và K là hình chiếu của H lên SE, khi đó $AB\perp(SHE)\Rightarrow AB\perp HK$ suy ra $HK\perp(SAB)$. Mặt khác do CD//(SAB) nên ta có $d(CD,SM)=d(CD,(SAB))=d(D,(SAB))=3d(H,(SAB))$

$$=3HK=\frac{3HE.HS}{\sqrt{HE^2+HS^2}}=\frac{AD.HS}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}AD\right)^2+HS^2}}=\frac{3\sqrt{15}a}{4}.$$

Bài 11:



$\left.\begin{matrix}SA\perp(ABCD)\\ AB\subset(ABCD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp AB$

vậy tam giác SAB vuông tại A

Tương tự tam giác SAD

là các tam giác vuông tại A

$\left.\begin{matrix}SA\perp BC\\ AB\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp SB$

tam giác SBC vuông tại B

Gọi M là trung điểm AD ta có

$\left.\begin{matrix}BM\perp AC\\ BM//CD\end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp AC$

Mà $CD\perp SA$ nên $CD\perp mp(SAC)\Rightarrow CD\perp SC$.

SCD là các tam giác vuông tại C

Chứng minh H là hình chiếu của A trên SC

$$\left.\begin{matrix}AH\perp SC\\ AH\perp DC\\ SC\cap DC=C\\ SC\subset(SDC)\\ DC\subset(SCD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow AH\perp(SCD)$$

Tính AH

Xét tam giác vuông SAC ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}$ nên $AH=\frac{3\sqrt{22}}{11}a$

§ 4: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Dạng 1: Tính thể tích bằng cách áp dụng trực tiếp công thức tính thể tích

A. Lý thuyết

- Thể tích của hình lăng trụ $V_{Lt} = B.h$ với B là diện tích đáy và h là chiều cao
- Thể tích hình chóp $V_c = \frac{1}{3}B.h$ với B là diện tích đáy và h là chiều cao
- Thể tích của hình hộp chữ nhật $V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước
- Thể tích của hình lập phương $V = a^3$ với a là độ dài cạnh

Thông thường trong các đề thi đại học chỉ tính thể tích của hình lăng trụ và hì chóp. Để tính được thể tích của chúng ta phải xác định được đường cao và t tích đáy

Chú ý:

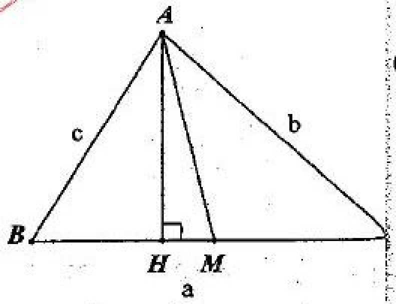
* *Xác định đường cao của hình chóp*

- Khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy thì cạnh đó chính là đường cao.
- Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao là đường kẻ đỉnh vuông góc với giao tuyến của đáy với mặt bên đó *(Nói đơn giản là đườ cao của mặt bên).*
- Khối chóp có 2 mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao là cạ bên chung của 2 mặt đó.
- Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên cùng tạo với đáy c góc bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Khối chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy các góc bằng nhau thì chân đườ cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy.

Ngoài ra trong một số trường hợp khác chúng ta có thể khai thác các tính c khác của đa diện để xác định đường cao.

Để tính được độ dài đường cao thông thường chúng ta gắn vào các tam g vuông và chú ý

Hệ thức lượng trong tam giác vuông : Cho ΔABC vuông ở A ta có :



Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BA^2 = BH.BC$; $CA^2 = CH.CB$

$AB.AC = BC.AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$BC = 2AM$

$\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $\tan B = \frac{b}{c}$, $\cot B = \frac{c}{b}$

$b = a.\sin B = a.\cos C$, $c = a.\sin C = a.\cos B$, $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$,

$b = c.\tan B = c.\cot C$

Hệ thức lượng trong tam giác thường:

Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Xác định diện tích đáy *(quan trọng xác định rõ đáy là hình gì)*

- **Công thức tính diện tích tam giác:**

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b\sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt :

* ΔABC vuông ở A : $S = \frac{1}{2}AB.AC$

* ΔABC đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

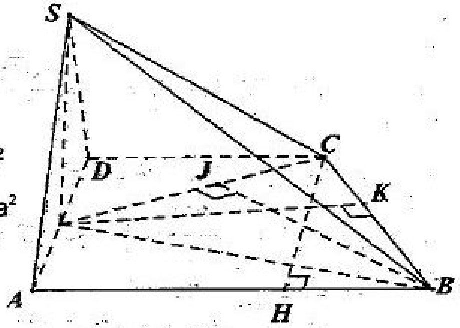
- **Công thức tính diện tích tứ giác ABCD:**
- Diện tích hình vuông : $S = AB^2$
- Diện tích hình chữ nhật : $S = AB.AC$
- Diện tích hình thoi : $S = \frac{1}{2}AC.BD$
- Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2}(AB + CD).h$
- Diện tích hình bình hành : $S = CD.h$
- Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$
- Diện tích tứ giác bất kỳ $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\left(\overline{AC}, \overline{BD}\right)$

B. THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải:

Cách 1:



Hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^0$;

$AB = AD = 2a \Rightarrow IA = ID = a$

ΔAIB là tam giác vuông

$\Rightarrow BI^2 = AI^2 + AB^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$

ΔIDC vuông nên $IC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Từ C kẻ $CH \perp AB$

$\Rightarrow \Delta CHB$ là tam giác vuông

$CH = 2a,\ CD = a \Rightarrow HB = a$

$BC^2 = HC^2 + HB^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow \Delta BIC$ là tam giác vuông cân vì $BC^2 = BI^2 = 5a^2$

Kẻ $IK \perp CB$. Gọi J là trung điểm của IC $\Rightarrow IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow BJ^2 = BI^2 - IJ^2 = 5a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{9a^2}{2} \Rightarrow BJ = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$

Ta có $BJ.IC = IK.BC \Rightarrow IK = \dfrac{BJ.IC}{BC} = \dfrac{\dfrac{3a}{\sqrt{2}}a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

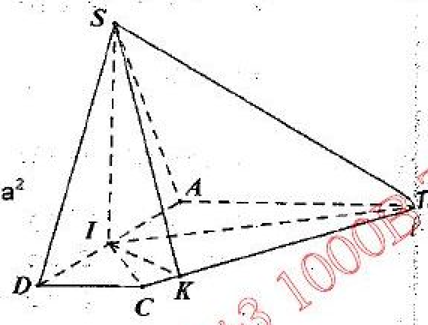
$(SIC),\ (SIC) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

$IK \perp BC \Rightarrow SK \perp BC \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^0$

$\Rightarrow SI = IK.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}.\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD)AD}{2} = \dfrac{(2a + a).2a}{2} = 3a^2$

$V = \dfrac{1}{3}3a^2.\dfrac{3a}{\sqrt{5}}.\sqrt{3} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}.$



Cách 2:

$(SIB) \perp (ABCD)$ và $(SIC) \perp (ABCD)$ nên ta có $SI \perp (ABCD)$
Vậy SI là đường cao của hình chóp S.ABCD.
Ta tính SI:
Có diện tích hình thang ABCD là: $dt(ABCD) = 3a^2$.

$S_{\Delta ABI} = \dfrac{1}{2}AB.IA = a^2,\ S_{\Delta CDI} = \dfrac{1}{2}CD.ID = \dfrac{1}{2}a^2 \Rightarrow S_{\Delta ICB} = S_{ABCD} - S_{IAB} - S_{ICD} = \dfrac{3a^2}{2}$

$BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

Kẻ $IK \perp BC\ (K \in BC)$ thì ta có $BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^0$ và $IK = \dfrac{2dt(\Delta IBC)}{CB} = \dfrac{3\sqrt{5}a}{5}$

$\Rightarrow SI = IK.\tan\widehat{SKI} = \dfrac{3\sqrt{15}a}{5}.$

Suy ra thể tích khối chóp S.ABCD là : $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{3\sqrt{15}a^3}{5}$ (đvtt).

Thí dụ 2: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có BB' = a, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'ABC theo a.

Giải:

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow B'G \perp (AB$

$B'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ BG = \dfrac{a}{2},\ BM = \dfrac{3a}{4}$

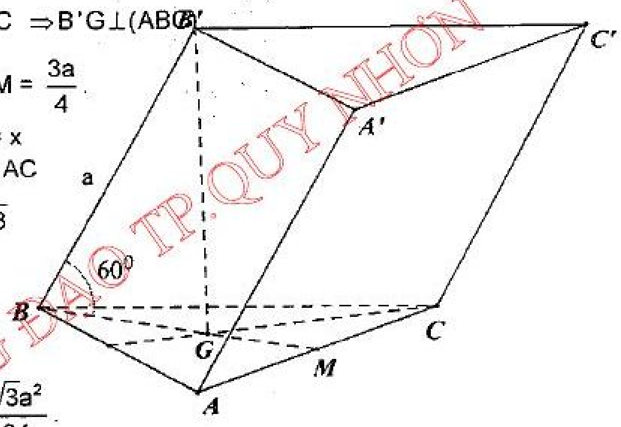
Đặt AB = 2x suy ra AC = x
Gọi M là trung điểm của AC

$\Rightarrow MC = \dfrac{x}{2} \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$

Vậy $MB^2 = MC^2 + CB^2$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{9a^2}{52}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AC = \dfrac{9\sqrt{3}a^2}{104}$



Tính thể tích khối tứ diện A'ABC là $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{104}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9a^3}{208}$.

Thí dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Giải:

Cách 1:

Ta có $AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$;

$BC^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$

H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (ABC)

Ta có $IH \perp AC$

$\dfrac{IA'}{IC} = \dfrac{A'M}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{IH}{AA'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IH = \dfrac{4a}{3}$

$V_{IABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}IH = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}2a.a.\dfrac{4a}{3} = \dfrac{4a^3}{9}$ (đvtt)

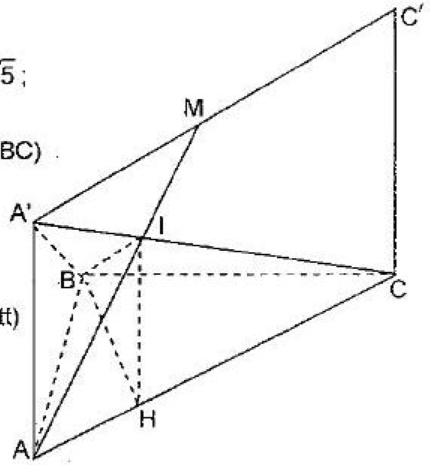
Tam giác A'BC vuông tại B

Nên $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{5}2a = a^2\sqrt{5}$

Xét 2 tam giác A'BC và IBC, ta có

$IC = \dfrac{2}{3}A'C \Rightarrow S_{IBC} = \dfrac{2}{3}S_{A'BC} = \dfrac{2}{3}a^2\sqrt{5}$

Vậy $d(A,IBC) = \dfrac{3V_{IABC}}{S_{IBC}} = 3\dfrac{4a^3}{9}\dfrac{3}{2a^2\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$



Cách 2:

Có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

Kẻ $IH \perp AC (H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$

Kẻ $HE \perp BC (E \in BC) \Rightarrow IE \perp BC$

(Định lí 3 đường vuông góc)

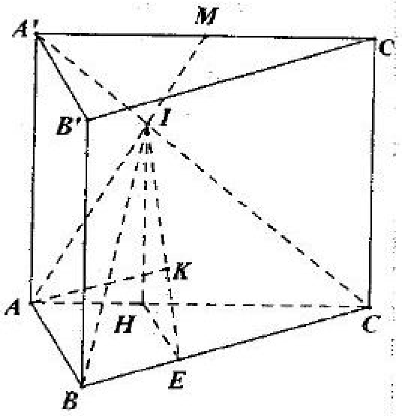
Ta có $\frac{HE}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{CB'}{CA'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow HE = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$

Do đó

$IE = \sqrt{IH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} + 4a^2 9} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

Nên $S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}IE.BC = \frac{1}{2}\frac{2a\sqrt{5}}{3}.2a = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$



Gọi h là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABC) thì: $h = \frac{3.V_{IABC}}{S_{\Delta IBC}} = \frac{3.\frac{4a^3}{9}}{\frac{2a\sqrt{5}}{3}} = \frac{2a^2}{\sqrt{5}}$

Thí dụ 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Giải:

Gọi H là trung điểm của BC,

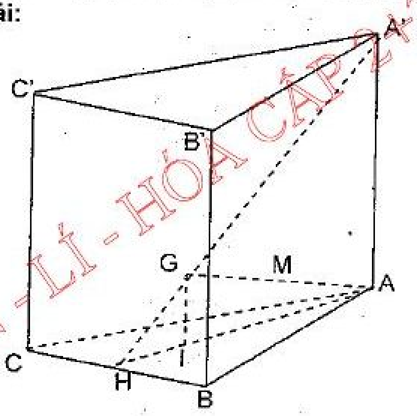
theo giả thuyết ta có : $\widehat{A'HA} = 60^0$

Ta có : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

và $AA' = \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$

Vậy thể tích khối lăng trụ

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$



Kẻ đường trung trực của GA tại trung điểm M của GA trong mặt phẳng A'AH cắt GI tại J thì GJ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC.

Ta có: GM.GA = GJ.GI

$\Rightarrow R = GJ = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{GI^2 + IA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}$

Thí dụ 5: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên *SA = a*; hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC*, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi *CM* là đường cao của tam giác *SAC*. Chứng minh *M* là trung điểm của *SA* và tính thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a*.

Giải:

Ta có $SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

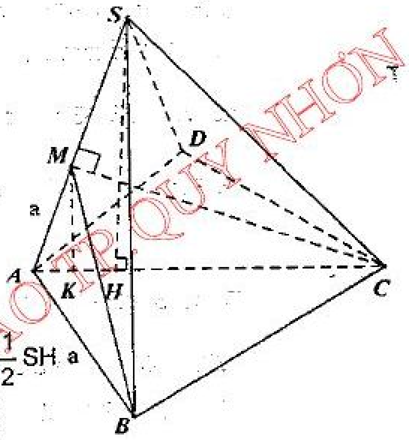
$SC = \sqrt{\frac{14a^2}{16} + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{32a^2}{16}} = a\sqrt{2}$

Vậy ΔSCA cân tại C nên đường cao hạ từ C xuống ΔSAC chính là trung điểm của SA.

Từ M ta hạ K vuông góc với AC, nên $MK = \frac{1}{2}SH$

Ta có $V(S.ABC) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right)\frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}$

Nên $V(MABC) = V(MSBC) = \frac{1}{2}V(SABC) = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$



Thí dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^0$ và đường thẳng A'C tạo với mặt phẳng (ABB'A') góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B, CC' theo a.

Giải:

Trong (ABC), kẻ $CH \perp AB$ $(H \in AB)$, suy ra $CH \perp (ABB'A')$ nên A'H là hình chiếu vuông góc của A'C lên (ABB'A').

Do đó: $\left[A'C, \widehat{(ABB'A')}\right] = \widehat{(A'C, A'H)} = \widehat{CA'H} = 30^0$.

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác ABC ta có

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos120^0 = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow CH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Xét tam giác vuông A'HC ta có:

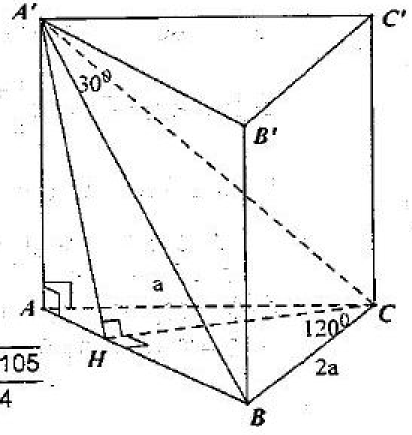
$A'C = \frac{CH}{\sin30^0} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác vuông AA'C ta có:

$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \frac{a\sqrt{35}}{7}$.

Thể tích lăng trụ là: $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{105}}{14}$.

Do $CC' // AA' \Rightarrow CC' // (ABB'A')$.



Suy ra: $d(A'B,CC') = d(CC',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A')) = CH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Thí dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có g $\widehat{ABC} = 60^0$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy, góc gi hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, CD theo a.

Giải:

Gọi $O = AC \cap BD$, M là trung điểm AB và I là trung điểm của AM.

Do tam giác ABC là tam giác đều cạnh a nên:

$CM \perp AB, OI \perp AB$ và

$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, OI = \frac{a\sqrt{3}}{4}, S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vì (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với (ABCD) nên $SO \perp (ABCD)$

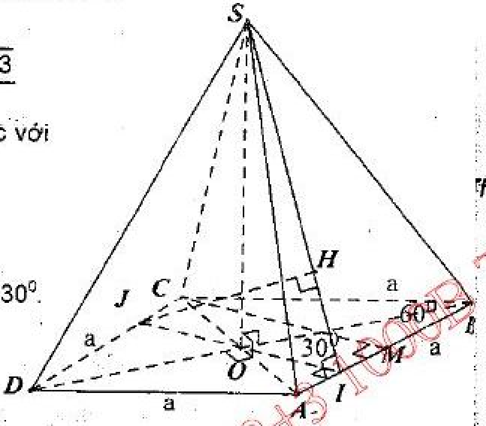
Do $AB \perp OI \Rightarrow AB \perp SI$.

Suy ra:

$\left[\widehat{(SAB),(ABCD)}\right] = \left(\widehat{OI,SI}\right) = \widehat{SIO} = 30^0$.

Xét tam giác vuông SOI ta được:

$SO = OI.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{4}$



Suy ra: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Gọi $J = OI \cap CD$ và H là hình chiếu vuông góc của J trên SI

Suy ra: $IJ = 2OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $JH \perp (SAB)$

Do $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB)$

Suy ra: $d(SA,CD) = d\left[CD,(SAB)\right] = d\left[J,(SAB)\right] = JH$

Xét tam giác vuông IJH ta được: $JH = IJ.\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy $d(SA,CD) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Thí dụ 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB = 2, tam giác ACB vuông tại C, các tam giác SAC và SBD là các tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính thể tích của hình chóp S.ABCD

Giải:

Vì tam giác SAC và SBD đều cạnh $\sqrt{3}$ nên AC = BD hay tứ giác ABCD là hình thang cân.

Lại có góc $ACB = 90^0$ (giả thiết) $\Rightarrow ADB = 90^0$ nên 4 điểm A, B, C, D (hay hình thang ABCD) nội tiếp đường tròn đường kính AB

Gọi H là trung điểm AB khi đó SH vuông góc (ABCD) (hay SH là trục đường tròn ngoại tiếp)

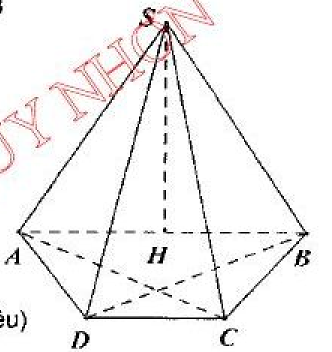
hay SH là đường cao của hình chóp.

Trong tam giác vuông ACB tại C ta có

$BC \overset{pitago}{=} \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4-3} = 1$

nên $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{2}$

Lại có $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (Do ABCD là nửa lục giác đều)



Vậy thể tích khối chóp là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{4}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ (đvtt)

Thí dụ 9: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa cạnh CD và tạo với mặt phẳng đáy một góc 30^0 và cắt SA, SB lần lượt tại M và N. Tính thể tích khối chóp S.CDMN theo a.

Giải:

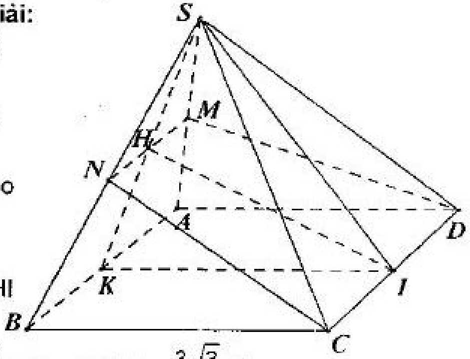
Gọi I và K là trung điểm của CD và AB và H là giao điểm của SK và MN

$\Rightarrow \widehat{SIK} = 60^0, \widehat{HIK} = 30^0$ và tam giác SIK là tam giác đều cạnh a

IH là phân giác đồng thời là đường cao

SH là đường cao nên $SH = \frac{SK}{2} = \frac{a}{2}$

Tứ giác CDMN là hình thang cân có HI là đường cao



Ta có $IH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MN = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{CDMN} = \frac{1}{2}(CD + MN)IH = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$

Vậy $V_{SCDMN} = \frac{1}{3}SH.S_{CDMN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (đvtt)

hí dụ 10: Cho hình chóp S.ABC có mặt SBC vuông góc với đáy, các cạnh SB = SC = 1 và các góc $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^0$. Tính thể tích của hình chóp S.ABC.

Giải:

Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow SH \perp BC$

$(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

ΔSBC đều cạnh 1 $\Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AB = AC \Rightarrow AH \perp BC$. Đặt SA = x, x > 0

$AH^2 = SA^2 - SH^2 = x^2 - \frac{3}{4}$

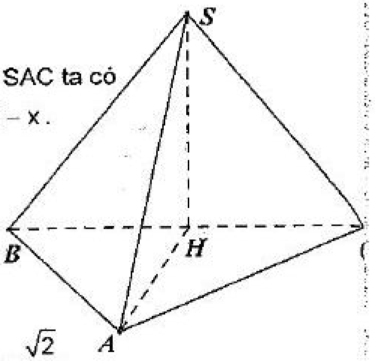
Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác SAC ta có

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos 60^0 = x^2 + 1 - x$.

ΔAHC vuông $\Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - x = x^2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{\sqrt{6}}{4}$



Vậy thể tích hình chóp là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{\sqrt{2}}{8}$

Thí dụ 11: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A*, *BC*=
Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (*ABC*) trùng với trung đi
BC, mặt phẳng (*SAC*) tạo với đáy (*ABC*) một góc *60⁰*. Tính thể tích hình ch
và khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (*SAC*) theo a, với *I* là trung điểm *S*

Giải:

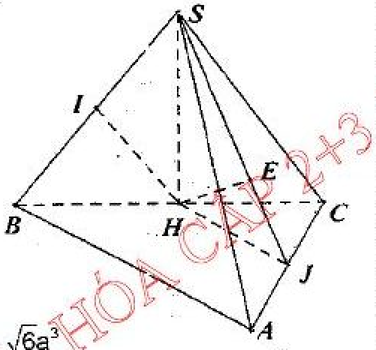
Gọi H, J lần lượt là trung điểm của BC, AC,

Ta có $\left.\begin{matrix} SH \perp (ABC) \\ HJ \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp SJ$,

suy ra góc $\widehat{SJH} = 60^0$ và

$AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a, \quad HJ = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

$SH = HJ.\tan 60^0 = \frac{\sqrt{6}}{2}a$



Thể tích hình chóp là

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.\frac{AB.AC}{2} = \frac{1}{6}.\frac{\sqrt{6}}{2}.\left(\sqrt{2}\right)^2.a^3 = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Gọi E là hình chiếu của H lên SJ, khi đó ta có $\left.\begin{matrix} HE \perp SJ \\ HE \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow HE \perp (SAC)$.

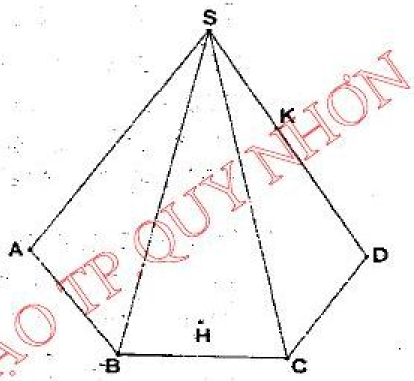
Mặt khác, do $IH // SC \Rightarrow IH // (SAC)$,

suy ra $d(I,(SAC)) = d(H,(SAC)) = HE = HJ.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Thí dụ 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác
và AB = BC = CD = a. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với
phẳng đáy (ABCD). Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD, biết r
khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

Gọi H là giao điểm của AC và BD.



Do (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên SH vuông góc với (ABCD).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng SD.

Do ABCD là nửa lục giác đều nên AB vuông góc với BD, kết hợp với AB vuông góc với SH suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BK$ $\Rightarrow$ BK là đoạn vuông góc chung của AB và SD

Do BC//AD suy ra $AC = BD = a\sqrt{3}$

Mặt khác ta có

$2S_{SBD} = SH.BD = BK.SD \Rightarrow SH.a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{SH^2 + HB^2}$

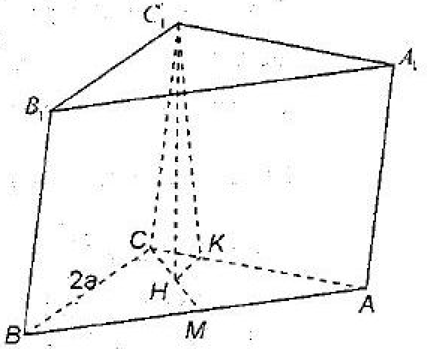
$\Rightarrow 2SH = \sqrt{SH^2 + \frac{4a^2}{3}} \Rightarrow 4SH^2 = SH^2 + \frac{4a^2}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a}{3}$

Ta có $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.BD + \frac{1}{2}BC.CD.\sin 120^0 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Vậy thể tích hình chóp là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2a}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Thí dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có M là trung điểm cạnh *AB*, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 90^0$ và $\widehat{ABC} = 60^0$, cạnh bên CC_1 tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45^0, hình chiếu vuông góc của C_1 lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CM. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACC_1A_1).

Giải:



Gọi H là trung điểm CM.

Từ giả thiết $\Rightarrow C_1H \perp (ABC)$.

$\Rightarrow \widehat{C_1CH} = (\widehat{CC_1;(ABC)}) = 45^0$.

Từ tam giác vuông ABC với BC = 2a,

$\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}$.

$AB = 4a$, $CM = \frac{1}{2}AB = 2a \Rightarrow CH = a$

$\Rightarrow C_1H = CH\tan 45^0 = a$.

Vậy thể tích lăng trụ là $V_{ABC.A_1B_1C_1} = C_1H.S_{ABC} = a.2a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3$.

Kẻ $HK \perp AC \Rightarrow$ đường xiên $C_1K \perp AC \Rightarrow (\widehat{(ABC);(ACC_1A_1)}) = \widehat{C_1KH}$.

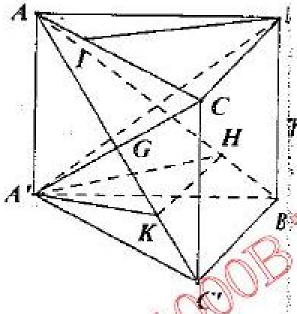
Tam giác MCA cân tại M

$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = 30^0 \Rightarrow HK = HC.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \tan(\widehat{C_1KH}) = \frac{CH}{HK} = 2 \Rightarrow (\widehat{(ABC);(ACC_1A_1)}) = \arctan 2.$

Thí dụ 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy $A'B'C'$ là tam gi vuông tại B'. Gọi *K* là hình chiếu vuông góc của điểm A' lên đường thẳ AC'. Biết góc giữa đường thẳng $A'K$ với mặt phẳng $(C'AB')$ bằng 30^0 $A'B' = a, A'C' = a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối tứ diện $KA'BC$.

Giải:



Góc $A'KH = 30^0 \Rightarrow A'K = 2A'H$

Ta có $\frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{A'K^2} - \frac{1}{5a^2}$

$\Rightarrow A'K = \frac{a\sqrt{15}}{2}, AA' = a\sqrt{15}, AC' = A'C = 2a\sqrt{5}$

$\Rightarrow OA' = a\sqrt{5}, OK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$S_{\Delta A'CK} = 2S_{\Delta OA'K} = A'K.OK = \frac{5a^2\sqrt{3}}{4}.$

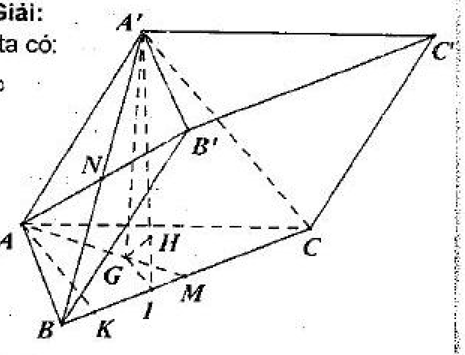
Dựng đường cao BI của tam giác ABC thì BI $\perp (CA'K)$

nên BI là đường cao của khối chóp B.A'CK và $BI = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$

Vậy thể tích khối tứ diện $KA'BC$ là: $V_{KA'BC} = V_{B.A'CK} = \frac{1}{3}.S_{\Delta A'CK}.BI = \frac{a^3.\sqrt{15}}{6}$

Thí dụ 15: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trù với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (AB bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ B' đến m phẳng (A'BC).

Giải:



Gọi M là trung điểm BC. Từ giả thiết ta có:

$BC = 2a, AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a}{3}; \widehat{A'AG} = 60^0$

$\Rightarrow A'G = AG.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích V của khối lăng trụ được tính bởi:

$V = S_{ABC}.A'G = \frac{1}{2}AB.AC.A'G$

$= \frac{1}{2}a.a\sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3$ (đvtt)

Dựng AK ⊥ BC tại *K* và GI ⊥ BC tại I ⇒ GI // AK

$\Rightarrow \frac{GI}{AK} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow CI = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3}.\frac{AB.AC}{BC} = \frac{1}{3}\frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Dựng GH ⊥ A'I tại H (1)

Do: $\left.\begin{matrix} BC \perp GI \\ BC \perp A'G \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp GH$ (2). Từ (1) và (2) ⇒ GH ⊥ (A'BC)

Mặt khác nhận thấy AB' cắt mp(A'BC) tại N là trung điểm của AB'. Từ đó:

$d[B',(A'BC)] = d[A,(A'BC)] = 3d[G,(A'BC)] = 3GH$

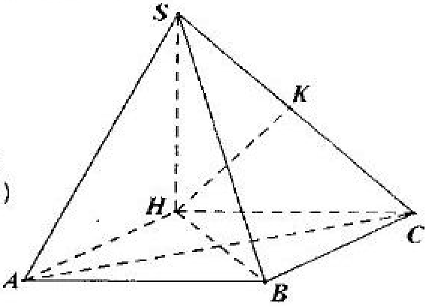
$$= 3.\frac{A'G.GI}{A'I} = \frac{3.A'G.GI}{\sqrt{A'G^2 + GI^2}} = \frac{3.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{12a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{6a}{\sqrt{51}} = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$$

hí dụ 16: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, $AB = BC = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (*SBC*) bằng $a\sqrt{2}$ và $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* theo *a* và góc giữa đường thẳng *SB* với mặt phẳng (*ABC*).

Giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của *S* trên mp(*ABC*).

Ta có:



Ta có $\left.\begin{matrix} SH \perp (ABC) \\ SA \perp AB \text{ (gt)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow HA \perp AB$.

Tương tự HC ⊥ BC

Suy ra tứ giác *HABC* là một hình vuông

Ta có: $AH // BC \subset (SBC) \Rightarrow AH // (SBC)$

$\Rightarrow d[A,(SBC)] = d[H,(SBC)] = a\sqrt{2}$

Dựng HK ⊥ SC tại *K* (1).

Do $\left.\begin{matrix} BC \perp HC \\ BC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp HK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra HK ⊥ (SBC). Từ đó $d[H,(SBC)] = HK = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow KC = \sqrt{HC^2 - HK^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$

$\tan\widehat{SCH} = \frac{HK}{KC} = \frac{SH}{HC} \Rightarrow SH = \frac{HK.HC}{KC} = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{3}}{a} = a\sqrt{6}$

Thể tích Khối chóp *S.ABC* được tính bởi:

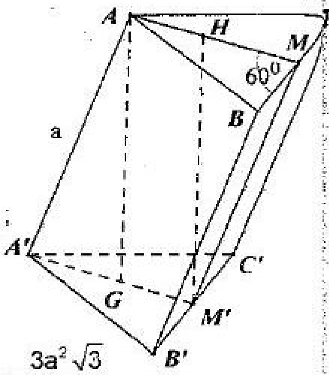
$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{6}AB.BC.SH = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt)

Góc giữa *SB* với mp(*ABC*) là góc $\widehat{SBH} = 45^0$ (do Δ*SHB* vuông cân)

Thí dụ 17: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có cạnh bên bằng a, đáy ABC là tam giác
hình chiếu của A trên (A'B'C') trùng với trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$. Mặt ph
(BB'C'C) tạo với (A'B'C') góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.

Giải:

Gọi M,M' lần lượt là trung điểm BC, B'C' $\Rightarrow$ A', G, M' thẳng hàng và AA'M'
hình bình hành. $A'M' \perp B'C'$, $AG \perp B'C'$ $\Rightarrow B'C' \perp (AA'M'M)$.



Suy ra góc giữa (BCC'B') và (A'B'C') là góc giữa A'M' và MM' bằng $\widehat{M'MA} = 60^0$.

Đặt x = AB. Ta có Δ ABC đều cạnh x có AM là đường cao.

$$\Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} = A'M', A'G = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Trong $\Delta AA'G$ vuông có $AG = AA'\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

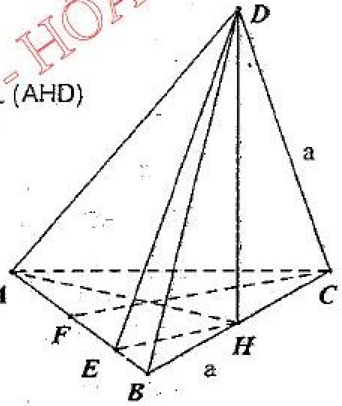
$$A'G = AA'\cos 60^0 = \frac{a}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Thể tích lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = AG.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{9a^3}{32}$.

Thí dụ 18: Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC và BCD là các tam giác đều c
a, góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính thể tích khối tứ diện AB
theo a và góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (ABC).

Giải:



Gọi H là trung điểm của BC.

Do ΔABC và ΔBCD đều cạnh a nên

$$AH = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } BC \perp (AHD) \Rightarrow (ABC) \perp (AHD)$$

Kẻ $DK \perp AH \Rightarrow DK \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ góc $\widehat{DAK} = 45^0$, $\widehat{DAH} = 45^0$

$\Rightarrow \Delta DAK$ vuông cân tại K;

ΔDAH vuông cân tại H

$\Rightarrow K \equiv H \Rightarrow DH \perp (ABC)$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ABAC\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối tứ diện ABCD là $V = \frac{1}{3}DH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow DE \perp AB$.

Vậy góc giữa 2 mp (ABD) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng DE và HE và bằng góc $\widehat{DEH}$

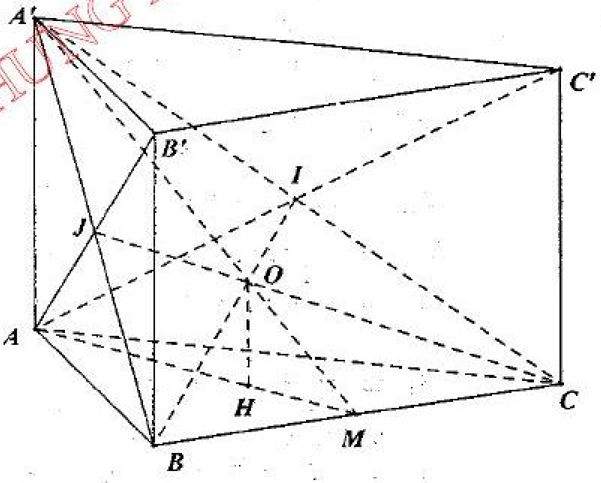
Gọi CF là đường cao xuất phát từ C của tam giác đều ABC cạnh a nên có

$$CF = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ HE = \frac{1}{2}CF = \frac{a\sqrt{3}}{4} \text{ nên } \tan\widehat{DEH} = \frac{DH}{HE} = 2 \Rightarrow \widehat{DEH} = \arctan 2$$

Vậy góc giữa hai mp(DAB) và (ABC) là góc $\widehat{DEH} = \arctan 2$

Thí dụ 19: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể tích V. Các mặt phẳng (ABC'),(AB'C),(A'BC) cắt nhau tại O. Tính thể tích khối tứ diện O.ABC theo V.

Giải:



Gọi $I = AC' \cap A'C$, $J = A'B \cap AB'$

$$\left.\begin{array}{l}(BA'C) \cap (ABC') = BI \\ (BA'C) \cap (AB'C) = CJ \\ \text{Gọi } O = BI \cap CJ\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ O là điểm cần tìm

Ta có O là trọng tâm tam giác BA'C

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC)

Do ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta BA'C$ trên (ABC) nên H là trọng tâm ΔABC

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có: $\frac{OH}{A'A} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3}OH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9}A'A.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9}V$$

Thí dụ 20: Lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm tam giác ABC. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa cạnh AA' và cạnh BC theo a, biết góc giữa mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0.

Giải:

Gọi M trung điểm BC ta có $AM \perp BC$ (1)

Mà $A'H \perp BC$ suy ra $A'M \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $((A'BC);(ABC)) = (A'M;AM) = \widehat{A'MA} = 60^0$

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ HM = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{2\sqrt{3}};\ AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60^0 = \frac{A'H}{MH} \Rightarrow A'H = \frac{a}{2}$$

Vậy thể tích của lăng trụ là

$$V_{lt} = A'H.dt(ABC) = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt)}$$

(AA'M) kẻ $MK \perp A'A$

do $BC \perp (AMA') \Rightarrow MK \perp BC$

$d(AA';BC) = MK$

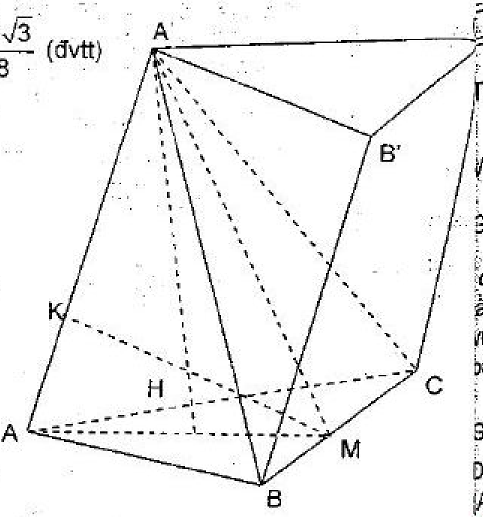
$\Delta AA'H$ đồng dạng ΔAMK

$$\Rightarrow \frac{A'H}{MK} = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow MK = \frac{A'H.AM}{AA'}$$

Do $AA' = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{7}{12}}a$

$$\Rightarrow MK = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$$

Vậy $d(AA';BC) = \frac{3a}{2\sqrt{7}}$



Thí dụ 21: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = AD = 2a. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SB tạo với m phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, m phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM

Giải:

(BCM)// AD nên mặt phẳng này cắt mp(SAD) theo giao tuyến MN // AD

Ta có : $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp BM$.

Tứ giác BCMN là hình thang vuông có BM là đường cao

Ta có $SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

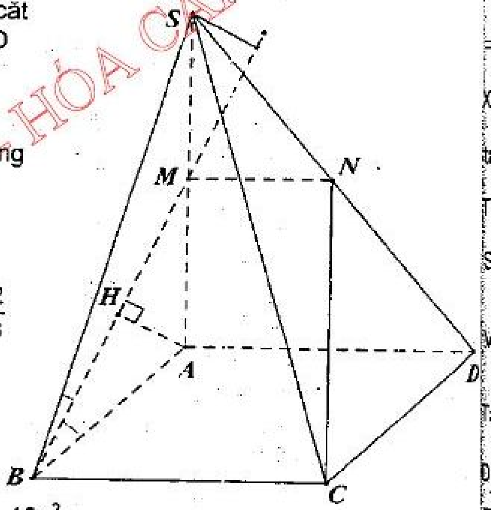
$$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

Suy ra $MN = \frac{4a}{3}$; $BM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Diện tích hình thang BCMN là :

$$S = \frac{BC + MN}{2}BM = \left(\frac{2a + \frac{4a}{3}}{2}\right)\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$$

Hạ $AH \perp BM$. Ta có $SH \perp BM$ và $BC \perp (SAB)$



$\Rightarrow BC \perp SH$. Vậy $SH \perp (BCNM)$

$\Rightarrow$ SH là đường cao của khối chóp SBCNM

Trong tam giác SBA ta có SB = 2a, $\frac{AB}{SB} = \frac{AM}{MS} = \frac{1}{2}$.

Vậy BM là phân giác của góc SBA $\Rightarrow \widehat{SBH} = 30^0 \Rightarrow SH = SB.\sin 30^0 = a$

Gọi V là thể tích chóp SBCNM ta có $V = \frac{1}{3}SH.(dtBCNM) = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$

dụ 22: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, gọi M và N ần lượt là trung điểm của AD và CD, hai mặt phẳng (SBM) và (SAN) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), biết góc giữa SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABND và khoảng cách giữa SM và AN.

Giải:

Gọi $H = AN \cap BM \Rightarrow (SAN) \cap (SBM) = SH$

Do (SAN) và (SBM) cùng vuông góc với mp (ABCD) nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có HA là hình chiếu vuông góc của SA trên mp (ABCD), suy ra góc $\widehat{SAH} = 60^0$.

Vì ABCD là hình vuông nên $AN \perp BM$ tại H

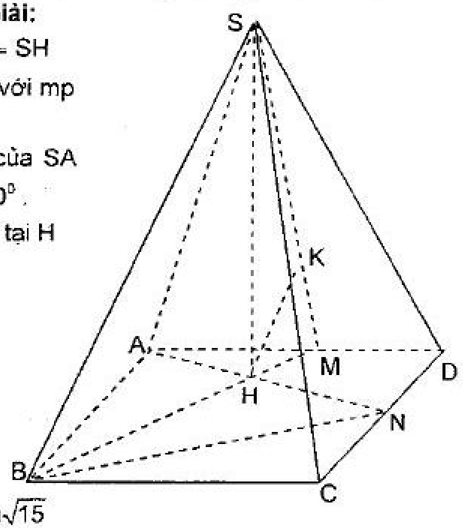
Xét tam giác ABM có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{5}{a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Xét tam giác SHA có:

$$\tan 60^0 = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$



Ta có ABND là hình thang vuông tại A và D nên diện tích của ABND là

$$S_{ABND} = \frac{1}{2}(AB + ND)AD = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)a = \frac{3a^2}{4}$$

$$V_{ABND} = \frac{1}{3}S_{ABND}.SH = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}.\frac{a\sqrt{15}}{5} = \frac{a^3\sqrt{15}}{20}$$

Ta có $\begin{cases} AN \perp SH \\ AN \perp BM \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SBM)$

Dựng $HK \perp SM \Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung của AN và SM

$\Rightarrow d(AN, SM) = HK$

Xét tam giác AHM có $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$

Xét tam giác SHM có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HM^2}+\frac{1}{HS^2}=\frac{20}{a^2}+\frac{5}{3a^2}=\frac{65}{3a^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{195}}{65}$

Vậy $d(AN,SM)=\frac{a\sqrt{195}}{65}$.

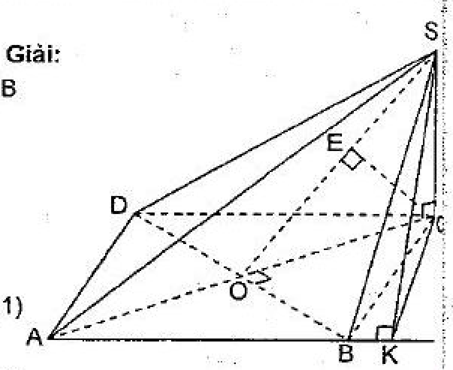
Thí dụ 23: Cho hình chóp S.ABCD có $SC\perp(ABCD)$, đáy ABCD là hình th

cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC}=120^0$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB

(ABCD) bằng 45^0. Tính theo *a* thể tích khối chóp SABCD và khoảng cá

C đến mặt phẳng (SBD).

Giải:



Kẻ $SK\perp AB\Rightarrow$ hình chiếu $CK\perp AB$

$\Rightarrow((SAB),(ABCD))=\widehat{SKC}=45^0$.

$\widehat{ABC}=120^0\Rightarrow\widehat{CBK}=60^0$

$\Rightarrow CK=CB\sin60^0=\frac{3a}{2}$

$\Rightarrow SC=CK\tan45^0=\frac{3a}{2}$. (1)

$S_{ABCD}=AB.BC\sin120^0=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SC.S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Gọi $O=AC\cap BD$. Kẻ $CE\perp SO$.

Vì $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp CE\Rightarrow CE\perp(SBD)$. (3)

Vì $SC=\frac{3a}{2}$, $OC=\frac{3a}{2}$ nên ΔSCO vuông cân tại C

$\Rightarrow CE=SC.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $d(C,(SBD))=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Thí dụ 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A v

mặt phẳng (SCD) hợp với mặt phẳng (ABCD) một góc φ sao cho $\cos\varphi=$

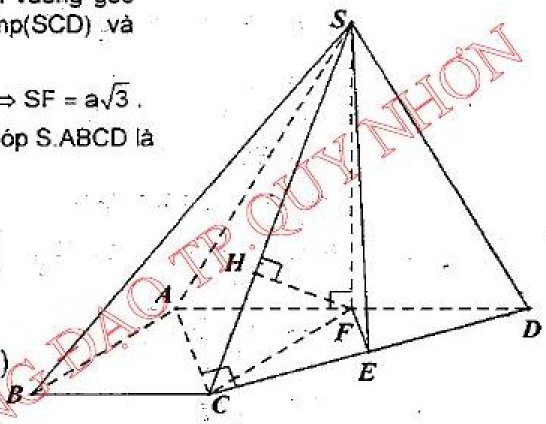
Biết rằng SA = SC = SD, AB = BC = a, AD = 2a.

a. Tính thể tích của khối chóp theo a

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD theo a.

Giải:

a. Gọi F là trung điểm của AD ta có FA = FD = FC, do đó tam giác ACD vuông C, có tâm đường tròn ngoại tiếp là F. Vì SA = SD = SC nên SF là đường của hình chóp S.ABCD.



Dễ thấy SE và EF đồng thời vuông góc với CD, do đó góc giữa mp(SCD) và mp(ABCD) là góc SEF = φ

Từ giả thiết ta có $\tan\varphi=\sqrt{6}\Rightarrow SF=a\sqrt{3}$.

Như vậy ta có thể tích khối chóp S.ABCD là

$V=\frac{1}{3}SF.AB.\frac{AD+BC}{2}$

$=\frac{1}{3}a^2\sqrt{3}.\frac{3a}{2}=a^3\frac{\sqrt{3}}{2}$ (đvtt)

b. Do AD//BC

nên $d(SC,AD)=d((SCB),AD)$

$=d(F,(SBC))$

Kẻ FH vuông góc với SC ta có

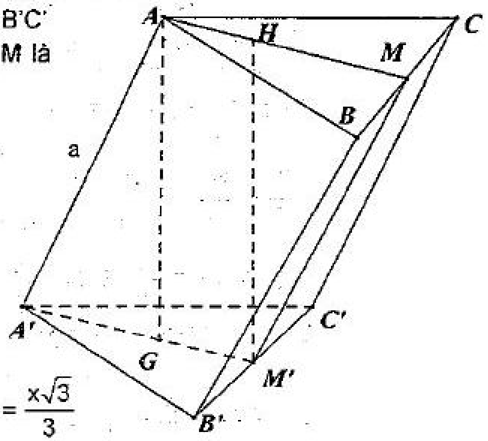
$\left.\begin{matrix}BC\perp CF\\BC\perp SF\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SCF)\Rightarrow BC\perp FH$

Mà $FH\perp SC$ nên $FH\perp(SBC)\Rightarrow d(AD,(SBC))=FH$

Tính $\frac{1}{FH^2}=\frac{1}{FS^2}+\frac{1}{FC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow FH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thí dụ 25: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu của A trên (A'B'C') trùng với trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$ và $AG=\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Mặt phẳng (BB'C'C) tạo với (A'B'C') góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.

Giải:



Gọi M,M' lần lượt là trung điểm BC,B'C'

$\Rightarrow$ A', G', M' thẳng hàng và AA'M'M là hình bình hành.

$A'M'\perp B'C'$, $AG\perp B'C'$

$\Rightarrow B'C'\perp(AA'M'M)$

$\Rightarrow$ góc giữa (BCC'B') và (A'B'C') là góc giữa A'M' và MM' bằng $\widehat{M'MA}=60^0$.

Đặt x = AB

ΔABC đều cạnh x có AM là đường cao

$\Rightarrow AM=\frac{x\sqrt{3}}{2}=A'M', A'G=\frac{2}{3}AM=\frac{x\sqrt{3}}{3}$

Trong $\Delta AA'G$ vuông có $AG=A'G\tan60^0=x$;

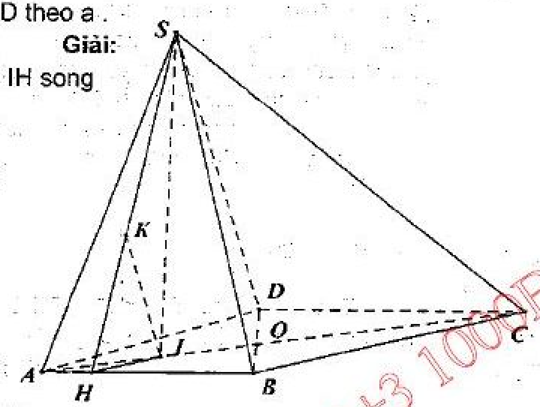
$\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=AG.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}=\frac{9a^3}{32}$ (đvtt)

Thí dụ 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và AB = 4a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm I của đoạn thẳng OA. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}SI$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Giải:



Trong mp(ABCD) từ điểm I kẻ IH song song BC với H thuộc AB.

Do $BC\perp AB$

$\Rightarrow IH\perp AB$ Mà $SI\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SI\perp AB$.

Hay $AB\perp(SHI)$.

Từ I trong mặt phẳng (SHI) kẻ $IK\perp SH$ tại K.

$\Rightarrow IK=d(I;(SAB))=\frac{\sqrt{2}}{2}SI$ (1)

Ta có $\frac{IH}{BC}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}\Rightarrow IH=\frac{BC}{4}=a$

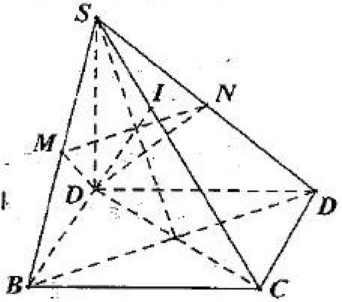
Mà $\frac{1}{IS^2}+\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IK^2}$ (2) (Do tam giác SIH vuông tại I đường cao IK)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{2}{SI^2}-\frac{1}{SI^2}=\frac{1}{IH^2}\Rightarrow SI=IH=a$

Lại có thể tích khối chóp S.ABCD là $V=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SI.AB^2=\frac{16a^3}{3}$ (đvtt)

Thí dụ 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD; I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN). Chứng minh SC vuông góc với AI và tính thể tích khối chóp MBAI.

Giải:



Chứng minh $SC\perp AI$: Ta có

$\begin{cases}AM\perp SB\\AM\perp BC\end{cases}\Rightarrow AM\perp SC;$

$\begin{cases}AN\perp SD\\AN\perp CD\end{cases}\Rightarrow AN\perp SC\Rightarrow SC\perp(AMN)\Rightarrow SC\perp AI$

Kẻ IH // BC $\Rightarrow IH\perp(SAB)$ (vì $BC\perp(SAB)$)

$\Rightarrow V_{MBAI}=\frac{1}{3}S_{\Delta MAB}.IH$

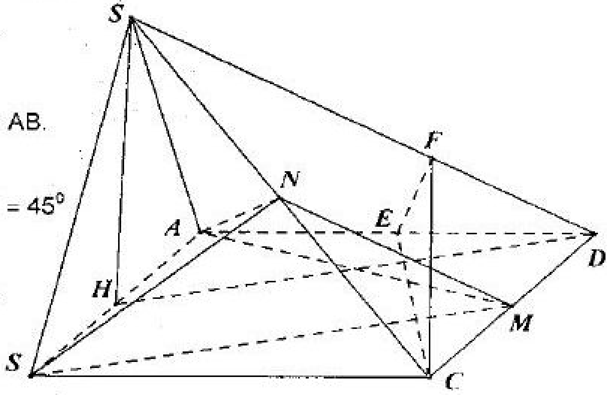
$SI.SC=SA^2\Rightarrow SI=\frac{SA^2}{SC}=\frac{a^2}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{3a^2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

$\frac{SI}{SC}=\frac{IH}{BC}\Rightarrow IH=\frac{SI.BC}{SC}=\frac{a}{3}$

$S_{\Delta MAB}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow V_{MBAI}=\frac{1}{3}S_{\Delta MAB}.IH=\frac{a^3}{36}$ (đvtt)

Thí dụ 28: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S; mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD); góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) bằng 45^0. Gọi M, N, E là trung điểm của các cạnh CD, SC và AD. Gọi F là hình chiếu của E lên cạnh SD. Tính thể tích hình chóp S.ABCD và chứng minh rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (CEF).

Giải:



Gọi H là hình chiếu của S lên AB.

Vì $(SAB)\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

mà ΔSAB cân tại S

nên H là trung điểm của AB.

Vì $SH\perp(ABCD)$

$\Rightarrow\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)=\widehat{SDH}=45^0$

Ta có

$DH^2=AD^2+AH^2=\frac{5}{4}a^2$

$\Rightarrow SH=DH=\frac{\sqrt{5}}{2}a$

Vậy $V_{SABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{5}}{6}a^3$

Vì $\Delta CDE=\Delta DAH$ suy ra $\widehat{ADH}=\widehat{ECD}\Rightarrow CE\perp DH$

Mà $SH\perp CE\Rightarrow CE\perp(SDH)\Rightarrow CE\perp SD$ mà $EF\perp SD\Rightarrow SD\perp(CEF)$

Mặt khác ta có SD//MN nên SD//(AMN)

Suy ra $(AMN)\perp(CEF)$.

Thí dụ 29: Cho hình chóp S.ABC có diện tích ba mặt bên SAB, SBC, SCA bằng nhau và SA = SB = SC = a. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với (ABC). Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC.

Giải:

Ta có $(SAB)\perp(ABC)$, $(SAB)\cap(ABC)=AB$

Hạ $SH\perp AB$ tại H $\Rightarrow SH\perp(ABC)$ tại H

$\Delta SAH=\Delta SBH=\Delta SCH\Rightarrow HA=HB=HC\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C

$S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SAC}$

$\sin\widehat{ASB} = \sin\widehat{BSC} = \sin\widehat{CSA}$

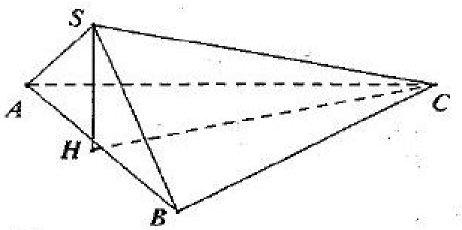
$\Rightarrow \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 180^0 - \widehat{ASB}$

$\Rightarrow \Delta SBC = \Delta SCA \Rightarrow CB = CA$

$\Rightarrow$ tam giác ABC cân tại C

Đặt $BC = x \Rightarrow AB = x\sqrt{2}$

Ta có $\cos\widehat{ASB} = -\cos\widehat{BSC}$



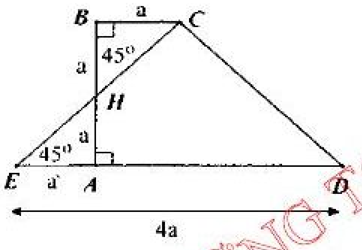
Áp dụng định lí hàm số cosin vào hai tam giác SAB và SBC ta được $x = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

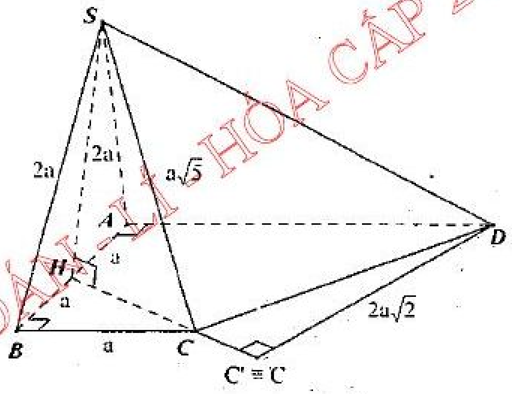
Xét tam giác SAH: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Thể tích khối chóp là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.\dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{2a^3}{9\sqrt{3}}$.

Thí dụ 30: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B với BC là đáy nhỏ. Biết rằng tam giác SAB là tam giác đều có cạnh với độ dài bằng 2a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SC = a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D tới mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$ (ở đây H là trung điểm AB). Hãy tính thể tích khối chóp theo a.

Giải:





Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Theo định lý Pitago ta có $CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó tam giác HBC vuông cân tại B và BC = a

Gọi $E = HC \cap AD$ thế thì tam giác HAE cũng vuông cân và do đó

Suy ra $CE = 2a\sqrt{2} = d(D;HC) = d(D;(SHC))$

Suy ra $DE = 2a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4a \Rightarrow AD = 3a$.

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC + DA)\cdot AB = 4a^2$ (đvdt).

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD} = \dfrac{4a^3}{\sqrt{3}}$ (đvtt).

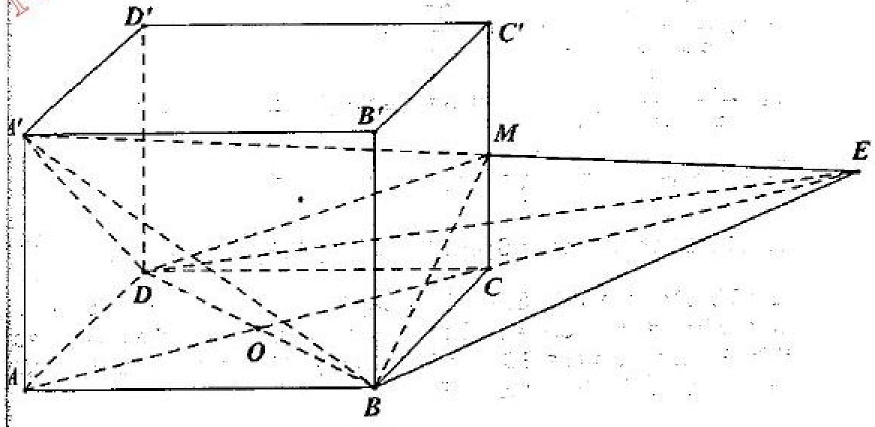
ạng 2: Sử dụng phép phân chia khối đa diện để tính diện tích và thể tích (phương pháp gián tiếp)

Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành các khối đa diện (H_1) và (H_2) thì thể tích của (H) bằng tổng thể tích của (H_1) và (H_2). Và trong nhiều trường hợp việc sử dụng các phép phân chia các khối đa diện sẽ giúp cho chúng ta phương pháp tính thể tích của các khối đa diện, đặc biệt là các khối đa diện không phải khối cơ bản. Phương pháp này chỉ nên dùng khi việc sử dụng công thức tính thể tích trực tiếp gặp nhiều khó khăn trong khi tính thể tích các hình liên quan đơn giản.

Í DỤ MINH HỌA

í dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao AA' = b. Gọi M là trung điểm cạnh CC'. Tính thể tích tứ diện BDA'M.

Giải:



Trong mặt phẳng (AA'C'C) gọi E là giao điểm của AC và A'M. Gọi O là tâm của đáy ABCD.

Ta có: Vì M là trung điểm của CC' nên ta có: $CE = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OE = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

Do ABCD là hình vuông nên $OE \perp BD$.

Do đó: $S_{\Delta BDE} = \dfrac{1}{2}BD.OE = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\dfrac{3a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

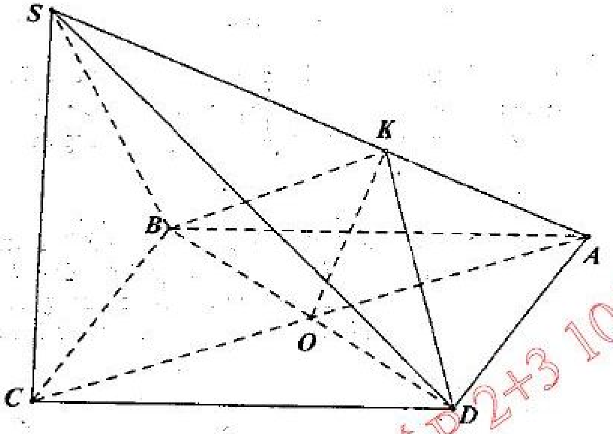
WWW.DAYKEMQUYNHON.UCOZ.COM WWW.FACEBOOK.COM/DAYKEM.QUYNHON

Ta có: $V_{A'.BMD} = V_{A'.BED} - V_{M.BED} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta BDE} - \frac{1}{3}MC.S_{\Delta BDE}$

$$= \frac{1}{3}\left(b - \frac{b}{2}\right).S_{\Delta BDE} = \frac{a^2b}{4} \text{ (đvtt)}$$

Thí dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng $\widehat{BAD} = 60^0$. Cạnh SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SC = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ $OK \perp SA$, $(K \in SA)$. Tính thể tích khối đa diện SCBDK.

Giải:



Ta có: $S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SC.S_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

và $V_{SCBKD} = V_{S.ABCD} - V_{A.BKD}$

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$ mà $OK \perp SA \Rightarrow SA \perp (BKD)$

nên AK là đường cao của hình chóp A.BKD

Mặt khác: $\Delta SCA \sim \Delta OKA$ (gg) $\Rightarrow \frac{OK}{OA} = \frac{SC}{SA} \Rightarrow OK = \frac{OA.SC}{SA} = \frac{OA.SC}{\sqrt{SC^2 + AC^2}} =$

vì $AC = 2OA = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Mà $\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ OK \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow OK \perp BD \Rightarrow S_{BKD} = \frac{1}{2}OK.BD = \frac{a^2}{4}$

Ta lại có : $\frac{SC}{OK} = \frac{AC}{AK} \Rightarrow AK = \frac{AC.OK}{SC} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ vì $\Delta SCA \sim \Delta OKA$

Suy ra $V_{ABKD} = \frac{1}{3}AK.S_{BKD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$

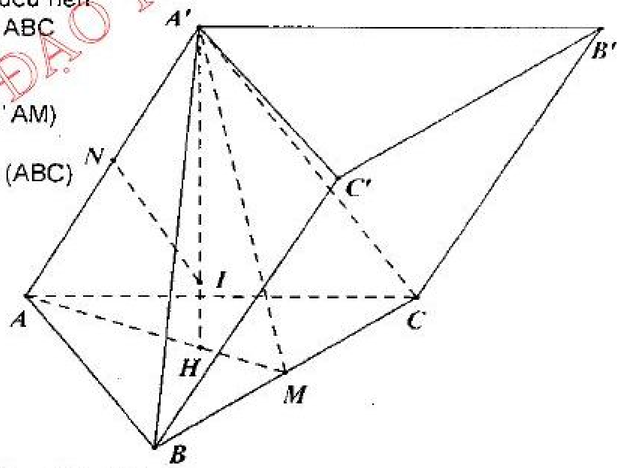
Vậy thể tích khối đa diện là

$$V_{SCBKD} = V_{S.ABCD} - V_{A.BKD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4} - \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{5\sqrt{2}a^3}{24} \text{ (đvtt)}$$

Thí dụ 3: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' với A'.ABC là hình chóp tam giác đều nội tiếp trong mặt cầu bán kính R . Góc giữa mặt phẳng (A'BC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0 . Tính thể tích khối chóp A'.BB'C'C theo R

Giải:

Gọi cạnh đáy lăng trụ là a. H là hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC).



Vì A'ABC là hình chóp đều nên

H là trọng tâm tam giác ABC

M là trung điểm của BC

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp A'H \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Vậy góc giữa (A'BC) và (ABC)

là $\widehat{AMH} = 60^0$

Ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$A'H = HM.\tan 60^0 = \frac{a}{2}$

$AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi V là thể tích khối chóp A'BCC'B' . V_{lt} là thể tích khối lăng trụ. V_{ch} là thể tích khối chóp A.ABC

$$V = V_{lt} - V_{ch} = V_{lt} - \frac{1}{3}V_{lt} = \frac{2}{3}V_{lt} = \frac{2}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Trong mặt phẳng (A'AM) kẻ trung trực AA' cắt A'H tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp A'ABC

Tam giác A'NI đồng dạng tam giác A'HA

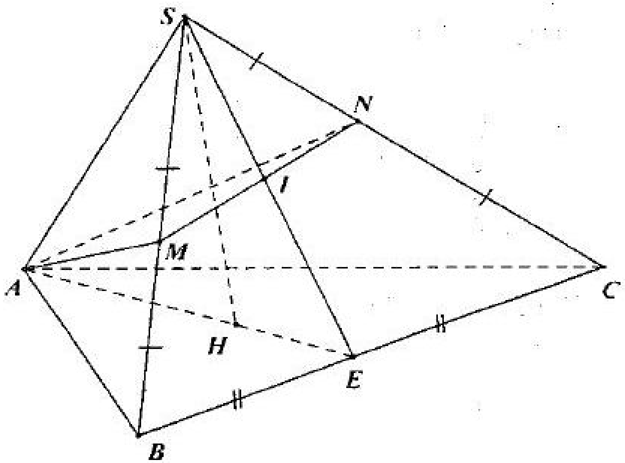
nên $\frac{A'N}{A'I} = \frac{A'H}{A'A} \Leftrightarrow A'I.A'H = A'N.A'A$

$$R\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\frac{7a^2}{12} \Leftrightarrow a = \frac{12}{7}R$$

Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} = \left(\frac{12R}{7}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{144\sqrt{3}R^3}{343}$ (đvtt).

Thí dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, cạnh đáy bằng a; M và N lần lượt l trung điểm của SB và SC. Biết rằng (AMN) ⊥ (SBC). Tính thể tích khối chó S.AMN.

Giải:



Theo giả thiết S.ABC hình chóp Δ đều nên SH ⊥ (ABC)

⇒ H là tâm Δ đều ABC

Gọi E là trung điểm của BC

Δ SBC cân ⇒ SE ⊥ BC ⇒ SE ⊥ MN (vì MN // BC) ⇒ (AMN) ⊥ (SBC)

⇒ SE ⊥ (AMN) ⊃ AI ⇒ SE ⊥ AI ⇒ Δ ASE cân tại A

Gọi I trung điểm của MN

$$\Rightarrow SA = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ S_{(ABC)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$AH = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Thể tích hình chóp S.ABC là $V = V_{(SABC)} = \frac{1}{3}S_{(ABC)}.SH = \frac{\sqrt{5}}{24}a^3$ (đvtt)

Vậy thể tích hình chóp S.AMN là $V_{(SAMN)} = \frac{1}{4}V = \frac{\sqrt{5}}{96}a^3$ (đvtt)

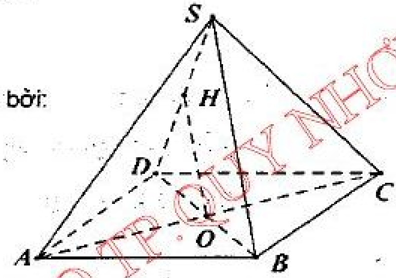
Thí dụ 5: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh bằng SA = SB = a, SD = $a\sqrt{2}$ và mặt phẳng (*SBD*) vuông góc với mặt phẳn (*ABCD*). Tính theo *a* thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa ha đường thẳng *AC* và *SD*.

Giải:

Theo giả thiết (*ABCD*) ⊥ (*SBD*) theo giao tuyến *BD*.

Do đó nếu dựng *AO* ⊥ (*SBD*) thì *O* ∈ *BD*.

Mặt khác *AS* = *AB* = *AD* ⇒ *OS* = *OB* = *OD* hay ΔSBD là tam giác vuông tại S.



đó: $BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

$O = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$

y ra thể tích khối chóp *S.ABD* được tính bởi:

$$_{S\,ABD} = V_{A\,SBD} = \frac{1}{3}S_{SBD}.AO = \frac{1}{6}SB.SD.AO$$

$$= \frac{1}{6}a.a\sqrt{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$V_{S\,ABCD} = 2V_{S\,ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt).

ong ΔSBD dựng *OH* ⊥ *SD* tại *H* (1) ⇒ *H* là trung điểm của *SD*.

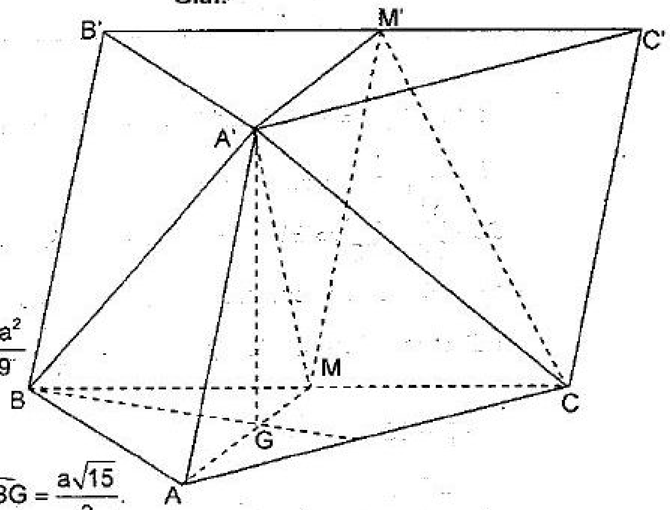
heo chứng minh trên *AO* ⊥ (SBD) ⇒ *AO* ⊥ *OH* (2)

) và (2) chứng tỏ *OH* là đoạn vuông góc chung của *AC* và *SD*

ấy $d(AC, BD) = OH = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$

dụ 6: Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A*, *B* = *a*. Gọi *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*. Biết rằng *A'G* vuông góc với mặt ấy (*ABC*) và *A'B* tạo với mặt đáy một góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp *BCC'B'* và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AG* và *A'C* theo *a*.

Giải:



heo giả thiết ta có

$\widehat{'BG} = 60^\circ$.

ọi *M*, *M'* lần lượt trung điểm của C và *B'C'*.

ong tam giác BC ta có

$G^2 = BM^2 + GM^2$

$= \frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{36} = \frac{5a^2}{9}$

$BG = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

$A'G = BG.\tan\widehat{A'BG} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

ừ đó

$$_{A'BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'\,ABC}$$

$$= A'G.S_{ABC} - \frac{1}{3}.A'G.S_{ABC} = \frac{2}{3}.A'G.\frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^3\sqrt{15}}{9}.$$

Ta có $d(AG,A'C)=d(AG,(A'CM'))=d(A,(A'CM'))=\frac{3V_{A.A'CM'}}{S_{A'CM'}}$

Ta có $V_{A.A'CM'}=V_{M'.ACA'}=V_{M.ACA'}=V_{A'.ACM}=\frac{1}{3}A'G.S_{AMC}=\frac{a^3\sqrt{15}}{36}$

Ta có $A'M'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $A'C=\sqrt{A'G^2+GC^2}=\frac{2a\sqrt{5}}{3}$

Ta có $BC\perp AM, BC\perp A'G\Rightarrow BC\perp(AA'M)\Rightarrow BC\perp AA'\Rightarrow BC\perp CC$

Do đó $CM'=\sqrt{CC'^2+C'M'^2}=\sqrt{AA'^2+CM^2}=\sqrt{\frac{17a^2}{9}+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{86}}{6}$.

Từ đó

$\cos\widehat{CA'M'}=\frac{A'C^2+A'M'^2-CM'^2}{2.A'C.A'M'}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\Rightarrow\sin\widehat{CA'M'}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{CA'M'}}$

$\Rightarrow S_{CA'M'}=\frac{1}{2}.A'C.A'M'.\sin\widehat{CA'M'}=\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$.

Vậy $d(AG,A'C)=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{15}}{36}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{12}}=a\sqrt{\frac{15}{39}}=\frac{a\sqrt{65}}{13}$.

Chú ý: Có thể tính $d(AG,A'C)$ bằng cách dựng hình bình hành CMGN, sa

$GH\perp A'N$ và chứng minh $GH\perp(A'NC)$. Từ đó $d(AG,A'C)=GH=\frac{a\sqrt{}}{1}$

Thí dụ 7: Cho hình thoi *ABCD* cạnh *a*, góc $\widehat{BAD}=60^0$. Gọi *G* là trọng tâ

giác *ABD*, $SG\perp(ABCD)$ và $SG=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi *M* là trung điểm *CD*.

1. Tính thể tích khối chóp *S.ABMD* theo *a*.
2. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng *AB* và *SM* theo *a*.

Giải:

1. Nhận thấy: *SG* là chiều cao của khối chóp *S.ABMD*, $SG=\frac{a\sqrt{6}}{3}$; Do A

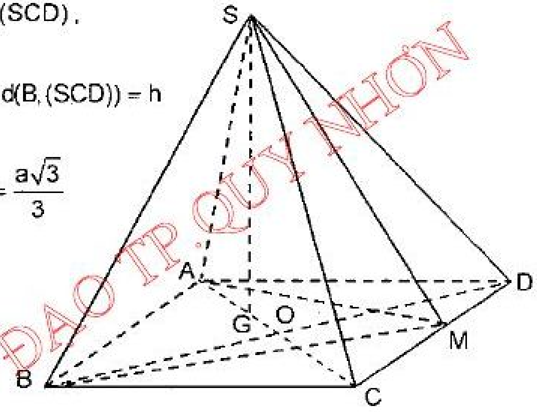
hình thoi cạnh *a*, $\widehat{BAD}=60^0\Rightarrow\Delta ABD$ và ΔBCD là các tam giác đều cạ
là trung điểm *CD*

$\Rightarrow S_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

$\Rightarrow S_{ABMD}=S_{ABCD}-S_{\Delta BCM}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}-\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

$\Rightarrow V_{S.ABMD}=\frac{1}{3}SG.S_{ABMD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Vậy $V_{S.ABMD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$



ận thấy: $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)$,

à $SM\subset(SCD)$

$d(AB,SM)=d(AB,(SCD))=d(B,(SCD))=h$

i có

$G=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}AC=\frac{1}{3}AC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$GC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$SC^2=SG^2+GC^2$

$=\frac{6a^2}{9}+\frac{12a^2}{9}=2a^2$

ặt khác $GD=GA=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SD^2=SG^2+GD^2=\frac{6a^2}{9}+\frac{3a^2}{9}=a^2$

$\cos\widehat{SCD}=\frac{SC^2+CD^2-SD^2}{2.SC.CD}=\frac{2a^2+a^2-a^2}{2.a\sqrt{2}.a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{SCD}=45^0$

$S_{\Delta SCM}=\frac{1}{2}SC.CM.\sin 45^0=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a^2}{4}$

$V_{S.BCM}=V_{B.SCM}=\frac{1}{3}.h.S_{\Delta SCM}$ nên $h=\frac{3V_{B.SCM}}{S_{\Delta SCM}}$

à $V_{B.SCM}=V_{S.BCM}=V_{S.ABCD}-V_{S.ABMD}$

$=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}-\frac{a^3\sqrt{2}}{8}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}-\frac{a^3\sqrt{2}}{8}=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

$h=\frac{3.a^3\sqrt{2}}{24}:\frac{a^2}{4}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB,SM)=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

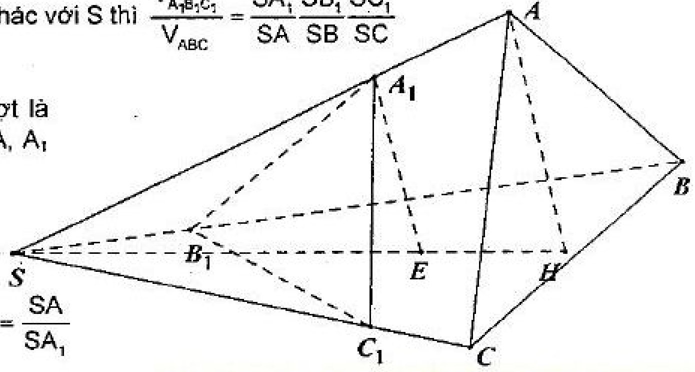
Dạng 3: Dựa vào tỉ số thể tích để tính thể tích

bán: Cho hình chóp SABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lấy lần lượt ba

ểm A_1, B_1, C_1 khác với S thì $\frac{V_{A_1B_1C_1}}{V_{ABC}}=\frac{SA_1}{SA}\frac{SB_1}{SB}\frac{SC_1}{SC}$

ng minh:

ọi H, E lần lượt là
ình chiếu của A, A_1
ên mp (SBC)
$AH//A_1E$
ên ΔSAH và
SA_1E
ồng dạng $\frac{AH}{A_1E}=\frac{SA}{SA_1}$



Khi đó $V_{SABC} = \frac{1}{3}AH.S_{SBC} = \frac{1}{3}AH.SB.SC.\sin\widehat{BSC}$.

$V_{SA_1B_1C_1} = \frac{1}{3}A_1E.S_{SB_1C_1} = \frac{1}{3}A_1E.SB_1.SC_1.\sin\widehat{BSC}$.

Do vậy $\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{3}AH.SB.SC.\sin BSC}{\frac{1}{3}A_1E.SB_1.SC_1.\sin BSC} = \frac{AH}{A_1E}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}$

Nên $\frac{V_{A_1B_1C_1}}{V_{ABC}} = \frac{SA_1}{SA}\frac{SB_1}{SB}\frac{SC_1}{SC}$

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $AA' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Hình chiếu của A' trên đáy ABCD trùng với trọng tâm giác ABC. Lấy điểm I trên đoạn B'D và điểm J trên đoạn AC $IJ // BC'$. Tính theo a thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối IBB'C'

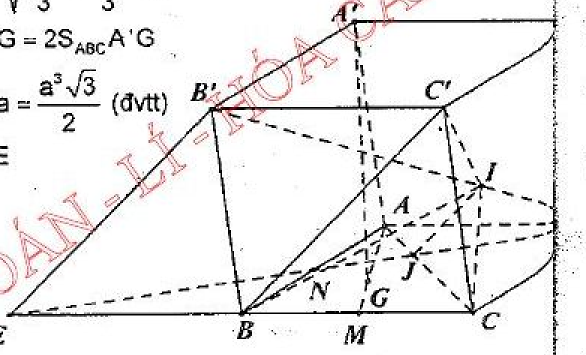
Giải:

ΔABC đều cạnh a nên $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = a$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}A'G = 2S_{ABC}A'G$

$= 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt)



Kéo dài DJ cắt BC tại E

nên $IJ // EB' // BC'$

$\Rightarrow$ B là trung điểm EC

$\frac{IB'}{DB'} = \frac{JE}{DE} = \frac{JC}{AC} = \frac{2}{3}$

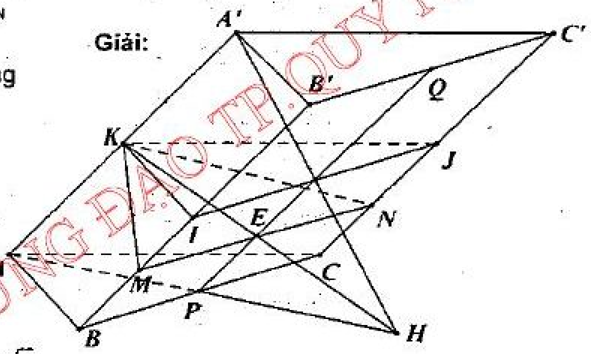
$\frac{V_{IBB'C'}}{V_{DBB'C'}} = \frac{V_{B'.IBC'}}{V_{B'.DBC'}} = \frac{B'I}{B'D} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow V_{IBB'C'} = \frac{2}{3}V_{DBB'C'} = \frac{2}{3}\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Thí dụ 2: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh bên hợp với đáy một góc là 45^0. Gọi P là trung điểm BC, chân đường góc hạ từ A' xuống (ABC) là H sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Gọi K là trung điểm AA', (α) là mặt phẳng chứa HK và song song với BC cắt BB' và CC' tại M, N.

Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{ABCKMN}}{V_{A'B'C'KMN}}$.

Giải:



Gọi Q, I, J lần lượt là trung điểm B'C', BB', CC' ta có:

$AP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = a\sqrt{3}$

Vì $\Delta AHA'$ vuông cân tại H.

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{ABCA'B'C'} = S_{ABC}.A'H$

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)

$\Rightarrow V_{ABCA'B'C'} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$ (đvtt)

$\Rightarrow V_{A'B'C'KIJ} = V_{ABCKIJ} = \frac{1}{2}V_{ABCA'B'C'} = \frac{3a^3}{8}$ (đvtt)

Vì $\Delta AHA'$ vuông cân $\Rightarrow HK \perp AA' \Rightarrow HK \perp (BB'C'C)$

Gọi $E = MN \cap KH \Rightarrow BM = PE = CN$ và KE là đường cao của hình chóp KMNJI

Mà $AA' = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = PE = CN = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Ta có thể tích K.MNJI là: $V = \frac{1}{3}S_{MNJI}.KE$ với $KE = \frac{1}{2}KH = \frac{1}{4}AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

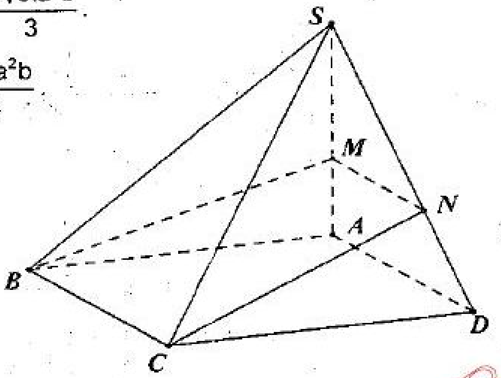
$S_{MNJI} = MN.MI = a.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ (dvdt) $\Rightarrow V_{KMNJI} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{6}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3}{8}$ (dvtt)

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCKMN}}{V_{A'B'C'KMN}} = \frac{V_{ABCKIJ} - V_{KMNIJ}}{V_{A'B'C'KIJ} + V_{KMNIJ}} = \frac{\frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{8}}{\frac{3a^2}{8} + \frac{a^3}{8}} = \frac{1}{2}$$

Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành có cạnh AB = a, cạnh AD = b, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Cạnh SA = 4a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD).Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho AM = x $(0 < x < 4a)$. Mặt phẳng (MBC) cắt cạnh SD tại N. Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp S.ABCD ra thành hai phần sao cho thể tích của khối SBCNM bằng $\frac{5}{4}$ thể tích của khối BCNMAD.

Giải:

Ta có (MBC) $\cap$ (SAD) = MN (Do AD // BC) (N $\in$ SD)



$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}AB.AD.\sin 60^0.SA = \frac{2\sqrt{3}.a^2b}{3}$.

$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}.V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}.a^2b}{3}$.

$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{4a-x}{4a}$

$V_{SMBC} = \frac{\sqrt{3}ab(4a-x)}{12}$

$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SC}{SC} = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2$

$V_{SMNC} = \frac{b\sqrt{3}.(4a-x)^2}{48}$

$V_{S.BCNM} = V_{SMBC} + V_{SMNC} = \frac{b\sqrt{3}(4a-x)(8a-x)}{48}$

$V_{BCNMAB} = \frac{b\sqrt{3}x(12a-x)}{48}$

Theo giả thiết $V_{S.BCNM} = \frac{5}{4}V_{BCNMAB} \Leftrightarrow 9x^2 - 108ax + 128a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{3}$

hoặc $x = \frac{32a}{3}$ (loại)

Vậy $x = \frac{4a}{3}$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 4: Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật với *SA* vuông góc với đáy, *G* là trọng tâm tam giác *SAC*, mặt phẳng *(ABG)* cắt *SC* tại *M*, cắt *SD* tại *N*. Tính thể tích của khối đa diện *MNABCD* biết *SA = AB = a* và góc hợp bởi đường thẳng *AN* và mặt phẳng (ABCD) bằng 30°.

Giải:

Trong mp(SAC) kẻ AG cắt SC tại M, trong mp(SBD) kẻ BG cắt SD tại N.

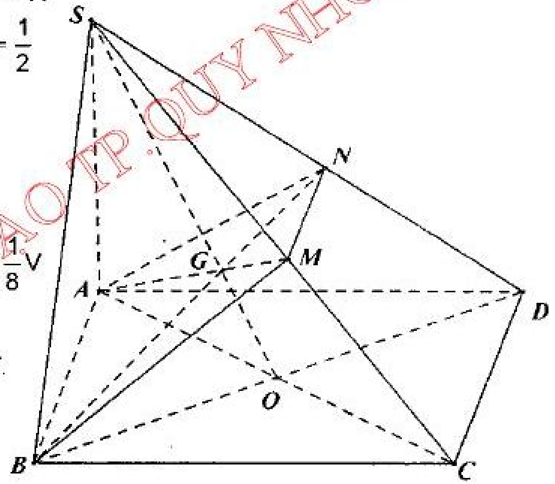
Vì *G* là trọng tâm tam giác *ABC* nên dễ có

$\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$ suy ra *G* cũng là trọng tâm tam giác *SBD*.

Từ đó suy ra *M, N* lần lượt là trung điểm của *SC, SD*.

Dễ có: $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V$.

Theo công thức tỷ số thể tích ta có:



$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SN}{SD} = 1.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{4}V$

$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}$

$= 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{8}V$

Từ đó suy ra:

$V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BMN} = \frac{3}{8}V$.

Ta có: $V = \frac{1}{3}SA.dt(ABCD)$;

mà theo giả thiết

SA $\perp$ (ABCD) nên góc hợp bởi *AN* với *mp(ABCD)* chính là góc $\widehat{NAD}$, lại có *N* là trung điểm của *SC* nên tam giác *NAD* cân tại *N*, suy ra $\widehat{NAD} = \widehat{NDA} = 30^0$.

Suy ra: $AD = \frac{SA}{\tan 30^0} = a\sqrt{3}$.

Suy ra: $V = \frac{1}{3}SA.dt(ABCD) = \frac{1}{3}a.a.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Suy ra thể tích cần tìm là:

$$V_{MNABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMN} = V - \frac{3}{8}V = \frac{5}{8}V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24} \text{ (đvtt)}$$

Thí dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD = $a\sqrt{3}$, SA = 2a và SA $\perp$ ABCD, Một mp đi qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, I, K. Hãy tính thể tích khối chóp S.AHIK theo a.

Giải:

Cách 1:

Ta có $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$

Nên $\Delta SAC \perp$ cân tại A mà AI $\perp$ SC nên I là trung điểm SC

$AI = SI = \frac{1}{2}SC = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a.\sqrt{2}$

$BC \perp AB, BC \perp SA(SA \perp mp(ABCD)) \Rightarrow BC \perp mp(SAB)$

Mà AH $\perp$ SC cho nên ABC

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \frac{SA.BA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Trong tam giác vuông HAI có

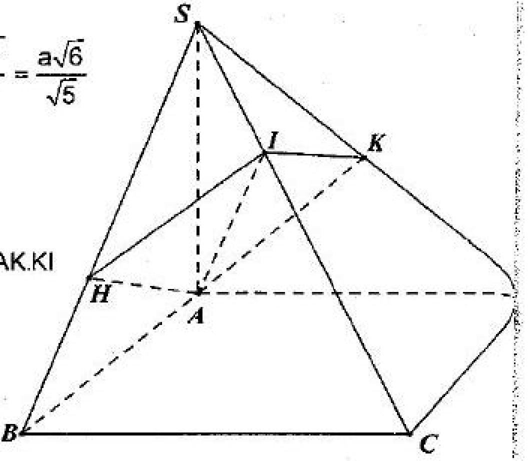
$$HI = \sqrt{AI^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

Tương tự ta có $AK = \frac{a\sqrt{14}}{7}$

$$V_{SAHIK} = V_{SIHA} + V_{SIKA}$$

$$= \frac{1}{3}.SI.\frac{1}{2}.AH.HI + \frac{1}{3}.SI.\frac{1}{2}AK.KI$$

$$= \frac{1}{6}SI.(AH.HI + AK.KI)$$



$$\Rightarrow V_{SAHIK} = \frac{1}{6}.a\sqrt{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\frac{a\sqrt{14}}{7}\right) = \frac{8a^3.\sqrt{3}}{35}$$

Cách 2:

Tương tự như các 1 ta chỉ lập luận $AH \perp SB, AK \perp SD$

$$V_{SAHI} = \frac{SH.SI}{SB.SC.}.V_{SABC} = \frac{1}{2}.\frac{SA^2}{SB^2}.V_{SABC} = \frac{1}{2}.\frac{4a^2}{5a^2}.\frac{1}{3}.2a.a.\sqrt{3} = \frac{4a^3.\sqrt{3}}{35}$$

Tương tự $V_{SAIK} = \frac{4a^3.\sqrt{3}}{35}$. Do đó $V_{SAHIK} = \frac{8a^3.\sqrt{3}}{35}$

Thí dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc đáy và SA = 2a

a. Gọi M là trung điểm SB, V_1 là thể tích tứ diện SAMC, V_2 là thể tích tứ ACD. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD

Giải:

Ta có: $\frac{V_{S.AMC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$. Gọi H là trung điểm AB . SA ⊥ (ABCD) nên MH ⊥ (ABC

và $MH = \frac{1}{2}SA$. $V_{M.ACD} = V_{M.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC}$. Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

b. Gọi E là điểm đối xứng của B qua A.

Ta có AEDC là hình bình hành và góc EAC bằng 135^0, CD = a và $AC = a\sqrt{2}$.

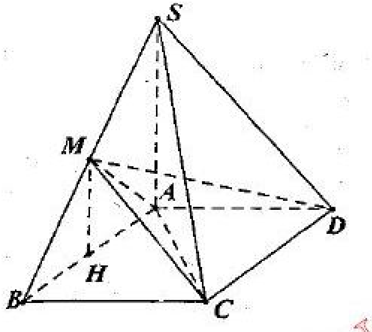
AC // ED nên AC // (SDE) ⊃ SD nên d(AC,SD) = d(AC,(SDE)) = d(A,(SDE)).

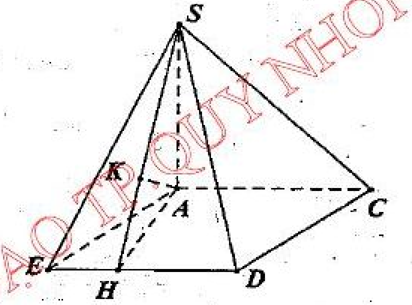
Kẻ AH ⊥ ED (H∈ ED) ⇒ ED⊥(SAH) ⇒ (SED)⊥(SAH). Kẻ AK⊥ SH

⇒ AK ⊥ (SDE) vậy AK = d(AC,SD) .

Trong tam giác SAH có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2}$

Vậy: $AK = d(AC,SD) = \frac{2a}{\sqrt{3}}$





Dạng 4: Thể tích liên quan tới max – min

Để tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của một đại lượng hình học (độ dài, diện tích, thể tích, góc...) ta thường làm như sau

Biểu diễn đại lượng cần tìm Max – min phụ theo các đại lượng biến thiên của giả thiết

Nếu đại lượng đó chỉ phụ thuộc vào một đại lượng biến thiên ta có thể

+ Áp dụng các BĐT liên quan tới đoạn thẳng

+ Áp dụng các BĐT liên quan tới hàm số lượng giác

+ Dùng ẩn phụ chuyển từ hàm hình học sang hàm đại số và dùng phương pháp đạo hàm để tìm Max – min.

Nếu đại lượng đó phụ thuộc vào nhiều đại lượng biến thiên ta có thể áp dụng các BĐT cổ điển như Cauchy, Bunhiacopski ....

Chú ý: Một số BĐT thường dùng

$AH \le AB$ (hình chiếu và đường xiên), dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv B$

$AB + AC \ge BC, |AB - AB| \le BC$ (Bất đẳng thức trong tam giác) dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A, B, C$ thẳng hàng $\forall x, y \ge 0$

ta có $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4}}$

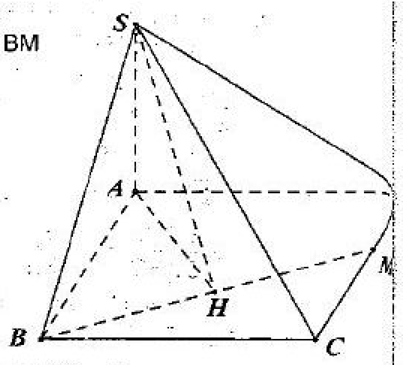
$x + y = a$ (không đổi) $\Rightarrow (xy)_{min} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{a}{2}$

$x.y = a$ (không đổi) $\Rightarrow (x+y)_{min} = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{a}$

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = h vuông góc mặt phẳng (ABCD), M là điểm thay đổi trên CD. Kẻ SH vuông góc BM. Xác định vị trí M để thể tích tứ diện S.ABH đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Giải:



Ta có SH ⊥ BM và SA ⊥ BM suy ra AH ⊥ BM

$V_{SABH} = \frac{1}{6}SA.AH.BH = \frac{h}{6}AH.BH$.

V_{SABH} lớn nhất khi AH.BH lớn nhất.

Ta có: $AH + BH \geq 2\sqrt{AH.BH}$

$\Rightarrow AH^2 + BH^2 \geq 2AH.BH$

$\Rightarrow a^2 \geq 2AH.BH$

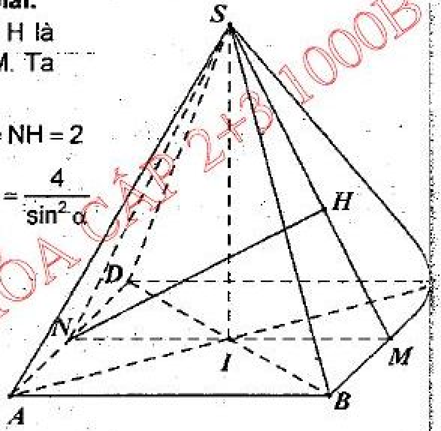
Vậy AH.BH lớn nhất khi $AH.BH = \frac{a^2}{2}$

Khi AH = BH khi H là tâm của hình vuông, khi M ≡ D.

Khi đó $V_{SABH} = \frac{a^2h}{12}$.

Thí dụ 2: Hình chóp tứ giác đều SABCD có khoảng cách từ A đến mặt ph (SBC) bằng 2. Với giá trị nào của góc α giữa mặt bên và mặt đáy của c thì thể tích của chóp nhỏ nhất?

Giải:



Gọi M, N là trung điểm BC, AD, gọi H là hình chiếu vuông góc từ N xuống SM. Ta có:

$\widehat{SMN} = \alpha, d\left(A;(SBC)\right) = d\left(N;(SBC)\right) = NH = 2$

$\Rightarrow MN = \frac{NH}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = MN^2 = \frac{4}{\sin^2\alpha}$

$SI = MI.\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}.\frac{4}{\sin^2\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha}$

$= \frac{4}{3.\sin^2\alpha.\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.2\cos^2\alpha \leq \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{3} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha.\cos\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

V_{SABCD} min ⇔ $\sin^2\alpha.\cos\alpha$ max

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

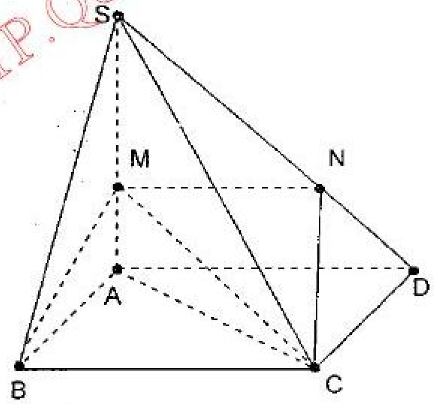
Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a; AD Cạnh SA = 2a của hình chóp vuông góc với đáy. M là một điểm nằm trên c SA với AM = x(0 ≤ x ≤ 2a).

Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện ấy. Tìm x để thiết diện ấy có diện tích lớn nhất.

Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp trên ra hai phần có thể tích bằng nhau.

Giải:

Thiết diện là hình thang vuông MNCB, vuông tại B và M.



$S_{MNCB} = \frac{1}{2}(MN + CB)MB$

$BM^2 = BA^2 + AM^2 \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + x^2}$

ΔSMN đồng dạng ΔSAD,

$\Rightarrow MN = \frac{SM.AD}{SA} = \frac{(2a - x).b}{2a}$

Vậy: $S_{MNCB} = \frac{1}{2}\left[\frac{2ab - bx}{2a} + b\right].\sqrt{a^2 + x^2}$

$= \frac{b}{4a}(4a - x)\sqrt{a^2 + x^2}$

Xét hàm số

$f(x) = \frac{b}{4a}(4a - x)\sqrt{a^2 + x^2} \quad (0 \leq x \leq 2a)$

$f'(x) = \frac{b}{4a}\left[\frac{-2x^2 + 4ax - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right]$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ x = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right.$

Ta có: $f(0) = ab; f(2a) = ab\frac{\sqrt{5}}{2}$

$f\left(a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = ab\frac{1}{4}.\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$f\left(a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = ab\frac{1}{4}.\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$\Rightarrow \underset{[0;2a]}{\text{Max}}\, f(x) = ab.\frac{1}{4}.\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$ khi $x = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Vậy: với $x = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ thì diện tích của thiết diện lớn nhất.

Gọi V là thể tích khối chóp S.ABCD $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2a^2b}{3} = V$

Gọi V_1 là thể tích khối S.MNCB

$V_1 = V_{SMBC} + V_{SMNC}$

Ta có $\dfrac{V_{SMBC}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM.SB.SC}{SA.SB.SC} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2a-x}{2a}$

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SA.dt(ABC) = \dfrac{1}{6}.2a^2b = \dfrac{V}{2}$

$\Rightarrow V_{SMBC} = \dfrac{2a-x}{2a}.\dfrac{V}{2} = \dfrac{2a-x}{2a}.\dfrac{a^2b}{3} = \dfrac{(2a-x)ab}{6}$

Ta có: $\dfrac{V_{SMNC}}{V_{SACD}} = \dfrac{SM.SN.SC}{SA.SC.SD} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD} = \left(\dfrac{MN}{AD}\right)^2 = \dfrac{(2a-x)^2}{4a^2}$

$\Rightarrow V_{SACD} = \dfrac{V}{2} = \dfrac{a^2b}{3}$

$\Rightarrow V_{SMNC} = \dfrac{(2a-x)^2}{4a^2}.\dfrac{a^2b}{3} = \dfrac{(2a-x)^2.b}{12}$

$V_1 = V_{SMNCB} = \dfrac{(2a-x)ab}{6} + \dfrac{(2a-x)^2b}{12}$

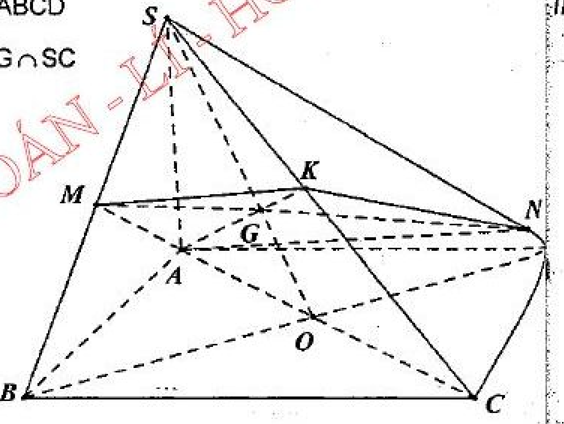
Ycbt $\Leftrightarrow V_1 = \dfrac{V}{2} = \dfrac{a^2b}{3} \Leftrightarrow \dfrac{(2a-x)ab}{6} + \dfrac{(2a-x)^2b}{12} = \dfrac{a^2b}{3} \Leftrightarrow x^2 - 6ax + 4a^2 =$

$\Leftrightarrow x = a(3-\sqrt{5})$ hoặc $x = a(3+\sqrt{5}) > 2a$ (loại)

Vậy $x = a(3-\sqrt{5})$ thì (MBC) chia khối chóp thành 2 phần tương đương.

Thí dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD,SA là đường cao, đáy là hình chữ nhật
SA = a, AB = b, AD = c. Trong mpSDB lấy G là trọng tâm tam giác SDB qua
kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M, cắt cạnh SD tại N, mặt phẳng (AMN)
SC tại K. Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nh
Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

Giải:



Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD

Ta có $SG = \dfrac{2}{3}.SO$ và $K = AG \cap SC$

và K là trung điểm SC

$\dfrac{V_{SMAK}}{V_{SBAC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SK}{SC}$

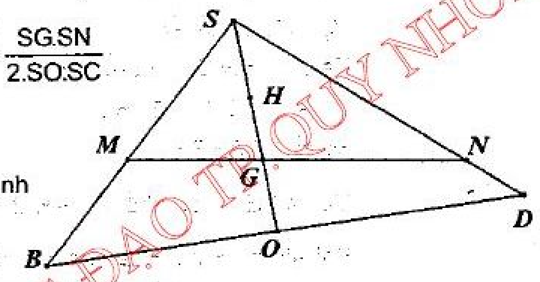
$\Rightarrow V_{SMAK} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{SM}{SB}.V_{SBAC}$

$= \dfrac{1}{4}.\dfrac{SM}{SB}.V_{SABCD}$

$= \dfrac{1}{12}\dfrac{SM}{SB}.a.b.c$

Tương tự $V_{SNAK} = \dfrac{1}{12}.\dfrac{SN}{SC}.a.b.c$

Do đó $V_{SAMKN}\dfrac{1}{12}.\left(\dfrac{SM}{SB} + \dfrac{SN}{SC}\right).a.b.c$



Trong mp (SBD)

$\dfrac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{S_{SMG} + S_{SGN}}{2S_{SBO}}$

$= \dfrac{S_{SGM}}{2S_{SBO}} + \dfrac{S_{SGN}}{2S_{SOD}} = \dfrac{SG.SM}{2.SO.SB} + \dfrac{SG.SN}{2.SO.SC}$

$\Rightarrow \dfrac{SM.SN}{SB.SC} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{SM}{SB} + \dfrac{SN}{SC}\right)$

Do M, N lần lượt nằm trên cạnh SB, SD nên

$\dfrac{SB}{2} \le SM \le SB \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{SM}{SB} \le 1$

Đặt $t = \dfrac{SM}{SN}\left(\dfrac{1}{2} \le t \le 1\right)$ thì $t.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{3}\left(t + \dfrac{SN}{SC}\right) \Leftrightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{t}{3t-1}$

Nhận thấy V_{SAMKN} đạt GTLN,GTNN nếu

$f(t) = \dfrac{SM}{SB} + \dfrac{SN}{SC} = t + \dfrac{t}{3t-1}$ với $\dfrac{1}{2} \le t \le 1$

Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{(3t-1)^2} = \dfrac{9t^2 - 6t}{(3t-1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}, t = 0$ (loại)

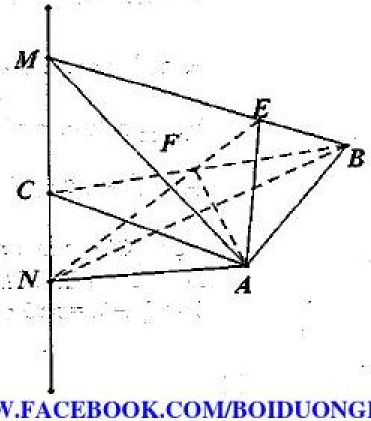
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}, f(1) = \dfrac{3}{2}, f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$

Do vậy $V_{SAMKN} = \dfrac{abc}{8}$ là GTLN khi M là trung điểm SB hoặc M trùng với B

$V_{SAMKN} = \dfrac{abc}{9}$ là GTNN khi MB chiếm 1 phần SB

Thí dụ 5: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên đường thẳng d đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M với CM = x .Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên MB và CB. Đường thẳng EF cắt (d) tại N. Tính thể tích tứ diện ABMN theo a và x, với giá trị nào của x thì thể tích tứ diện ABMN nhỏ nhất

Giải:



Ta có:

$V_{ABMN} = V_{MCAB} + V_{NCAB}$

$= \dfrac{1}{3}S_{\Delta CAB}.CM + \dfrac{1}{3}S_{\Delta CAB}.CN$

$= \dfrac{1}{3}S_{\Delta CAB}(CM + CN)$

Do $\left.\begin{array}{l} AM \perp CB \\ AM \perp MC \end{array}\right\}$

$\Rightarrow AM \perp (MBC) \Rightarrow AM \perp MB(1)$

Lại có $MB \perp AE(2)$ từ (1) và (2)

suy ra MB ⊥ (AEF) ⇒ MB ⊥ NF

⇒ $\widehat{CFN} = \widehat{CBM}$ vì vậy ΔCMB đồng dạng với ΔCFN

⇒ CM.CN = CF.CB ⇒ $x.CN = \frac{a}{2}.a \Rightarrow CN = \frac{a^2}{2x}$

Vậy $V_{ABMN} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(x + \frac{a^2}{2x}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}(2x^2+a^2)}{24x}$ (đvtt)

Nhận thấy V_{ABMN} nhỏ nhất khi và chỉ khi CM + CN nhỏ nhất

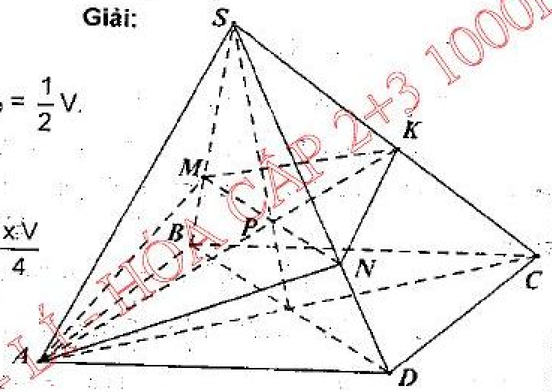
Lại có CM.CN = CF.CB không đổi nên CM + CN nhỏ nhất khi và chỉ khi CM = CN

Vậy V_{ABMN} nhỏ nhất khi và chỉ khi CM = CN ⇔ $x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

khi đó $V_{ABMN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{12}$

Thí dụ 6: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích của khối chóp SAMKN và khối chóp SABCD. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tỷ số $\frac{V_1}{V}$.

Giải:



Vì ABCD là hình bình hành

$\Rightarrow V_{SABC} = V_{SADC} = \frac{1}{2}V_{SABCD} = \frac{1}{2}V$.

Đặt $\frac{SM}{SB} = x$, $\frac{SN}{SD} = y$ thì

$\frac{V_{SAMK}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SAMK} = \frac{x.V}{4}$

$\Rightarrow V_1 = V_{SAMK} + V_{SANK}$

$= \frac{V}{4}(x+y)$ (1)

Mặt khác

$V_1 = V_{SAMN} + V_{SMNK} = x.y.\frac{V}{2} + x.y.\frac{V}{4} \Rightarrow V_1 = \frac{3xy.V}{4}$ (2).

Từ (1) (2) ⇒ $x + y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$ (3)

Do x > 0 và y > 0 nên từ (3) ⇒ $x > \frac{1}{3}$

Và $y = \frac{SN}{SD} \le 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \le 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \ge 0$ (vì $3x - 1 > 0$) $\Rightarrow x \ge \frac{1}{2}$ do đó $\frac{1}{2} \le x \le 1$

Từ (1) ⇒ $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{4}(x+y) = \frac{3}{4}xy = \frac{3}{4}x.\frac{x}{3x-1} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

Ta có $f'(x) = \frac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right.$ (x = 0 không thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$)

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$\frac{3}{8}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{3}{8}$

Suy ra $\frac{1}{3} \le f(x) \le \frac{3}{8}$ với $\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ hay $\frac{1}{3} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{3}{8}$

Vậy $\text{Min}\left(\frac{V_1}{V}\right) = \frac{1}{3}$ khi $x = \frac{2}{3}$ hay $SM = \frac{2}{3}SB$

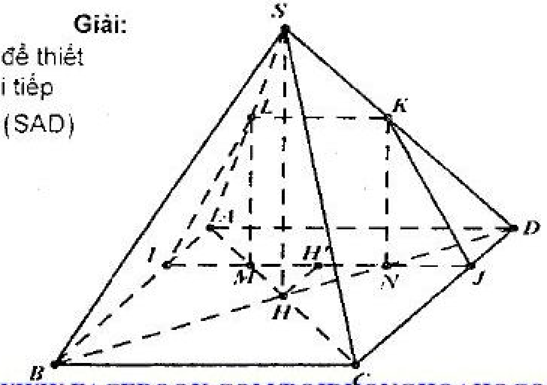
Và $\text{Max}\left(\frac{V_1}{V}\right) = \frac{3}{8}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{M là trung điểm của SB} \\ M \equiv B \end{array}\right.$

Thí dụ 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đỉnh S, cạnh đáy bằng a, đường cao SH; M là điểm bất kỳ thuộc AH. Mặt phẳng (P) qua M song song với AD và SH cắt AB, CD, SD, SA lần lượt tại I, J, K, L.

a. Cho $SH = a\sqrt{2}$, xác định vị trí của M trên AH để thiết diện IJKL là một tứ giác ngoại tiếp.

b. Xác định vị trí của M trên AH để thể tích của khối đa diện DIJKLH đạt giá trị lớn nhất.

Giải:



a. Xác định vị trí của M trên AH để thiết diện IJKL là một tứ giác ngoại tiếp

Ta có: (P) / /AD = (ABCD) ∩ (SAD)

$\Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABCD) = IJ // AD \\ (P) \cap (SCD) = LK // AD \end{cases}$

⇒ IJ // LK // AD (1)

SH // (P) và (SAC) ⊃ SH

⇒ (P) ∩ (SAC) = ML // SH

Tương tự: $mp(SBD)\cap(P) = NK//SH \Rightarrow ML//NK//SH$

Tính chất hình vuông $\Rightarrow IM = NJ \Rightarrow IL = JK$ (2)

Từ (1) và (2) và $LK < IJ \Rightarrow IJKL$ là hình thang cân.

Để hình thang cân IJKL là tứ giác ngoại tiếp, điều kiện cần và đủ là:

$IJ + LK = KJ + IL = 2IL$ (3)

Đặt: $AM = x\left(0 < x \le \dfrac{a\sqrt2}{2}\right)$; với a là cạnh hình vuông ABCD.

Tam giác IAM vuông cân $\Rightarrow IM = \dfrac{x\sqrt2}{2}$.

$ML//SH \Rightarrow \dfrac{ML}{SH} = \dfrac{AM}{AH} \Leftrightarrow ML = \dfrac{2x}{a\sqrt2}.a\sqrt2 = 2x$

Tam giác ILM $\Rightarrow IL = \sqrt{IM^2 + ML^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{2} + 4x^2} = \dfrac{3x\sqrt2}{2}$

Định lý Talet $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} LK//AD \Rightarrow \dfrac{LK}{AD} = \dfrac{SL}{SA} \\ LM//SH \Rightarrow \dfrac{HM}{HA} = \dfrac{SL}{SA} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{LK}{AD} = \dfrac{HM}{HA}$

$\Rightarrow LK = \dfrac{a\sqrt2 - 2x}{a\sqrt2}.a = a - x\sqrt2$.

Lúc đó (3) $\Leftrightarrow a + a - x\sqrt2 = 3x\sqrt2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt2}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AH.

b. Xác định vị trí của M trên AH để thể tích của khối đa diện DIJKLH đạt giá trị nhất.

Xét: $V_{(DIJKLH)} = V_{(HIJKL)} + V_{(DIJKL)}$ (4)

Do: $\begin{cases} LM \perp (ABCD) \\ IJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow DJ \perp (IJKL)$ và $(IJKL) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến IJ

$HH' \perp IJ \Rightarrow HH' \perp (IJKL)$

theo tính chất hình vuông ta có:

$\Rightarrow DJ = AI = IM = \dfrac{x\sqrt2}{2} \Rightarrow HH' = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x\sqrt2}{2}$.

Từ (4) $\Rightarrow V_{(x)} = V_{(DIJKLH)} = \dfrac{1}{3}dt(IJKL).(HH' + DJ)$.

$\Rightarrow V_{(x)} = \dfrac{1}{6}a.dt(IJKL) = \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{a + a - x\sqrt2}{2}\right)2x = \dfrac{ax}{6}\left(2a - x\sqrt2\right)$.

$\Rightarrow V_{(x)} = -\dfrac{a\sqrt2}{2}x^2 + \dfrac{a^2}{3}x \quad \left(0 < x \le \dfrac{a\sqrt2}{2}\right)$

Ta có: $V'_{(x)} = -\dfrac{a\sqrt2}{2}x + \dfrac{a^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt2}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$a\sqrt2/2$	
V'(x)		+		–
V(x)	0	↗	$a^3\sqrt2/12$	

Vậy khi M trùng H thì thể tích đạt giá trị lớn nhất. $\max V = \dfrac{a^3\sqrt2}{12}$

Dạng 5: Ứng dụng thể tích để tính khoảng cách

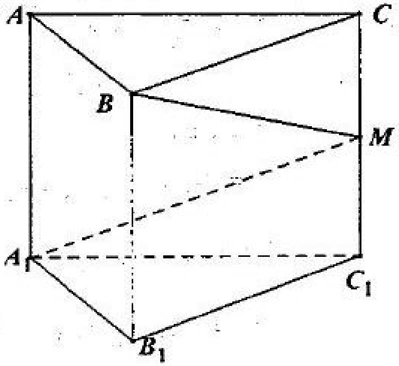
Phương pháp này chỉ dùng khi việc tính toán khoảng cách khó khăn, trong khi lại có thể tính dễ dàng thể tích và diện tích

Áp dụng công thức $h = \dfrac{3V}{S}$ (với hình chóp) hoặc $h = \dfrac{V}{S}$ (với hình lăng trụ)

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt5$ và $\widehat{BAC} = 120$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Hãy chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (A_1BM).

Giải:



$MA_1^2 = A_1C_1^2 + C_1M^2 = (2a)^2 + \left(a\sqrt5\right)^2 = 9a^2$;

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos120 = 7a^2$

$BM^2 = BC^2 + CM^2 = 7a^2 + \left(a\sqrt5\right)^2 = 12a^2$;

$A_1B^2 = AA_1^2 + AB^2 = \left(2a\sqrt5\right)^2 + a^2 = 21a^2$

Suy ra $A_1B^2 = MA_1^2 + MB^2 \Rightarrow MB \perp MA_1$

Hình chóp $MBAA_1$ và $CABA_1$ có chung đáy là tam giác BAA_1 và đường cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.

Suy ra

$V = V_{MBAA_1} = V_{CBAA_1} = \dfrac{1}{3}AA_1.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}2a\sqrt5.\dfrac{1}{2}a.2a.\sin120 = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

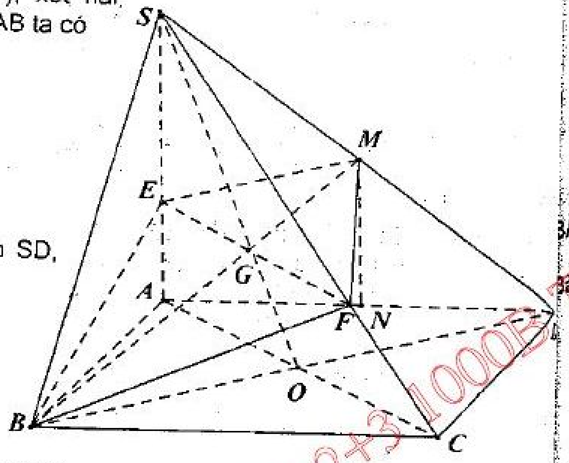
$\Rightarrow d(A,(A_1BM)) = \dfrac{3V}{S_{\Delta MBA_1}} = \dfrac{6V}{MB.MA_1} = \dfrac{6.\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}}{a\sqrt{12}.3a} = \dfrac{a\sqrt5}{3}$

Thí dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = BC = $a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{3}$. M là trung điểm SD, N là trung điểm của AD

a. Chứng minh rằng đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (BMN).

b. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B,M và cắt mặt phẳng (SAC) theo một đườ thẳng vuông góc với đường thẳng BM. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đ mặt phẳng (P).

Giải:



a. Trong mặt phẳng (ABCD), xét hai tam giác vuông ABC và NAB ta có

$$\frac{AN}{AB}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Do đó : $\Delta ABC \sim \Delta NAB$

mà $AN\perp AB,\ BA\perp BC$

suy ra $AC\perp BN$ (1)

Mặt khác M là trung điểm SD, N là trung điểm của AD nên MN // SA

mà $SA\perp(ABCD)$

$\Rightarrow MN\perp(ABCD)$

do đó $MN\perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC\perp(BMN)$

b. Theo câu a, AC vuông góc với mặt phẳng (BMN) nên AC vuông góc với B Mặt phẳng (P) đi qua BM và cắt (SAC) theo một đường thẳng vuông góc v BM mà nên EF//AC ($E\in SA, F\in SC$).

Ta có : $S_{ABCD}=a^2\sqrt{2}$

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Trong mặt phẳng (SBD) ta có G là trọng tâm của tam giác SBD nên $\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}$

Trong mặt phẳng (SAC) ta có: $\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SC}=\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}$ (vì EF//AC)

$$\frac{V_{SEBM}}{V_{SABD}}=\frac{SE}{SA}.\frac{SM}{SD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \text{ và } \frac{V_{SBFM}}{V_{SBCD}}=\frac{SF}{SC}.\frac{SM}{SD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

Mà $V_{SABD}=V_{SBCD}=\frac{1}{2}V_{SABCD}$.

Do đó: $$\frac{V_{SEBFM}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}}=\frac{V_{SEBM}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}}+\frac{V_{SBFM}}{\frac{1}{2}V_{SABCD}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Suy ra $V_{SEBFM}=\frac{1}{3}V_{SABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$

Lại có: $BD=a\sqrt{3}$, $SD=a\sqrt{5}$, $SB=2a$

Nên: $BM=\frac{3a}{2}, EF=\frac{2}{3}.AC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Tứ giác EBFM có hai đường chéo vuông góc với nhau nên ta có :

$$S_{EBFM}=\frac{1}{2}BM.EF=\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Vậy khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) là

$$d_{(S,(P))}=\frac{3V_{SEBFM}}{S_{EBFM}}=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{6}}{9}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B với BC là đáy nhỏ, H là trung điểm AB, SA = 2a, SC = $a\sqrt{5}$. Biết rằng tam giác SAB là tam giác đều, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và khoảng cách từ D tới mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$. Hãy tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh 2a, tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân đỉnh S. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C với AC = a, cạnh bên $AA_1=2a$ và tạo với đáy một góc bằng 30°, biết mặt phẳng $(ABB_1)\perp(ABC)$ và tam giác AA_1B cân tại A_1. Tính thể tích của khối chóp $A_1.BCC_1B_1$ theo a.

Bài 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của SA và BC. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD biết đường thẳng IJ tạo với mặt đáy một góc 60^0

Bài 5: Cho hình chóp S.ABC có $SA=3a\,(a>0)$, SA tạo với đáy (ABC) góc 60^0. Tam giác ABC vuông tại B, góc $\widehat{ACB}$ bằng 30^0. G là trọng tâm của tam giác ABC, hai mặt phẳng (SGB), (SGC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp theo a .

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O; AC = $2a\sqrt{3}$, BD = 2a; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy *ABCD* là hình bình hành, với SA = SB =
= 2a = 2BC và $\widehat{ABC} = 120^0$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB và K là h
chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SCD), K nằm trong tam giác SCD
$HK = a\sqrt{\frac{3}{5}}$. Tìm thể tích của hình chóp theo a.

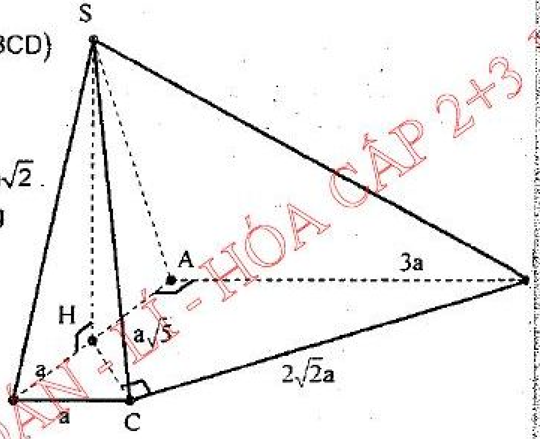
Bài 8: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = 2a, AD = 3a, AA'
và góc $\widehat{BAD} = 30^0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A
Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

Bài 9: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông cân tại *B, BA = a*. Tam g
SAC cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với *mp(ABC)*. Gọi *M, N*
lượt là trung điểm của *SA, BC;* biết góc giữa *MN* với mp(ABC) bằng 60^0. T
thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau A
MN theo a.

Bài 10: Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi, AB = a
$\widehat{BAD} = 120^0$. Biết góc giữa đường thẳng AC' và (ADD'A') bằng 30^0. Tính
tích lăng trụ ABCD.A'B'C'D và tính khoảng cách từ trung điểm N của BB' đ
(C'MA) với M là trung điểm của A'D'

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:



Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$

và $SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Ta có $CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó, tam giác HBC vuông cân tại B và BC = a

Gọi $E = HC \cap AD$ thế thì tam giác HAE cũng vuông cân và do đó suy ra

$$DE = \frac{d(D,(AHC))}{\cos 45^0} = 2a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4a \Rightarrow AD = 3a.$$

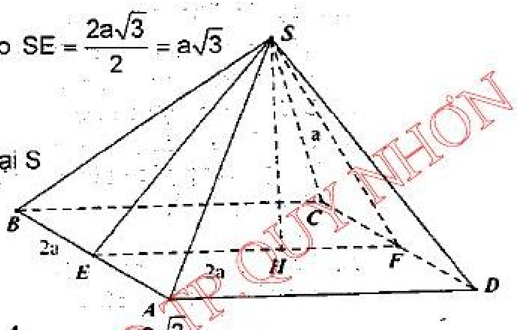
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + DA)\cdot AB = 4a^2 \text{ (đ.v.d.t.)}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD} = \frac{4a^3}{\sqrt{3}} \text{ (đvtt)}$$

Bài 2:

Ta có diện tích đáy hình vuông ABCD : $S = 4a^2$

Gọi E, F lần lượt trung điểm AB và CD



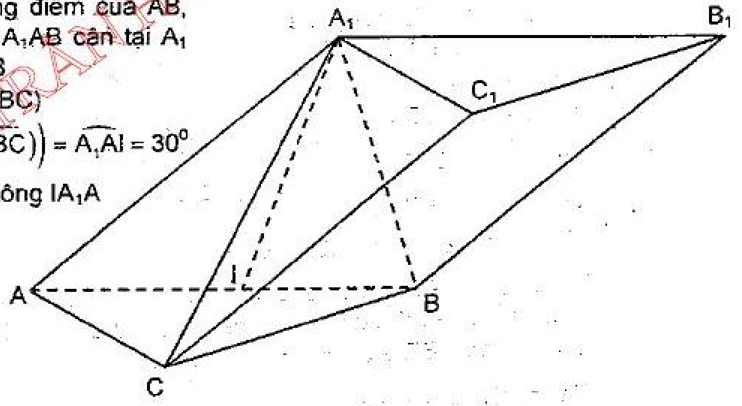
Tam giác SAB đều nên đường cao $SE = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SCD vuông cân đỉnh S
nên đường cao *SF = a*
Do đó ta có tam giác SEF vuông tại S
(vì $EF^2 = SE^2 + SF^2$)
Trong tam giác SEF kẻ SH vuông góc EF tại H
Ta có SH vuông góc mp(ABCD).

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{SF^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}S(ABCD).SH = \frac{1}{3}.4a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt).}$$

Bài 3:



Gọi I là trung điểm của AB,
vì tam giác A_1AB cân tại A_1
nên $A_1I \perp AB$
nên $A_1I \perp (ABC)$
$\Rightarrow \widehat{(AA_1,(ABC))} = \widehat{A_1AI} = 30^0$
Tam giác vuông IA_1A

có $A_1I = A_1A.\sin 30^0 = 2a.\frac{1}{2} = a$

và $AI = \sqrt{A_1A^2 - AI^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2AI = 2a\sqrt{3}$,

khi đó $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{12a^2 - a^2} = a\sqrt{11}$

$$\text{Ta có: } V_{A_1.BCC_1B_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{A_1.ABC} = A_1I.S_{ABC} - \frac{1}{3}A_1I.S_{ABC} = \frac{2}{3}A_1I.S_{ABC}$$

$$= \frac{2}{3}a.\frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{3}a.a.a\sqrt{11} = \frac{a^3\sqrt{11}}{3} \text{ (đvtt).}$$

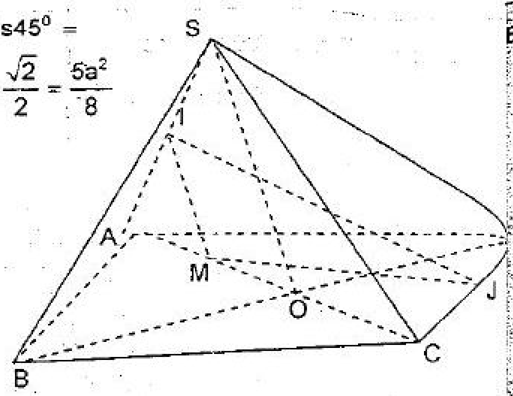
Bài 4:

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, M là trung điểm của AO, ta có IM //SO
$\Rightarrow IM \perp (ABCD) \Rightarrow$ Góc giữa IJ với mặt đáy là góc $\widehat{IJM}$ bằng 60^0. Ta có:

$MJ^2 = CM^2 + CJ^2 - 2CM.CJ.\cos 45^0 =$

$\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\frac{3}{4}a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow MJ = \frac{a\sqrt{10}}{4}$



Mặt khác

$IM = MJ.\tan 60^0$

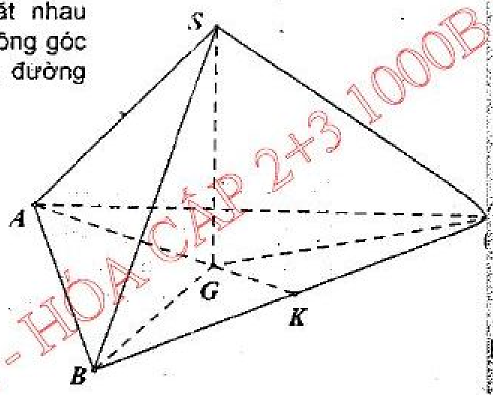
$= \frac{a\sqrt{10}}{4}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$

Do S.ABCD là khối chóp đều

nên : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD}$

Trong đó $SO = 2IM = \frac{a\sqrt{30}}{2}$; $S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{30}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{30}}{6}$

Bài 5:



Mặt phẳng (SGB) , (SGC) cắt nhau theo giao tuyến SG và cùng vuông góc với mặt phẳng đáy nên SG là đường cao của hình chóp .

Góc $\angle SAG = 60^0$, trong tam giác vuông SGA có

$SG = SA.\sin 60^0 = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

$AG = SA.\cos 60^0 = \frac{3a}{2}$,

$AK = \frac{3}{2}AG = \frac{9a}{4}$

với K là trung điểm của BC

Đặt AB = x ; tam giác vuông ABC có $BC = AB.\cot 30^0 = x\sqrt{3} \Rightarrow BK = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

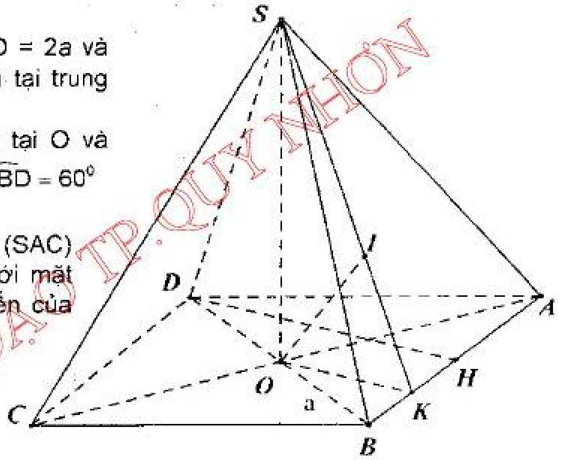
Trong tam giác vuông ABK có $AK^2 = AB^2 + BK^2$

$\Rightarrow \frac{81a^2}{16} = x^2 + \frac{3x^2}{4} = \frac{7x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9a}{2\sqrt{7}}$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}AB.2BK = \frac{81a^2\sqrt{3}}{56}$

Thể tích $V = \frac{1}{3}SG.S_{ABC} = \frac{243a^3}{112}$ (đvtt)

Bài 6:



Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}$; $BD = 2a$ và AC, BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo.

Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}$; $BO = a$, do đó $\widehat{ABD} = 60^0$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của chúng là SO ⊥ (ABCD).

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có DH ⊥ AB và $DH = a\sqrt{3}$;

$OK // DH$ và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$

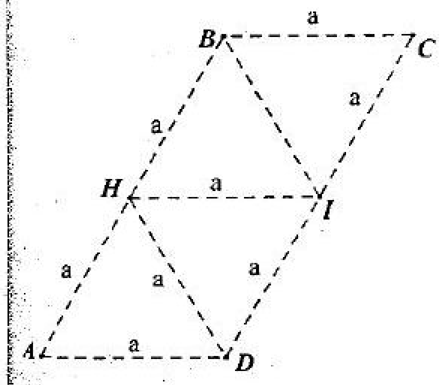
Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có OI ⊥ SK; AB ⊥ OI ⇒ OI ⊥ (SAB), hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

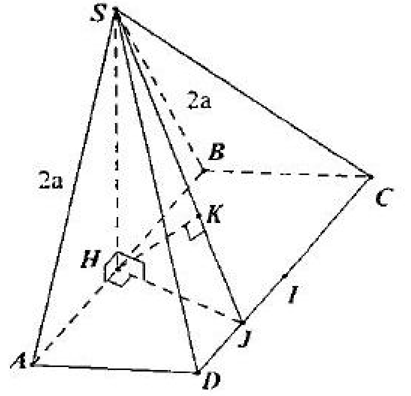
Diện tích đáy $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$; đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ (đvtt)

Bài 7:



Hình 1



Hình 2

Gọi I là trung điểm CD. Chỉ ra các tam giác ADH, HDI, IHB, BCI là các tam đều cạnh a. Suy ra $S_{ABCD}=4\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$ (đ.v.d.t)

Gọi J là trung điểm DI. Khi đó $HJ\perp AB,CD$ và do đó $CD\perp(SHJ)$.

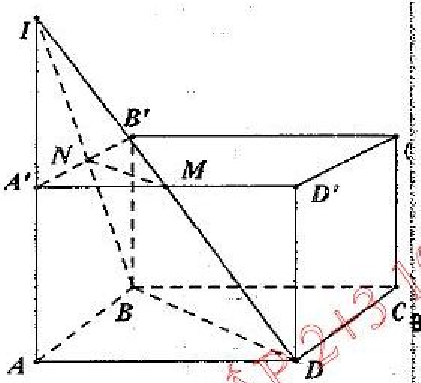
Suy ra $K\in SJ$. Ngoài ra $HJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Hơn nữa, do tam giác SAB là tam đều cạnh 2a và H là trung điểm AB nên $SH\perp AB$ và $SH=a\sqrt{3}$.

Suy ra $\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HJ^2}=\dfrac{5}{3a^2}=\dfrac{1}{HK^2}$ do đó tam giác SHJ vuông tại H.

Từ đó, do $SH\perp AB,HJ$ nên $SH\perp(ABCD)$ hay SH là đường cao của hình c

Vậy $V_{S.ABCD}=\dots=a^3$ (đ.v.t.t).

Bài 8:



Gọi $I=DM\cap BN$. Xét ba mặt phẳng (BDI), (ADMA') và (ABNA') có ba giao tuyến đồng quy

$\Rightarrow I=DM\cap BN\cap AA'$

Diện tích Δ ABD là:

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}AD.AB\sin 30^0$$

$$=\frac{1}{2}3a.2a.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{2}\text{ (đvdt).}$$

Thể tích khối chóp I.ABD là:

$$V_{IABD}=\frac{1}{3}S_{ABD}AI=\frac{1}{3}\frac{3a^2}{2}2a=a^3\text{ (đvtt)}$$

Ta có:

$$\frac{V_{IA'MN}}{V_{IABD}}=\frac{IA'.IM.IN}{IA.IB.ID}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{V_{IABD}-V_{A'MN.ABD}}{V_{IABD}}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{A'MN.ABD}=\frac{7}{8}V_{IABD}=\frac{7a^3}{8}\text{ (đv}$$

Đồng thời: $V_{ABDMN}=V_{A'MN.ABD}-V_{A.A'MN}=\dfrac{7a^3}{8}-\dfrac{1}{6}\dfrac{3a}{2}a.a=\dfrac{5a^3}{8}$ (đvtt)

Bài 9:

Gọi I là trung điểm AC, do ΔSAC cân tại S nên $SI\perp(ABC)$.

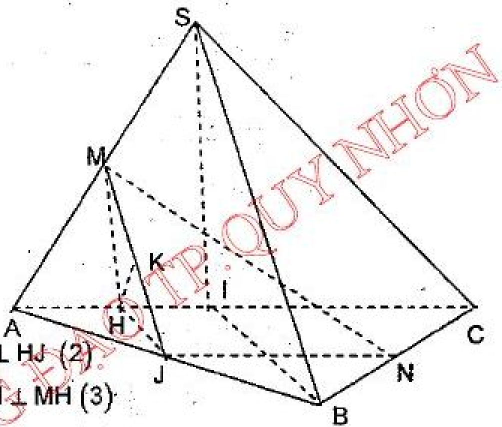
Gọi H là trung điểm AI suy ra MH//SI $\Rightarrow MH\perp(ABC)$

Do đó $(MN,(ABC))=\widehat{MNH}=60^0$. Ta có $S_{ABC}=\dfrac{a^2}{2}$.

Xét ΔHCN có: $NC=\dfrac{a}{2};HC=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

$$NH^2=HC^2+NC^2-2HC.NC.\cos 45^0=\frac{5a^2}{8}$$

$$NH=\frac{a\sqrt{10}}{4}$$



Trong ΔMHN ta có

$$MH=NH\tan 60^0=a\frac{\sqrt{30}}{4};$$

$$SI=2MH=a\frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SI.S_{ABC}=a^3\frac{\sqrt{30}}{12}$$

Gọi J là trung điểm AB, K là hình chiếu vuông góc của H lên MJ tức là $HK\perp MJ$ (1).

Ta có: $JN\perp BI$ mà $BI//HJ\Rightarrow JN\perp HJ$ (2)

$SI//MH$ mà $SI\perp JN\Rightarrow JN\perp MH$ (3)

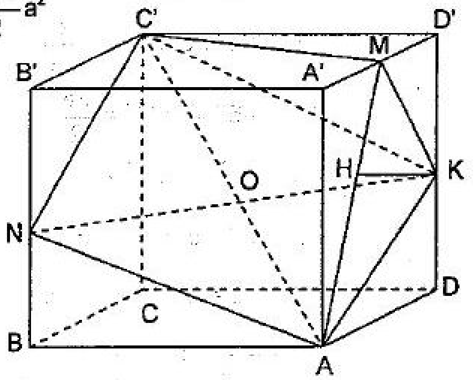
$(2),(3)\Rightarrow JN\perp(MHJ)\supset HK\Rightarrow HK\perp JN(4)$

$(1),(4)\Rightarrow HK\perp(MNJ)$

$d(AC,MN)=d(H\in AC,MN)=d(H,(MJN))=HK$

$$=\frac{MH.HJ}{\sqrt{MH^2+HJ^2}}=\frac{\dfrac{a\sqrt{30}}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\dfrac{30a^2}{16}+\dfrac{2a^2}{16}}}=\frac{a\sqrt{30}}{16}$$

Bài 10: Ta có $S_{ABCD}=2.S_{ABC}=..=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$



Gọi C'M là đường cao của tam giác đều C'A'D'. Suy ra :

$C'M\perp(ADD'A')\Rightarrow\widehat{C'AM}=30^0$.

Khi đó: $C'M=\dfrac{3a}{2}$

$\Rightarrow AM=C'M.\cot 30^0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow AA'=\sqrt{AM^2-A'M^2}=a\sqrt{6}$

Suy ra : $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}a^3$

Gọi K là trung điểm DD' và O là tâm hình hộp

$d(N;(C'MA))=d(K;(C'MA))$ vì O là tâm của hình hộp cũng là trung điểm NK.

Từ K hạ KH vuông góc với AM thì : $KH\perp(A'CM)\Rightarrow KH=d(K;(C'MA))$

$S_{AMK}=S_{AA'D'D}-S_{AA'M}-S_{MD'K}-S_{AKD}$

Mà : $S_{AMK}=\dfrac{1}{2}.MA.KH\Rightarrow KH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d(N;(C'MA))=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

§ 5: XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠ TIẾP KHỐI CHÓP VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

A. LÝ THUYẾT:

- Mặt cầu là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách điểm cố định I cố đị cho trước một khoảng không đổi bằng R gọi là một mặt cầu tâm I bán kính R

  Ký hiệu: $S(I,R)=\{M/IM=R\}$.
- Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện thì gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đ diện đó hay hình đa diện nội tiếp mặt cầu.
- Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2$.
- Thể tích mặt cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^2$.
- Thiết diện do mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) là đường tròn (C) có tâm I' và bá kính $r=\sqrt{R^2-II'^2}, II'\perp(P)$.

Phương pháp: Để xác định được tâm và bán kính chúng ta chú ý các điều sau:

- Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp là mặt cầu chứa tất cả các đỉnh của hình chóp.
- Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó c đường tròn ngoại tiếp.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng l (gọi là bán kính của mặt cầu).
- Trong không gian tập hợp các điểm cách đều các đỉnh của một đa giác là m đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác tại tâm của đa giác đó (g là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- Trong không gian tập hợp các điểm cách đều hai điểm M,N là mặt phẳng trun trực của đoạn thẳng MN.
- Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp t giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.

Các trường hợp đặc biệt:

1. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, ngoại tiếp khối chóp đáy tam giác S.ABC.

Trường hợp 1. Ba cạnh bên bằng nhau SA = SB = SC

Bước 1: Dựng đường cao $SO\perp(ABC)$.

Bước 2: Trong tam giác SAO, dựng đường trung trực của SA cắt SO tại I.

Bước 3: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm I và bán kính $R=SI=\frac{SA^2}{2S0}$

Trường hợp 2. $SA\perp(ABC)$

Bước 1: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bước 2: Mặt cầu (I,R) ngoại tiếp khối chóp S.ABC được xác định bởi :

$$\begin{cases}\overline{OI}=\frac{1}{2}\overline{AS}\\ R=\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4}}\end{cases}$$

Trong đó : h = SA ; r : bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Trường hợp 3. $\widehat{ASB}=\widehat{ACB}=90^0$

Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC có tâm là trung điểm I của AB và bán kính $R=SI=\frac{AB}{2}$

2. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đáy tứ giác ABCD.

Trường hợp 1. Đáy là hình vuông ABCD và SA = SB = SC = SD

Bước 1: Dựng đường cao $SO\perp(ABCD)$

Bước 2: Trong tam giác SAO, dựng đường trung trực của SA cắt SO tại I.

Bước 3: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm I và bán kính $R=SI=\frac{SA^2}{2SO}$

Trường hợp 2. Đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật ABCD và $SA\perp(ABCD)$

Bước 1: Gọi $O=AC\cap BD$ và d là trục của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD

Bước 2: Mặt cầu (I,R) ngoại tiếp khối chóp S. ABCD được xác định bởi :

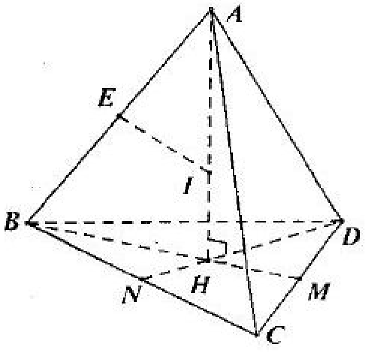
$$\begin{cases}\overline{OI}=\frac{1}{2}\overline{AS}\\ R=\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4}}\end{cases}$$

Trong đó : h = SA ; r : bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD

B. THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện đều ABCD cạnh a

Giải:



Gọi H là trọng tâm của tam giác BCD và M là trung điểm của CD

$\Rightarrow HB=HC=HD$

$\Rightarrow AH\perp(BCD);\ BH=\frac{2}{3}BM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Gọi E là trung điểm của AB và (P) là mặt trung trực của AB

$\Rightarrow\begin{cases}AB\cap(P)=E\\ AB\perp(P)\end{cases}$

Gọi $I=AH\cap(P)\Rightarrow IA=IB=IC=ID$

$\Rightarrow$ I là tâm nặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCD

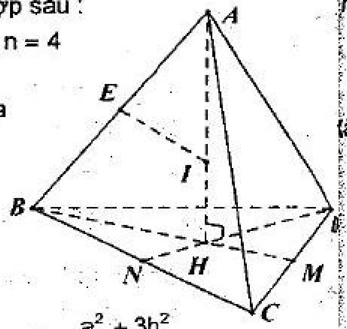
$\Delta AEI\sim\Delta AHB\Rightarrow\frac{AI}{AB}=\frac{AE}{AH}\Rightarrow AI=\frac{AE.AB}{AH}$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = AI = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Thí dụ 2: Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp n giác đ
cạnh a và có đường cao h trong mỗi trường hợp sau :

a. $n = 3$ b. $n = 4$

Giải:



a. Với $n = 3$, ta có hình chóp tam giác đều cạnh a

Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :

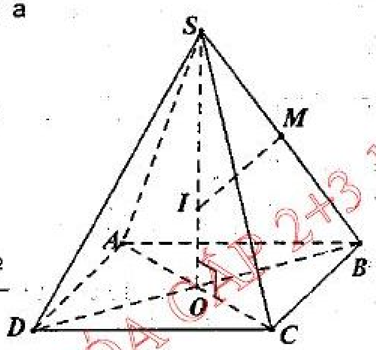
Tâm I là giao điểm đường cao SH và đường trung trực của đoạn SA

Bán kính $R = SI = \frac{SA.SE}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}$

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3} \Rightarrow R = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}$$

b. Với $n = 4$, ta có hình chóp tứ giác đều cạnh a

Gọi $O = AC \cap BD$



Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :

Tâm I là giao điểm đường cao SO và đường trung trực của đoạn SB

Bán kính $R = SI = \frac{SB.SM}{SO} = \frac{SB^2}{2SO}$

$$SB^2 = SO^2 + BO^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2h^2}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2 + 2h^2}{4h}$$

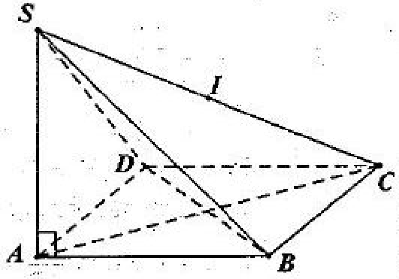
Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bê
SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SC = 2a$. Xác định tâm và tính bán kính m
cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD

Giải:

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AC$

$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$

$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow SD \perp CD$



ác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :

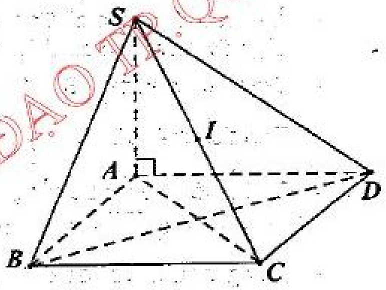
Tâm I của mặt cầu là trung điểm của cạnh huyền SC

Bán kính $R = SI = \frac{SC}{2} = a$ (đvđd)

hí dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABCD

Giải:

ác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :



$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AC$

$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$

$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow SD \perp CD$

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của cạnh huyền SC

Bán kính $R = SI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

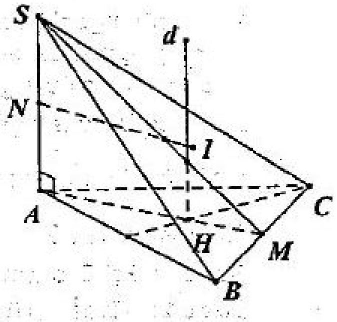
Thí dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

Giải:

Gọi H là trọng tâm của tam giác đều ABC và M là trung điểm của BC

$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Gọi d là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC



Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :

Tâm I là giao điểm của trục d và trung trực của SA.

Bán kính R :

$$R = IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{AH^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$$

Thí dụ 6: Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = a; OB = b; OC = c$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp O.ABC

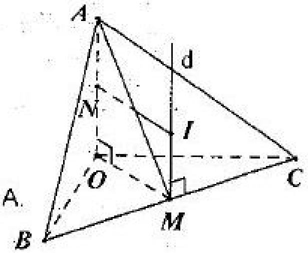
BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Giải:

Gọi M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow OM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$$

Gọi d là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔOBC



Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :

Tâm I là giao điểm của trục d và trung trực của OA.

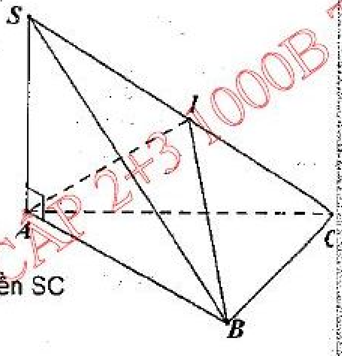
Bán kính R :

$$R = IO = \sqrt{OM^2 + IM^2} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{OA}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Thí dụ 7: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, vuông góc với mặt đáy và $SA = AB = a$ .Xác định tâm và tính bán kính mặt ngoại tiếp khối chóp S.ABC

Giải:



Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp :

$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp AC$$

$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow SB \perp BC$$

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của cạnh huyền SC

Bán kính $R = SI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong đó : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$

Thí dụ 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = SB = mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính bán kính mặt ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Giải:

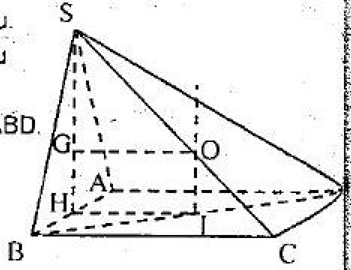
Do SA = SB = AB = a nên SAB là tam giác đều.

Gọi G và I tương ứng là tâm của tam giác đều SAB và tâm của hình vuông ABCD.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD.

Ta có $OG \perp (SAB)$ và $OI \perp (ABCD)$.

Suy ra: $OG = IH = \frac{a}{2}$, trong đó H là trung điểm của AB.



Tam giác OGA vuông tại G.

Kí hiệu R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD,

Ta có: $R = OA = \sqrt{OG^2 + GA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

hi dụ 9: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 45°.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD và thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp.

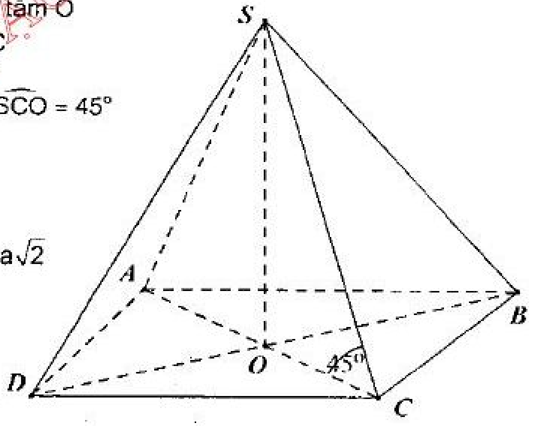
Giải:

S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

ABCD là hình vuông cạnh 2a , tâm O

$SO \perp (ABCD)$ và $OC = hc_{(ABCD)}SC$

$\Rightarrow \left(\widehat{SC;(ABCD)}\right) = (\widehat{SC,OC}) = \widehat{SCO} = 45°$



Diện tích hình vuông ABCD

$\Rightarrow AC = 2a.\sqrt{2}$

$\Rightarrow OC = AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

ΔSOC vuông tại O có

$OC = a\sqrt{2}$, $\widehat{SCO} = 45°$

$\Rightarrow SO = OC = a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.4a^2.a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp

Ta có $OA = OB = OC = OD = OS = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp S.ABCD có tâm O và bán kính $R = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{(s)} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi(a\sqrt{2})^3}{3} = \frac{8\pi a^3.\sqrt{2}}{3}$

hí dụ 10: Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên 2a.

Tính thể tích của khối chóp.

Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp trên.

Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp trên

Giải:

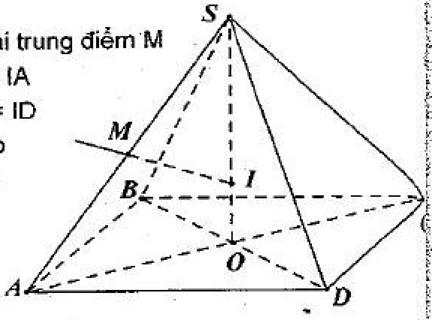
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có : $SO \perp (ABCD)$

$V = \frac{1}{3}.SO.dt(ABCD)$ và $dt(ABCD) = a^2$

$$SO^2 = SC^2 - \frac{2a^2}{4} = 4a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{7a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Vậy : $V = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$

b. Dựng trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD
$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$
Dựng trung trực của SA $\Rightarrow d \perp SA$ tại trung điểm M
Xét (SAO) có d cắt SO tại I, ta có: SI = IA
$IA = IB = IC = ID \Rightarrow IS = IA = IB = IC = ID$
$\Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm là I và bán kính r = SI.



$\Delta SIM \sim \Delta SAO \Rightarrow \dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SO}$

$\Rightarrow SI = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{2a\sqrt{14}}{7}$

Vậy : $r = SI = \dfrac{2a\sqrt{14}}{7}$;

$S = 4\pi r^2 = \dfrac{224\pi.a^2}{49}; V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{448\pi a^3\sqrt{14}}{1029}$

Thí dụ 11: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh hợp với đáy một góc α.

a. Tính thể tích hình chóp S.ABCD
b. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD

Giải:

a. Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABCD)$
$\widehat{SAO} = \alpha$, $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = a\sqrt{2}\tan\alpha$

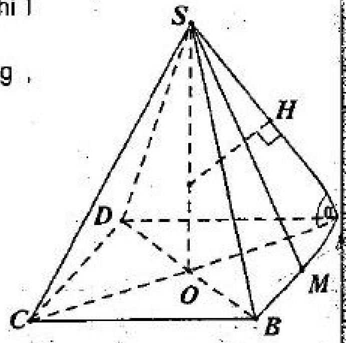
Thể tích của khối chóp S.ABCD là: $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{4a^3\sqrt{2}\tan\alpha}{3}$

b. Gọi H là trung điểm SA, trong mặt phẳng (SAC) dựng đường trung trực của SA cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD
Hai tam giác vuông SHI và SOA đồng dạng, nên ta có:

$\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SH}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA.SH}{SO}$

$SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}, SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}, SO = a\sqrt{2}\tan\alpha$

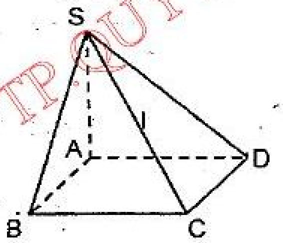
$\Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}$



Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}$

hí dụ 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và SA = a.
Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Tính bán kính mặt cầu đó.
Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Giải:



Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA$

Mà: $S_{ABCD} = a^2$, SA = a

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$

Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Tính bán kính mặt cầu đó.
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên ΔSAC vuông. Do đó: IS = IC = IA.
Chứng minh ΔSBC vuông $\Rightarrow IS = IC = IB$
Chứng minh ΔSDC vuông $\Rightarrow IS = IC = ID$
Vậy I cách đều 5 đỉnh của hình chóp nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
Bán kính: R = IS = SC/2

$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = 3a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{3}$

Vậy: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$

hí dụ 13: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, đáy là ΔABC vuông cân tại A.
Biết SA = 2a, $AB = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{3}$.
Tính thể tích của khối chóp S.ABC.
Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.
Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC, AC. Mặt phẳng (MNP) cắt AB tại Q. Tính diện tích toàn phần của khối đa diện MNPQBC.

Giải:

Do $SA \perp (ABC)$ nên SA là đường cao của hình chóp S.ABC.

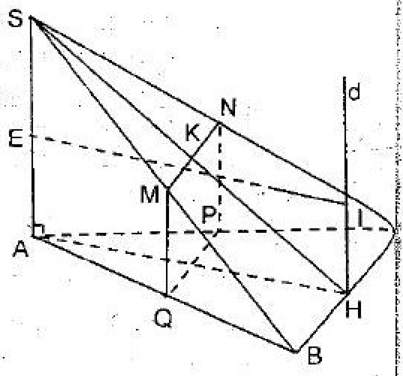
$V = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$

Mà ΔABC vuông cân tại C

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.AB = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}$

Suy ra $V = \frac{1}{3}2a.a^2\frac{3}{2} = a^3$.



b. Gọi H là trung điểm BC.

Ta có: HA = HB = HC

(do ΔABC vuông tại A)

Từ H dựng đường thẳng $d \perp (ABC)$.

Suy ra d là trục mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA đi qua trung điểm E của SA, cắt d tại điểm I.

Ta có IA = IS (1)

Tương tự, dựng mặt phẳng trung trực các cạnh SB, SC.

Ta có: IC = IB = IS (2)

Từ (1),(2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABC. Bán kính R = IA

Ta có $IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 10\pi a^2$.

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{10}}{3}\pi a^3$

c. Mặt phẳng (MNP) cắt (ABC) theo giao tuyến PQ song song với BC, với trung điểm của AB.

Diện tích toàn phần của khối đa diện MNPQBC bằng:

$dt(MNPQ) + dt(BMQ) + dt(PNC) + dt(BCPQ) + dt(MNBC) =$

$= \frac{a^2\sqrt{6}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2 3\sqrt{33}}{8} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{33}}{8}\right)a^2$

Thí dụ 14: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật ABCD có AD = $AB = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), cạnh bên SB tạo với đáy (ABCD) một góc bằng 30^0. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD.

a. Chứng minh rằng DC vuông góc với AH.

b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

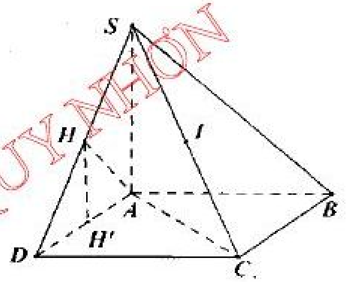
c. Tính thể tích khối chóp H.ABC.

Giải:

a. Chứng minh rằng DC vuông góc với AH.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (SAD) \\ AH \subset (SAD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp AH$

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \widehat{SAC} = 90^0$

$CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \widehat{SDC} = 90^0$,

tương tự $\widehat{SBC} = 90^0$

Suy ra ba điểm A, B, D cùng thuộc mặt cầu đường kính SC hay mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm là trung điểm I của SC, bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

Từ tam giác vuông SAB ta có $SA = AB\tan 30^0 = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = a$.

Từ tam giác vuông SAC ta có

$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 + a^2 = 5a^2$

$\Rightarrow SC = a\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tính thể tích khối chóp H.ABC

Trong mặt phẳng (SAD) dựng HH' / /SA, với $H' \in AD$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $HH' \perp (ABCD)$.

Suy ra thể tích khối chóp H.ABC là: $V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HH' = \frac{1}{6}AB.BC.HH'$

Tam giác SAD có SA = AD = a nên nó là tam giác cân, suy ra H là trung điểm của SD, do đó $HH' = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{H.ABC} = \frac{1}{6}.a\sqrt{3}.a.\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

dụ 15: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, đáy là ΔABC vuông tại C. Biết $SA = a\sqrt{3}$, AB = 2a, AC = a.

Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A xuống SC, SB. Xác định tâm I và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp H.ABC. Suy ra diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp H.ABC và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp H.ABC.

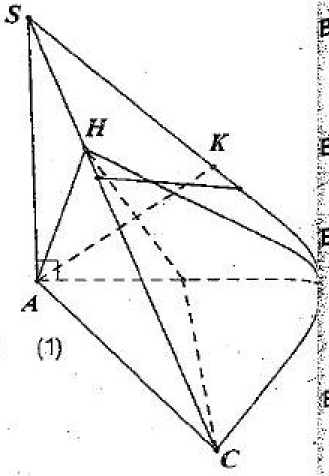
Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp A.BHK và A.BCH?

Giải:

Do $SA \perp (ABC)$ nên SA là đường cao của hình chóp S.ABC.

Thể tích của khối chóp là: $V = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$

Mà ΔABC vuông tại C nên:



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}a.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $V=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{2}$.

b. Ta có: $BC\perp(SAC)$ (do $BC\perp AC$; $BC\perp SA$)

Suy ra $BC\perp AH$.

Mặt khác: $SC\perp AH$.

Từ đó $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp HB$.

ΔAHB vuông tại H.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $IA=IB=IH$ (1)

ΔACB vuông tại C, ta có $IA=IB=IC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp H.ABC.

Bán kính $R=IA=\frac{AB}{2}=a$.

Diện tích mặt cầu là: $S=4\pi R^2=4\pi a^2$.

Thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi a^3$

c. Tỉ số thể tích 2 khối chóp A.BHK và A.BCH

Ta có $V_{A.BCH}=V_{B.AHC}=\frac{1}{3}BC.S_{ACH}=\frac{1}{3}BC.\frac{1}{2}AH.HC=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2.\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3}{8}$

$$V_{H.ABK}=V_{B.AHK}=\frac{1}{3}BK.dt(\Delta AHK)=\frac{1}{3}BK.\frac{1}{2}AH.HK=\frac{3a^3}{14}$$

Suy ra $\frac{V_{A.BHK}}{V_{A.BCH}}=\frac{\frac{3}{14}a^3}{\frac{1}{8}a^3}=\frac{12}{7}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, có cạnh $AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh còn lại đều bằng a.

Bài 2: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là giác cân tại S và vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại khối chóp SABCD biết cạnh bên SC tạo với mặt đáy và mặt phẳng (S những góc bằng nhau.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, B. Hai mặt ph (SAB), (SAD) cũng vuông góc với đáy. Biết AB = 2a, SA = BC $CD=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Xác định tâm và bán kính cầu ngoại tiếp tứ diện S.ACD.

Bài 4: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng a. M là điểm trên cạnh AA_1 sao cho $AA_1=3AM$. Biết $\widehat{BMC_1}=90^0$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

Bài 5: Cho hình chóp SABC biết đáy là tam giác ABC vuông tại C có cạnh huyền AB = 2a, các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy một góc 30^0. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC?

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên (ABCD) là trung điểm H của AB, đường trung tuyến AM của ΔACD có độ dài $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, góc giữa (SCD) và (ABCD) bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

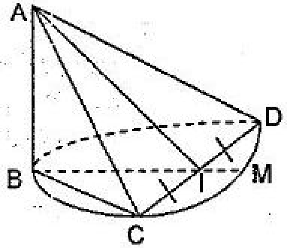
Bài 7: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác có AB = AC = a, góc A bằng 120^0. Các cạnh bên của hình chóp SA, SB, SC cùng nghiêng trên đáy góc bằng 60^0. Tính thể tích hình chóp S.ABC và xác định tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp đó.

Bài 8: Trong không gian, cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền AB = 2a. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S, sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

Bài 9: Trong không gian Oxyz, cho tứ diện OABC vuông tại O, có OA = OB = OC = a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC theo a.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:



Gọi I là trung đểm cạnh CD

$$(Gt)\Rightarrow\begin{cases}AI\perp CD\\BI\perp CD\end{cases},AI=BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}=AB\ (1)$$

$\Rightarrow(ABI)$ là mp trung trực cạnh CD.

Gọi M là giao điểm của BI với mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD.

$\Rightarrow$ Đường tròn lớn của (S) là đường tròn (ABM). Mặt phẳng (BCD) cắt (S) theo đường tròn (BCD) qua *M*, hơn nữa *BM* là đường kính.

$$\Rightarrow BM=\frac{a}{\sin 60^0}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$(1)\Rightarrow\Delta ABI$ đều $\Rightarrow\widehat{ABM}=60^0$

$$AM=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB.BM\cos 60^0}=a\sqrt{\frac{13}{12}}\Rightarrow R=\frac{AM}{2\sin 60^0}=\frac{a\sqrt{13}}{6}$$

$$\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$$

Bài 2:

Gọi H là trung điểm của AB, do SAB cân tại S và (SAB)⊥(ABCD) nên SH ⊥ (ABCD).

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, d là đường thẳng qua O và song song SH, khi đó d là trục đường tròn ngoại tiếp đáy ABCD .

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB, vì OH ⊥ (SAB) nên đường thẳng d qua J và song song với OH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.

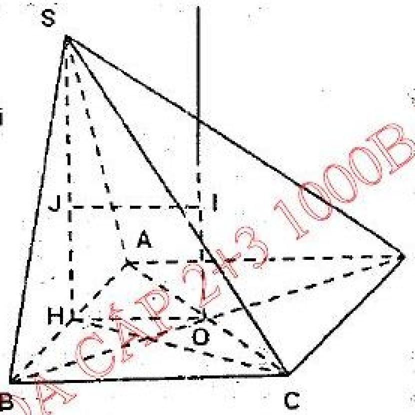
Trong mặt phẳng (SHO) có $d \cap d_1 = I$ suy ra I là tâm khối cầu ngoại tiếp k chóp SABCD vì $\begin{cases} I \in d \Rightarrow IA = IB = IC = ID \\ I \in d_1 \Rightarrow IS = IA = IB \end{cases}$

Ta có $(\widehat{SC;(SAB)} = (\widehat{SC;SB}) = \widehat{BSC}$ (do BC ⊥ (SAB))

$(\widehat{SC;(ABCD)}) = (\widehat{SC;CH}) = \widehat{SCH}$ (do SH ⊥ (ABCD)

$\Rightarrow \Delta SBC = \Delta CHS \Rightarrow SH = BC = a$

$\Rightarrow SA = SB = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$



Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB thì

$$JS = R = \frac{SA.SB.AB}{2SH.AB} = \frac{5a}{8}$$

Trong ΔIJS có $IS = \sqrt{IJ^2 + JS^2} = \dfrac{a\sqrt{41}}{8}$

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp SABCD là

$$V = \frac{41\pi a^3\sqrt{41}}{384} \text{ (đvtt)}$$

Bài 3:

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt AD tại E

Suy ra tứ giác ABCE là HCN

nên AE = a và ΔCED vuông tại E .

Theo Pitago có

$DE^2 = CD^2 - CE^2$

$= 20a^2 - 4a^2 = 16a^2$

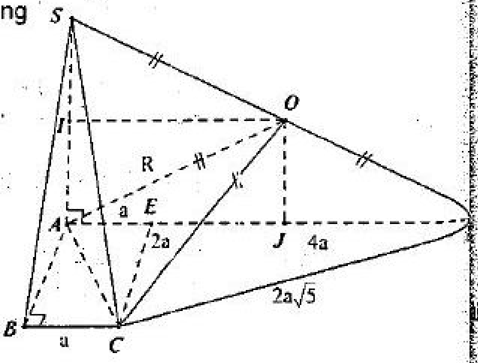
$\Rightarrow DE = 4a$

AD là đáy lớn của hình thang

$AE = a + 4a = 5a$

Diện tích hình thang ABCD là

$$S = \frac{(BC + AD)AB}{2} = \frac{(a + 5a).2a}{2} = 6a^2$$

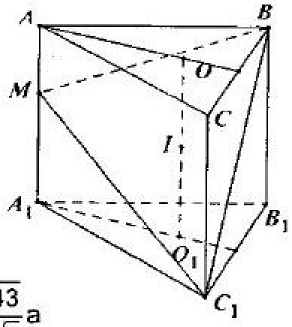


Thể tích hình chóp S.ABCD là: $V = \dfrac{1}{3}SA.S(ABCD) = \ldots = 2a^3$. (đvtt)

Tam giác ACD vuông ở C, trong mp(SAD) gọi O là giao của đường thẳng vuông góc với SA tại trung điểm I của SA và đường thẳng vuông góc với AD tại trung điểm J của AD suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ACD (O là trung điểm của SD).

ài 4:

Đặt $AA_1 = x$ suy ra $AM = \dfrac{x}{3}$; $A_1M = \dfrac{2x}{3}$



Tam giác MBC_1 vuông tại M $\Rightarrow MB^2 + MC_1^2 = BC_1^2$

$$\frac{x^2}{9} + a^2 + \frac{4x^2}{9} + a^2 = x^2 + a^2 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{9} = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{3a}{2}$$

Gọi O, O_1 là tâm của đáy ABC và $A_1B_1C_1$,

I là trung điểm của OO_1

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

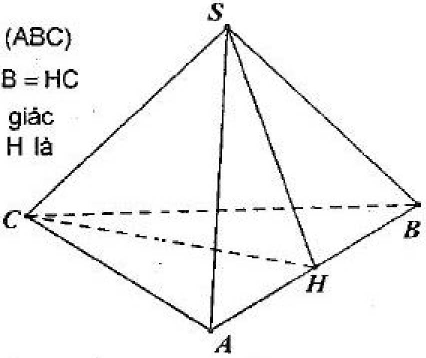
$$R^2 = AO^2 + OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{43a^2}{48} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{43}}{4\sqrt{3}}a$$

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{43}}{4\sqrt{3}}a\right)^3 = \frac{43}{144}\pi\sqrt{\frac{43}{3}}a^3$$

ài 5:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (ABC)

$Gt \Rightarrow \widehat{SCH} = \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = 30^0 \Rightarrow HA = HB = HC$



⇒ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, vì tam giác ABC vuông tại C nên H là trung điểm của AB.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC ⇒ I ∈ SH (SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

⇒ mp(ABC) cắt mặt cầu nói trên theo thiết diện là đường tròn lớn.

⇒ bán kính của mặt cầu bằng bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

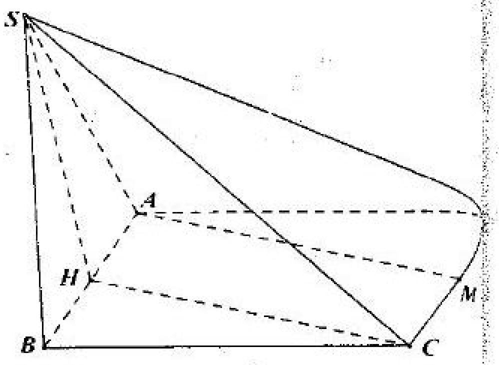
Ta có: $R = \dfrac{AB}{2\sin ASB} = \dfrac{a}{2.\sin 120^0} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

i 6:

Tính thể tích khối chóp

Ta có $\cos \widehat{ACD} = 60^0$

suy ra ΔACD đều.



$HC = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

và $HC \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHC)$.

Suy ra góc giữa (SCD) và (ABCD) là $SHC = 30^0$

$SH = HC.\tan 30^0 = \frac{a}{2}$.

$S_{ABCD} = AB.CH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

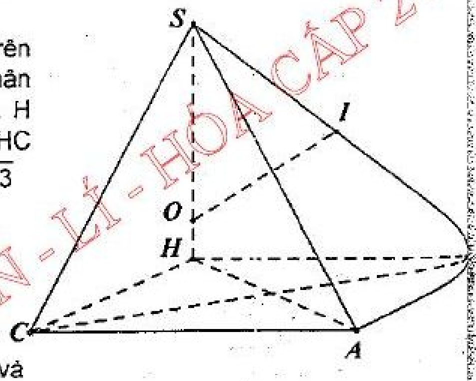
Ta có $GA = GB = GC = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Do $HS = HB = HA = \frac{a}{2}$ nên các tam giác GHA,GHB,GHS là các tam giác v bằng nhau nên GA = GB = GS.

Suy ra G tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = GC = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{3}$

Bài 7:



Do SA, SB, SC cùng nghiêng trên đáy góc như nhau, nên chân đường cao H cách đều A, B, C. H là đỉnh thứ 4 của hình thoi ABHC nên HB = HA = HC = a. $SH = a\sqrt{3}$

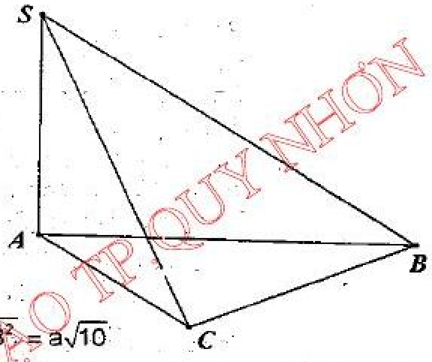
Diện tích tam giác $ABC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

suy ra $V = \frac{a^3}{4}$.

Tâm O của mặt cầu là giao SH và đường trung trực IO của SB trong mặt phẳng (SHB)

Bán kính $R = SO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Bài 8:



Từ giả thiết suy ra ΔABC vuông tại C kết hợp với $d \perp (SAC)$.

Suy ra $BC \perp (SAC)$

Do đó $\widehat{SCA} = 60^0$

Do ΔABC vuông tại C

và $AB = 2a \Rightarrow AC = BC = a\sqrt{2}$

Trong tam giác vuông SAC ta có

$SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$

Trong tam giác SAB có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10}$

Do $\widehat{SCB} = \widehat{SAB} = 90^0$ nên tứ diện SABC nội tiếp trong mặt cầu đường kính SB.

Suy ra bán kính mặt cầu bằng $\frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Vậy $S_{mc} = 4\pi R^2 = 10\pi a^2$ (đvdt)

Bài 9:

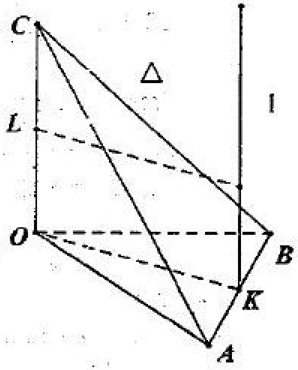
K là trung điểm của $AB \Rightarrow KO = KA = KB$.

Giả sử $\Delta \perp (OAB)$ tại K, và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC, ta có: $IA = IB = IC = IO$.

$\Rightarrow I \in \Delta$ và I thuộc mặt phẳng trung trực của OC.

Gọi L là trung điểm của OC thì mặt phẳng trung trực của OC là mặt phẳng vuông góc với OC tại L.

Tứ giác OKIL là hình chữ nhật, do đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp OABC là:



$R = OI = \sqrt{OK^2 + KI^2} = \sqrt{OK^2 + OL^2}$.

Mặt khác, $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{2}{OA^2}$

$\Rightarrow OK^2 = \frac{a^2}{2}$ và $OL^2 = \frac{1}{4}OC^2 = \frac{a^2}{4}$

nên $R = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

WWW.DAYKEMQUYNHON.UCOZ.COM WWW.FACEBOOK.COM/DAYKEM.QUYNHON

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạn bằng a, mặt bên tạo với mặt đáy một góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa AB và tạ với mặt đáy một góc 30^0 cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính thể tích kh chóp S.ABMN.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, tam giác SBC cân tại S. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mp(ABCD) nằm trê đường thẳng AC. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy (ABCD) góc 60^0.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC theo a.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và mặt bên SAB là mộ tam giác đều, mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 60^0 và mặ phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc $a\sqrt{6}$. Hãy tính thể tích của khố chóp S.ABCD theo a, biết rằng diện tích tam giác SBC bằng $\frac{3\sqrt{2}a^2}{2}$ (a > 0).

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và tam giác SAB là tam giác cân tại đỉnh S. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 45^0, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD, biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng $a\sqrt{6}$.

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân (AB // CD), AB = 2CD = 4a, BC = $a\sqrt{10}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và tính cosin góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a, SA ⊥ (ABCD), SA = $a\sqrt{6}$, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tìm thể tích khối chóp H.SCD và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

Bài 7: Cho đường cao khối chóp đều *S.ABC* bằng *h* không đổi, góc ở đáy của mặ bên bằng β với $\beta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$. Tính thể tích của khối chóp đó theo h và β. Với giá trị nào của β thì thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*, mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và sin của góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

Bài 9: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với AB = a; AD = 2a. Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 30^0 và 60^0. Tính thể tích khối hộp theo a biết cạnh bên bằng a.

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^0$, BD = a. Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 11: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có AA' = 2*a*, AB = AC = *a* (*a* > 0) và góc giữa cạnh bên AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ điểm A đến mp(A'BC) theo *a* biết rằng hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC.

Bài 12: Cho tứ diện ABCD biết AB = CD = a, AD = BC = b, AC = BD = c. Tính thể tích của tứ diện ABCD.

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông và cạnh bên SA = 2a vuông góc với mặt đáy. Cạnh bên SC hợp với mặt đáy một góc 30^0.

a. Tính theo a thể tích hình chóp S.ABCD.

b. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Bài 14: Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là hình thang AD và BC cùng vuông góc với AB, AB = AD = a, BC = 2a; mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC, CD. Tính thể tích khối chóp ADMN theo a.

Bài 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SA = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD; I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN). Chứng minh SC vuông góc với AI và tính thể tích khối chóp MBAI.

Bài 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân, cạnh bên AB = CD = a, SA = $a\sqrt{3}$, BC = a, góc BAD = 60^0. Biết mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt phẳng (ABCD) bằng 45^0. Tính diện tích hình thang ABCD và thể tích khối chóp S.ABCD.

Bài 17: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a ,tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Hai mặt phẳng (SCA) và (SCB) hợp với nhau một góc bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

Bài 18: Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{DAB} = 60^0$. Chiều cao SO của chóp bằng $\frac{3a}{2}$, (O là giao của hai đường chéo đáy). Gọi M là trung điểm cạnh AD, (α) là mặt phẳng đi qua BM và song song với SA, cắt SC, SD lần lượt tại K, P. Tính thể tích khối KPBCDM theo a.

Bài 19: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = 3a. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB, SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM theo a.

Bài 20: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* đỉnh *S*, độ dài cạnh đáy là *a*. *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *SB* và *SC*. Tính theo *a* diện tích Δ*ANM*, biết rằng mp (*AMN*) ⊥ mp(*SBC*).

Bài 21: Cho tứ diện ABCD có tam giác BCD đều cạnh a. Gọi O là trung điểm BD. E là điểm đối xứng với C qua O. Biết AE vuông góc với mặt phẳng (ABD) và khoảng cách giữa AE và BD bằng $\frac{3a}{4}$. Tính thể tích tứ diện ABCD cùng tan của góc giữa AC và mặt phẳng (BCD).

BỒI DƯỠNG TOÁN LÝ HÓA CẤP 2-3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Bài 22: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C cạnh huyề bằng 3a. G là trọng tâm tam giác ABC, $SG \perp (ABC)$, $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Tính thể tích hình chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Bài 23: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông gó với đáy hình chóp. Cho AB = a, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiế vuông góc của A lên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích khố chóp OAHK.

Bài 24: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a\sqrt{2}$ Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt đáy (ABC thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt đáy (ABC) bằng 60^0. Hãy tính thể tíc khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trung điểm K của SB tới (SAH).

Bài 25: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặ phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, là giao điểm củ BM và AC. Cho SA = a, $AD = a\sqrt{2}$, AB = a. Chứng minh rằng mặt phẳn (SBM) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và tính thể tích của tứ diện ABN.

Bài 26: Khối chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SC = a. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳn (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất .

Bài 27: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiế vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của tam giác *ABC*. Tín thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài 28: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N là các điểm lần lượt d động trên các cạnh AB, AC sao cho $(DMN) \perp (ABC)$. Đặt AM = x, AN = y. Tính thể tích tứ diện DAMN theo x và y. Chứng minh rằng: $x + y = 3xy$.

Bài 29: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. Hìn chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của cạnh AD, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.HABC và khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC).

Bài 30: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, đường chéo BD = a (a > 0) và SB = SC = SD. M là trung điểm của đoạn thẳng SA, N là điểm trên cạnh BC sao cho BN = 2CN và góc tạo bởi MN với mặt phẳng (ABCD bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 31: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh $a(a > 0)$. Góc $\widehat{ABC}$ bằng 120^0, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọ C' là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (α) đi qua AC' và song song với BD cắ các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.

Bài 32: Cho hình chóp S. ABC có góc ((SBC), (ACB)) = 60^0, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

ài 33: Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = a, $BC = \frac{a}{2}$, $SA = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^0$. Gọi M là trung điểm SA, chứng minh $SA \perp (MBC)$. Tính V_{SMBC}

ài 34: Cho hình vuông ABCD cạnh 4a. Trên cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm H và K sao cho BH = 3HA và AK = 3KD. Trên đường thẳng d vuông góc (ABCD) tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^0$. Gọi E là giao điểm của CH và BK.
Tính thể tích của hình chóp S.ABCD và thể tích hình chóp S.BHKC.
Chứng minh 5 điểm S, A, H, E và K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp của hình chóp SAHEK.
Gọi M là hình chiếu của H trên cạnh SA. Tính thể tích của hình chóp M.AHEK.

ài 35: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $AC = a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm cạnh BC, hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AI. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích S.ABC và cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC .

ài 36: Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF với SA = a, AB = b. Tính thể tích của hình chóp đó và khoảng cách giữa các đường thẳng SA, BE.

ài 37: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, điểm M nằm trên cạnh SC sao cho MC = 2MS; AB =a, $BC = 2AD = 2a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp MABCD theo a. Biết rằng SA = SB = SD và góc tạo bởi cạnh bên SC và mặt đáy là 60^0.

ài 38: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, đường chéo nhỏ AC = a; đường cao SA = a. Goi E là chân đường vuông góc hạ từ điểm D xuống đường thẳng AB
Tính thể tích khối chóp D.SAB.
Tính khoảng cách của hai đường thẳng SC và DE ?

ài 39: Tính thể tích của hình chóp S.ABC, biết đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, mặt bên (SAB) vuông góc với đáy, SA = 2a; $SAB = 60^0$.

ài 40: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, các cạnh bên đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0.
Xác định góc giữa cạnh bên với mặt đáy ABC.
Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

ài 41: Cho hình chóp S.ABC, trong đó SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài trung tuyến AD là a, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tao với mặt (SAD) góc β. Tìm thể tích hình chóp S.ABC

ài 42: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bằng a, và SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SDC) bằng b. Tìm thể tích hình chóp S.ABCD.

ài 43: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C cạnh huyền bằng 3a. G là trọng tâm tam giác ABC, $SG \perp (ABC)$, $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Tính thể tích hình chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Bài 44: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi; hai đường $AC = 2\sqrt{3}a$, BD = 2a và cắt nhau tại O; hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 45: Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = a. $BC = \frac{a}{2}$. $SA = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC}$ Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Bài 46: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a, góc giữa và mặt phẳng (A'B'C') bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C khoảng cách giữa AA' với B'C theo a.

Bài 47: Cho khối lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh điểm A_1 cách đều ba điểm A, B, C. Cạnh bên A_1A tạo với mặt phẳng đáy góc α. Hãy tìm α, biết thể tích khối lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ bằng $2\sqrt{3}a^3$.

Bài 48: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, khoảng giữa AB và $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp

Bài 49: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, *AB* = 2*a*, tam *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*), *M* là trung điểm của *SD*, mặt phẳng (*ABM*) vuông góc với mặt phẳng (*SCD* đường thẳng *AM* vuông góc với đường thẳng *BD*. Tính thể tích khối *S.BCM* và khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (*SBC*).

Bài 50: Cho hình lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy là tam giác đều cạnh a, hình vuông góc của *A'* lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm *O* của tam giác *ABC*. mặt phẳng *(P)* chứa *BC* và vuông góc với *AA'*, cắt lăng trụ theo một thiết có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Bài 51: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C có thể tích V. Các mặt phẳng (Ab'C), A'BC) cắt nhau tại O. Tính thể tích khối tứ diện O.ABC theo V.

Bài 52: Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là hình thang AD và BC cùng góc với AB, AB = AD = a; BC = 2a; mặt bên SAB là tam giác đều nằm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M. N lần lượt là trung điểm các cạnh SC, CD. Tính thể tích khối chóp ADMN theo a.

Bài 53: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B AB = BC = a; AD = 2a. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy (ABCD). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 60^0. Tính tích khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB

Bài 54: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc BAD 60^0. O là giao điểm của AC và BD, H là trung điểm của BO, $SH \perp (ABC$ $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm thể tích của S.AHCD và tìm khoảng cách giữa AB và SC.

Bài 55: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a và góc giữa SB với mặt phẳng (ABC).

Bài 56: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a, SA = SB = a, $SD = a\sqrt{2}$ và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

Bài 57: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $AC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BC).

Bài 58: Cho hình chóp SABCB có đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh AB = a, AD = 2a,tam giác SAC đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, gọi M là trung điểm của SD, N là điểm trên cạnh SC sao SC = 3SN. Tính thể tích của khối chóp SABCD và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (ACM).

Bài 59: Trong mp(P) cho đường tròn đường kính AB = 2R; C là một điểm trên đường tròn, AC = R. Cạnh SA vuông góc với mp(P), góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC.

a. Chứng minh tam giác AHK vuông.

b. Tính thể tích của hình chóp S.ABC theo R.

Bài 60: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, tam giác SAB cân tại S và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0. Gọi H là trung điểm cạnh AB. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và tính cosin góc giữa hai đường thẳng CH và SD.

Bài 61: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AB = a, các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh S. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)

Bài 62: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Cạnh bên nghiêng đều trên đáy một góc 60^0. Hình chiếu đỉnh A lên đáy trùng tâm O đường tròn ngoại tiếp đáy, I là trung điểm BC. Tính góc giữa hai đường thẳng B'C và AI. Tính thể tích tứ diện B'AA'C'C.

Bài 63: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = 2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy và hai mặt bên còn lại tạo với mặt đáy một góc α. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a và α.

Bài 64: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi K là trung điểm của AB, H là giao điểm của BD với KC. Hai mặt phẳng (SKC), (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD
2. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Bài 65: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a v BC = 2a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, các mặt phẳng (SBC) v (SCD) cùng tạo với đáy một góc bằng nhau. Biết khoảng cách giữa hai đườn thẳng SA và BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{6}}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và tính côsin gó giữa hai đường thẳng SA và BD.

Bài 66: Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AC = 2a $\widehat{BAC} = 60^0$, SA vuông góc với mp(ABC) và SA = $a\sqrt{3}$, (a > 0).

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC.

Bài 67: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc vớ đáy. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của SB và AD. Tính thể tích của khối chó M.NBCD biết đường thẳng MN tạo với mặt đáy một góc 30^0 và MN = $2a\sqrt{3}$.

Bài 68: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có các cạnh bên bằng nhau và đáy ABC là hình chữ nhật. Biết AB = a, BC = $a\sqrt{3}$; gọi I là một điểm thuộc cạnh SC sa cho SI = 2CI và thoả mãn AI vuông góc với SC. Tính thể tích của khối chó S.ABCD theo a

Bài 69: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, mặt bên SAD tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính th tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, SB theo a.

Bài 70: Cho lăng trụ ABC.A'B'C', biết A'.ABC là hình chóp đều có cạnh đá bằng a. Góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (BCC'B') bằng 90^0. Tính th tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' v B'C theo a.

Bài 71: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, AB = 3, AC = 4; gó tạo bởi các mặt bên và đáy bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

Bài 72: Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi P, Q lần lượt l trung điểm của AB và CD, R là một điểm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Mặ phẳng (PQR) cắt AD tại S. Tính thể tích khối tứ diện SBCD theo a

Bài 73: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bê (SAB) vuông góc với đáy, hai mặt bên (SAC) và (SBC) cùng tạo với đáy góc 45^0 M, N lần lượt là trung điểm SB, SC. Tính thể tích khối chóp A.BCMN theo a.

Bài 74: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, tâm O và gó $\widehat{BAD} = 60^0$; D'O vuông góc với (ABCD), cạnh bên tạo với đáy một góc $\varphi = 60^0$ Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích khối chóp C.ADC'.

Bài 75: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại C cạnh đáy AB bằng 2a và góc $\widehat{ABC}$ bằng 30^0. Tính thể tích của khối lăng tr ABC.A'B'C' biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CB' bằng $\frac{a}{2}$.

ài 76: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều. Biết rằng mặt phẳng (A'BC) hợp với mặt đáy (ABC) một góc 30° và diện tích ΔA'BC bằng 18. Tính thể tích khối lăng trụ trên.

ài 77: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SC, SD. Chứng minh đường thẳng SN vuông góc với mặt phẳng (MEF).

ài 78: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại C, AB = 5 cm, BC = 4 cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa cạnh bên SC với mặt đáy (ABC) bằng 60°. Gọi D là trung điểm của cạnh AB

Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC.

ài 79: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy và SA = a. Biết ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = a, BC = 2a và SC vuông góc với BD.

Tính tan của góc giữa SC với mặt phẳng (ABCD).

Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM với M là trung điểm BC.

ài 80: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B' và B'C'.

Tính thể tích của khối tứ diện AD'MN theo a.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và D'N.

ài 81: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$, góc BAD bằng 60^0, (SAB) ⊥ (ABCD), gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và BC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và cosin giữa hai đường thẳng SM và DN.

ài 82: Cho tứ diện ABCD và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$ và tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện ABCD được phân chia bởi mặt phẳng (MNP).

ài 83: Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đáy là hình thoi. Biết diện tích 2 mặt chéo ACC_1A_1 và BDD_1B_1 là s_1, s_2. Biết $\widehat{BA_1D} = 90^0$. Tính thể tích hình hộp.

ài 84: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho CK = $\frac{2}{3}$a. Mặt phẳng (α) đi qua A, K và song song với BD, chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

ài 85: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có cạnh AB = AD = a, AA' = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc BAD = 60^0. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A'B'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng BDMN. Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

Bài 86: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có A'.ABC là hình chóp tam giác đều, đáy AB = a, cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa hai mp(ABC) và (A'BC). $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp A'BB'CC'.

Bài 87: Trong hình lăng trụ tam giác đều, hai đỉnh của đáy trên được nối với điểm của 2 cạnh đối diện thuộc đáy dưới. Góc tạo bởi các đường nối này $\frac{\pi}{3}$. Tính thể tích của hình lăng trụ nếu tam giác đáy có cạnh bằng a.

Bài 88: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$. Lấy điểm D thuộc BB_1; thuộc mặt nên AA_1C_1C; F thuộc mặt đáy ABC sao cho EB_1 // FD. Hỏi khối trụ $ABCA_1B_1C_1$ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu nếu $EB_1 = 1$, FD

$EF = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Bài 89: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc phẳng nhị [B,A'C,D].

Bài 90: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi a, góc BAD 60^0. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tí dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông

Bài 91: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng A'B và B'C.

b. Gọi N là trung điểm của BD'. Tính thể tích hình chóp ANBB'.

c. Gọi M là trung điểm bất kì thuộc AA'. Chứng minh rằng tỉ số thể tích hình MBCC'C' và hình lăng trụ ACBA'C'C' không phụ thuộc vị trí của điểm M.

Bài 91: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có cạnh AB cạnh bên SA vuông với đáy, cạnh bên SC hợp với đáy góc α và hợp với bên (SAB) một góc β.

a. Tính SC

b. Tính thể tích hình chóp.

Bài 92: Cho hình chóp tứ giác đều S.ẤBCD. Có cạnh đáy bằng a, gọi SH là đư cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (S bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Bài 93: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ vuông góc với mp (ABCD), SA = a. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AC và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lư B', D'. Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

Bài 94: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a. AD cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng BCM cắt cạnh SD Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

i 95: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và cạnh đáy $\beta\left(0^0 < \beta < 90^0\right)$. Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo β. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và β

i 96: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của khối chóp đều bằng $a\sqrt{2}$.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, SC, SD. Chứng minh rằng ΔSMN là tam giác đều.

Chứng minh rằng: SN $\perp$ mp(MPQ)

i 97: Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

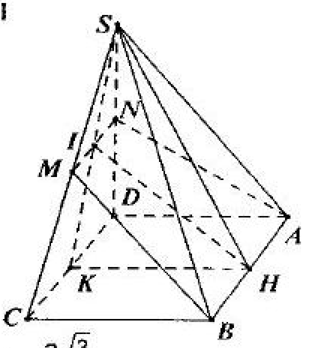
i 98: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông canh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

i 99: Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

i 100: Cho hình chóp S.ABCD có đáy BCD là hình thang. $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^0$, AB = BC = a. AD = 2a, SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Chứng minh rằng BCNM là hình chữ nhật và tính thể tích của khối chóp S.BCNM theo a.

HƯỚNG DẪN GIẢI

i 1:



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD và I là giao điểm của SK và MN

$\Rightarrow \widehat{SHK} = 60^0$, $\widehat{IHK} = 30^0$

Ta có $\begin{cases} AB \subset (P) \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow MN // AB // CD$

$\Rightarrow$ tứ giác ABMN là hình thang cân.

Tính S_{ABMN}, ta có IH là đường cao.

Vì tam giác SKH là tam giác đều cạnh a nên $IH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN).IH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right)\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$

Vì $SI \perp (ABMN) \Rightarrow SI$ là đường cao của khối chóp S.ABMN và $SI = \frac{SK}{2} = \frac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABMN}=\frac{1}{3}SI.S_{ABMN}=\frac{1}{3}\frac{a}{2}\frac{3\sqrt{3}}{8}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Bài 2:

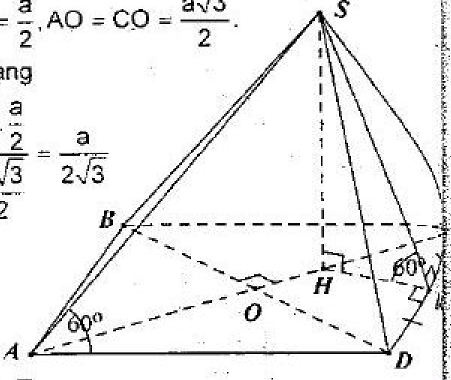
1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD) thì $H\in AC$. (1)

ABCD là hình thoi $\Rightarrow HB=HD\Rightarrow SB=SD=SC$.

Gọi M là trung điểm DC $\Rightarrow SM\perp DC$ (2)

Từ (1), (2) $DC\perp mp(SHM)\Rightarrow \widehat{HMS}=(\widehat{(SDC),(ABCD)})=60^0$

Ta có $BD=a, AC=a\sqrt{3}, BO=DO=\frac{a}{2}, AO=CO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



- Hai tam giác CMH và COD đồng dạng

$$\Rightarrow\frac{HM}{OD}=\frac{CM}{OC}\Rightarrow HM=\frac{OD.CM}{OC}=\frac{\frac{a}{2}\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$

- Lại có: $h=SH=MH.\tan 60^0=\frac{a}{2}$;

$S(ABCD)=\frac{1}{2}BD.AC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V(S.ABCD)=\frac{1}{3}h.S(ABCD)=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Vậy $V(S.ABCD)=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

2. Vì $AD//mp(SBC)\Rightarrow d(AD,SC)=d(AD,mp(SBC))=d(D,mp(SBC))$

Có: $SM=\sqrt{SH^2+HM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $d(D,mp(SBC))=\frac{3.V(SBCD)}{S(SBC)}$

$V(SBCD)=\frac{1}{2}V(S.ABCD)=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$; $S(SBC)=S(SCD)=\frac{1}{2}SM.DC=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow d(AD,SC)=d(D,mp(SBC))=\frac{3.V(SBCD)}{S(SBC)}=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{24}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}}=\frac{3a}{4}.$$

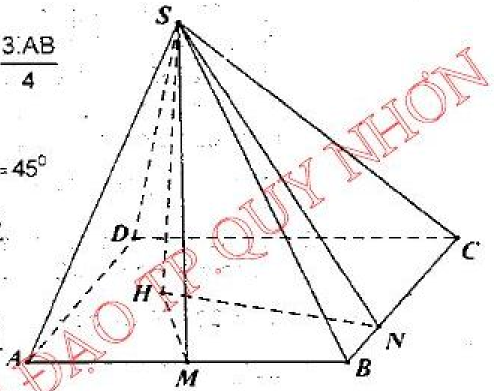
Vậy $d(AD,SC)=\frac{3a}{4}$

Bài 3:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABCD); gọi M, N
lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H lên các đường thẳng AB, BC.

Ta có $AB\perp(SHM)\Rightarrow AB\perp SM$

$\Rightarrow(\widehat{(SAB),(ABCD)})=(\widehat{SM,HM})=\widehat{SMH}=60^0$



Tam giác SAB đều nên

$SM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SH=SM.\sin 60^0=\frac{3.AB}{4}$

Do $BC\perp(SHN)\Rightarrow BC\perp SN$

$\Rightarrow(\widehat{(SBC),(ABCD)})=(\widehat{SN,HN})=\widehat{SNH}=45^0$

$\Rightarrow SN=\frac{SH}{\sin 45^0}=SH.\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}.AB}{4}$

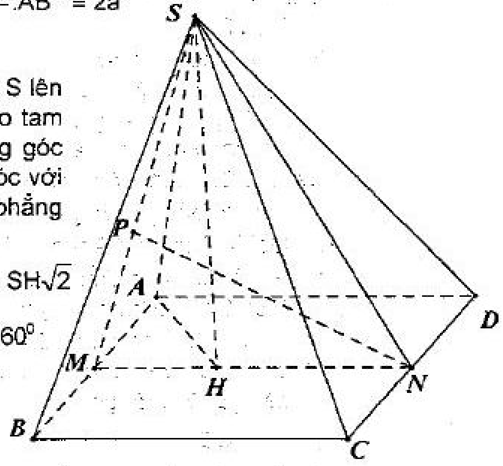
Ta có

$S_{SBC}=\frac{1}{2}SN.BC=\frac{3\sqrt{2}AB^2}{8}=\frac{3\sqrt{2}a^2}{2}$

$\Rightarrow AB=2a$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3.AB}{4}.AB^2=2a^3$

Bài 4:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy, M là trung điểm AB và do tam giác SAB cân tại S nên SM vuông góc với AB và kết hợp với SH vuông góc với đáy suy ra AB vuông góc với mặt phẳng SMN nên theo giả thiết ta được:

$(\widehat{SA,(ABCD)})=\widehat{SAH}=45^0\Rightarrow SA=SH\sqrt{2}$

$(\widehat{(SAB),(ABCD)})=(\widehat{SM,MH})=\widehat{SMH}=60^0$

$\Rightarrow SM=SH\frac{2}{\sqrt{3}}$

Từ điểm N kẻ NP vuông góc với SM thì dễ thấy NP là khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD suy ra $NP=a\sqrt{6}$. Ta có

$SH.MN=NP.SM\Leftrightarrow SH.AB=a\sqrt{6}.SH\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow AB=2\sqrt{2}a\Leftrightarrow SH=a\sqrt{3}$

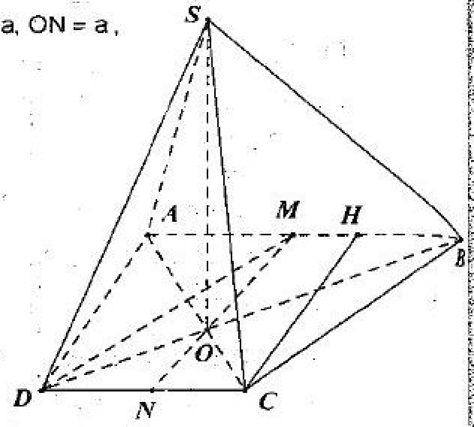
Trong tam giác SAM ta có

$SA^2=AM^2+SM^2\Leftrightarrow 2SH^2=\frac{4SH^2}{3}+2a^2\Leftrightarrow SH=a\sqrt{3}$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{3}.8a^2}{3}=\frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$

Bài 5:

- Gọi H là hình chiếu của C trên AB và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Ta có $HB = \dfrac{AB - CD}{2} = a \Rightarrow CH = 3a,\ ON = a$,

do đó ΔOAB vuông cân tại O.

Suy được $OA = OB = 2a\sqrt{2}$,

do đó $SO = OB = 2a\sqrt{2}$.

Khi đó thể tích

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = 6a^3\sqrt{2}.$$

+ Ta có BC // DM

$$\Rightarrow \left(\widehat{SD,BC}\right) = \left(\widehat{SD,DM}\right) = \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

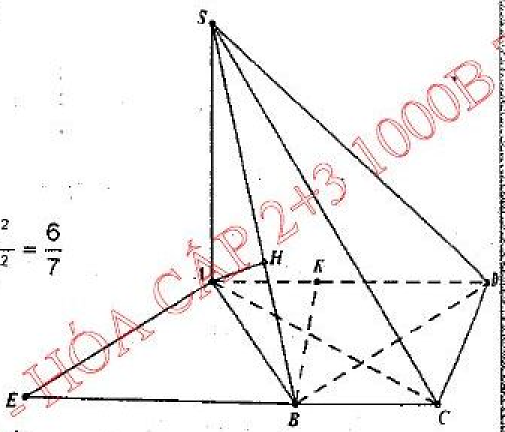
Còn có:

$$DM = BC = a\sqrt{10},\ SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = a\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow SM = 2a\sqrt{3}.\ \text{Vậy } \cos\widehat{SDM} = \frac{2}{5}$$

Kết luận: $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Bài 6:



Trong tam giác vuông SAB có

$SA^2 = SH.SB$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{6a^2}{7a^2} = \frac{6}{7}$$

$$V_{HSDC} = \frac{6}{7}V_{B.SCD} = \frac{6}{7}V_{S.BCD}$$

$$= \frac{6}{7}SA.S_{BCD} = \frac{6}{7}a\sqrt{6}.S_{BCD}$$

K là hình chiếu của B trên AD ta có:

$$BK.AD = AB.BD \text{ suy ra } BK = \frac{AB.BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}BK.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Suy ra: $V_{HSDC} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{14}$.

Do AD // (SBC) nên $d_{(AD,SC)} = d_{(AD,(SBC))} = d_{(A,(SBC))}$

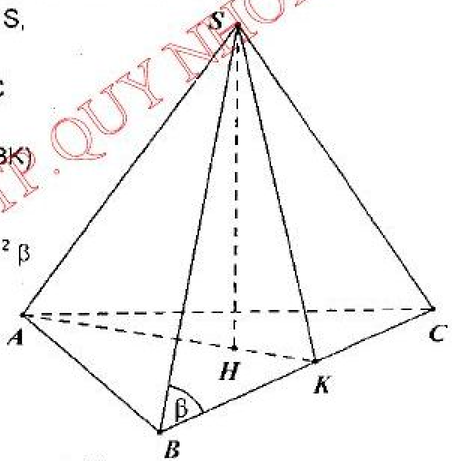
Dựng hình bình hành ADBE. Do $AB \perp BD$ nên $AB \perp DE$

Đặt $d_{(A,(SBC))} = h$ ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{9}{6a^2}$$

Suy ra $d_{(AD,SC)} = h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 7:



Xác định đúng góc $\beta = \widehat{SBA} = \widehat{SBC} = \ldots\ldots$ và $SA = SB = SC$

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ S,

ta có $SH = h$, và H là tâm đáy.

Gọi K là trung điểm BC ta có $SK \perp BC$

Đặt cạnh đáy $BC = 2x$, khi đó $BK = x$

Ta có $SK = x.\tan\beta$ (trong tam giác SBK)

Trong ΔSHK:

$$SH^2 + HK^2 = SK^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{x^2}{3} = x^2.\tan^2\beta$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3h^2}{3\tan^2\beta - 1}$$

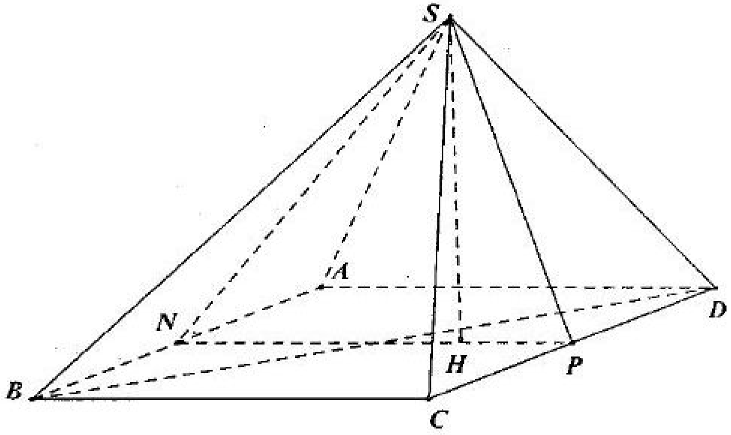
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3h^2\sqrt{3}}{3\tan^2\beta - 1}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.h.\frac{3h^2\sqrt{3}}{3\tan^2\beta - 1} = \frac{h^3\sqrt{3}}{3\tan^2\beta - 1}\ (\text{đ.v.t.t})$$

$$\beta \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan\beta \in [1;+\infty).\ \text{Suy ra } V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3\tan^2\beta - 1} \le \frac{h^3\sqrt{3}}{3.1 - 1} = \frac{h^3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } \max V = \frac{h^3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

Bài 8:



Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Suy ra $CD \perp NP,\ CD \perp SP \Rightarrow CD \perp (SNP)$. Gọi H là hình chiếu của S trên NP. Suy ra $SH \perp NP,\ SH \perp CD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tam giác SNP có $SN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SP = \frac{a}{2}, NP = a$

$\Rightarrow NP^2 = SN^2 + SP^2 \Rightarrow \Delta SNP$ vuông tai S

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

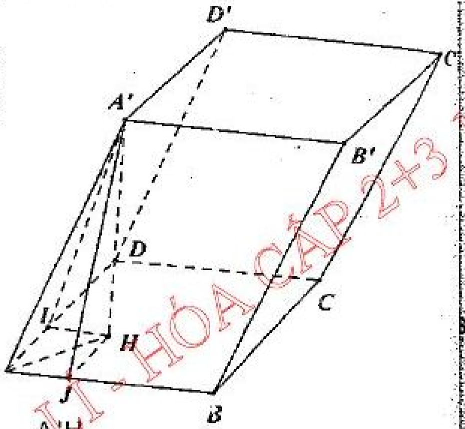
$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Gọi K là hình chiếu của B trên (SAD) thì $BK = d(B;(SAD))$. Gọi φ là góc giữa BD và (SAD) thì $\varphi = BDK$ và $\sin\varphi = \frac{BK}{BD}$

$$V_{SABD} = \frac{1}{3}S_{SAD}.BK.\ V_{SABD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}, S_{SAD} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$$

Suy ra $BK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{BK}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{14}}$

Bài 9:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABCD). I,J lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AD và AB.

Diện tích đáy ABCD là:

$S = AB.AD = 2a^2$ (đvdt)

Vì AD $\perp$ (A'HI) $\Rightarrow$ A'IH = 60^0

AB $\perp$ (A'HJ) $\Rightarrow$ A'JH=30^0

Xét Δ A'HJ vuông tại H:

$$HJ = \frac{A'H}{\tan 30^0} = A'H\sqrt{3}$$

Xét Δ A'HI vuông tại H: $HI = \frac{A'H}{\tan 60^0} = \frac{A'H}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{HJ^2 + HI^2} = A'H\sqrt{3 + \frac{1}{3}} = \frac{A'H\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$

Xét Δ A'HA vuông tại H: $A'A^2 = AH^2 + A'H^2 = \frac{10A'H^2}{3} + A'H^2 = \frac{13A'H^2}{3}$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{13A'H^2}{3} \Leftrightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

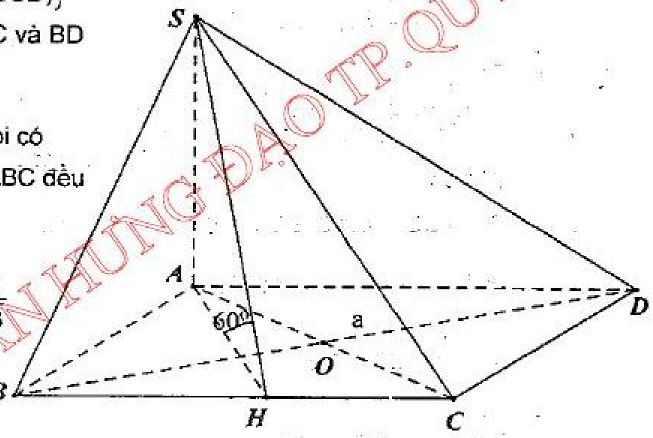
Thể tích khối hộp: $V = S_{ABCD}.A'H = 2a^2.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ (đvtt)

Bài 10:

Do (SAB) $\perp$ (ABCD) và (SAD) $\perp$ (ABCD) nên SA $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ SA $\perp$ BC

Hạ AH $\perp$ BC $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAH)

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ \Rightarrow BC \perp SH \\ BC = (SBC) \cap (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (\widehat{(SBC),(ABCD)}) = (\widehat{AH,SH}) = \widehat{SHA} = 60^0$$



Gọi O là giao của AC và BD

$$\Rightarrow BO = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$$

Do ABCD là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^0$ nên Δ ABC đều

$$\Rightarrow AH = BO = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BO}{\sin 60^0} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

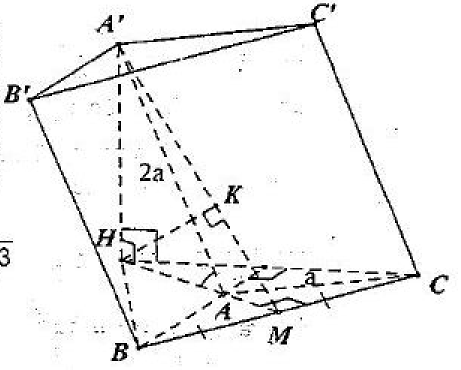
Diện tích hình thoi ABCD là $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{3}}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Trong tam giác SAH có $SA = AH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích S.ABCD là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{12}$

Bài 11:

Theo bài ra góc giữa cạnh bên AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0 nên góc $\widehat{A'AH} = 60^0$ và do AA' = 2a nên $A'H = a\sqrt{3}$ là một đường cao của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và AH = a.



Mặt khác tam giác ABC cân tại A nên nếu gọi M là trung điểm của cạnh BC thì đoạn AM là một đường cao của tam giác ABC và AM < AC = AB = AH = a nên H nằm ngoài tam giác ABC và nằm trên tia đối của tia AM suy ra A là trọng tâm của tam giác HBC.

Khi đó ta có $AM = \frac{a}{2} \Rightarrow BC = 2MC = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AM = \frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối lăng trụ đã cho là : $V = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3}{4}$

Nối A'M, ta có mp(A'HM) $\perp BC$

Kẻ $HK \perp A'M, K \in A'M$ thì $HK \perp (A'BC)$

nên độ dài đoạn HK là $d(H;(A'BC)) = HK$.

Ta có : $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow HK = \frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Suy ra khoảng cách $d(H,(A'BC)) = \frac{3a}{\sqrt{7}}$.

Ta lại có : $\frac{d(H,(A'BC))}{d(A,(A'BC))} = \frac{HM}{AM} = 3$.

Vậy khoảng cách $d(A,(A'BC)) = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

Bài 12:

Qua B, C, D lần lượt dựng các đường thẳng Song song với CD, BD, BC cắt nhau tại M, N, P

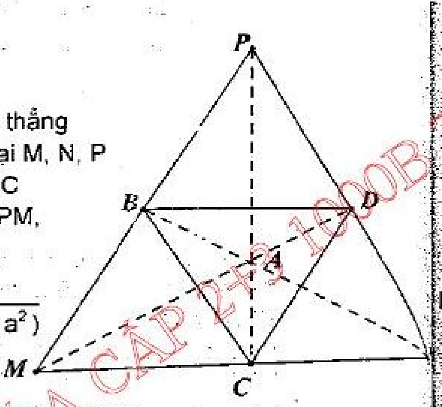
Ta có MN = 2BD, MP = 2CD, NP = 2BC

từ đó ta có các tam giác AMN, APM, ANP vuông tại A

Đặt $x = AM, y = AN, AP = z$ ta có

$x = \sqrt{2(a^2+c^2-b^2)}$, $y = \sqrt{2(b^2+c^2-a^2)}$

$z = \sqrt{2(a^2+b^2-c^2)}$



Vậy $V = \frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$

Bài 13:

a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Cạnh bên SC có hình chiếu lên mặt đáy ABCD là AC nên góc của SC hợp với mặt đáy là góc $\widehat{SCA} = 30°$.

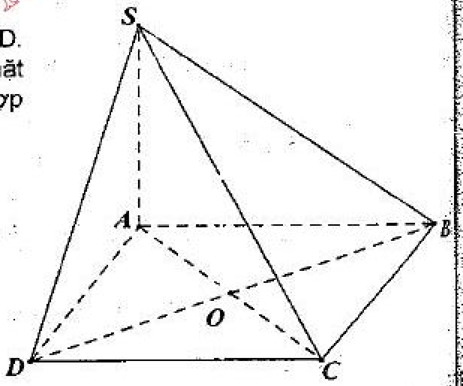
Tam giác vuông SAC cho:

$\tan 30° = \frac{SA}{AC} \Rightarrow AC = \frac{SA}{\tan 30°} = \frac{6a}{\sqrt{3}}$

Ta có $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{6a}{\sqrt{6}} = a\sqrt{6}$

Vậy diện tích hình vuông

$ABCD = (a\sqrt{6})^2 = 6a^2$



b. Trong tam giác vuông SAO vẽ đường cao AH

Ta có BD vuông góc với SA và AC nên BD vuông góc với mp(SAC)

Suy ra BD vuông góc với AH

AH vuông góc với BD và SO nên AH vuông góc với (SBD)

Vậy AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)

Tam giác vuông SAO có đường cao AH cho $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{12a^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{12a^2}{7}$

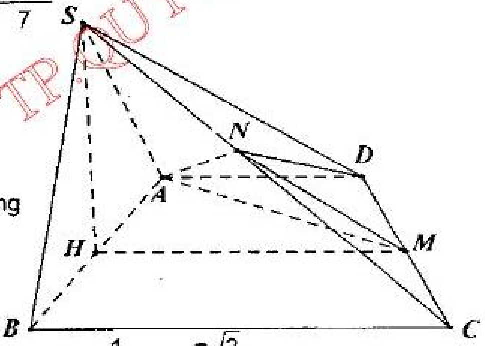
Vậy $AH = \frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$

Bài 14:

Gọi H là trung điểm của AB.

Tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mp vuông góc với (ABCD)

nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH \perp (ABCD)$.



Chiều cao của khối chóp ADMN kẻ từ M: $h = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Diện tích tam giác ADN: $S = \frac{1}{2}d(N,AD).BC = \frac{a^2}{4}$

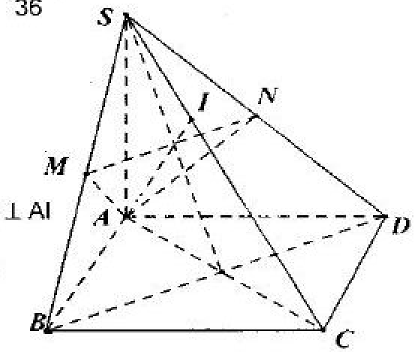
Thể tích khối chóp ADMN: $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ADN}.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Bài 15:

Chứng minh $SC \perp AI$: Ta có

$\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp SC;$

$\begin{cases} AN \perp SD \\ AN \perp CD \end{cases} \Rightarrow AN \perp SC \Rightarrow SC \perp (AMN) \Rightarrow SC \perp AI$



Kẻ $IH // BC \Rightarrow IH \perp (SAB)$ (vì $BC \perp (SAB)$)

$\Rightarrow V_{MBAI} = \frac{1}{3}S_{\Delta MAB}.IH$

$SI.SC = SA^2 \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{\sqrt{SA^2+AC^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\frac{SI}{SC} = \frac{IH}{BC} \Rightarrow IH = \frac{SI.BC}{SC} = \frac{a}{3}$

$S_{\Delta MAB} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow V_{MBAI} = \frac{1}{3}S_{\Delta MAB}.IH = \frac{a^3}{36}$

Bài 16:

Tính được $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

Kẻ $SH \perp AD \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AD (H \in AD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases}$

Kẻ $HK \perp AB (K \in AB) \Rightarrow (SHK) \perp AB \Rightarrow SK \perp AB$

$\Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \widehat{SKH} = 45^0$

Đặt $SH = x \Rightarrow HK = x; AH = \dfrac{HK}{\sin 60^0} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$

Xét tam giác vuông SAH ta có : $SA^2 = AH^2 + SK^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + \dfrac{4x^2}{3} \Leftrightarrow x =$

Khi đó : $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{20}$

Bài 17:

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Kẻ $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AKB) \Rightarrow SC \perp KB$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAC);(SBC)}\right) = \left(\widehat{KA;KB}\right) = 60^0 \Rightarrow \widehat{AKB} = 60^0 \vee \widehat{AKB} = 120^0$

Nếu $\Rightarrow \widehat{AKB} = 60^0$ thì dễ thấy ΔKAB đều $\Rightarrow KA = KB = AB = AC$ (vô lí)

Vậy $\widehat{AKB} = 120^0$

ΔKAB cân tại $K \Rightarrow \widehat{AKH} = 60^0 \Rightarrow KH = \dfrac{AH}{\tan 60^0} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

Trong ΔSHC vuông tại H, đường cao KH có $\dfrac{1}{KH^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HS^2}$, tha

$KH = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ và $HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ vào ta được $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.dt_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{8}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{32}$

Bài 18:

Kẻ NK, MP // SA; KP, BM, CD kéo dài cắt nhau tại I.

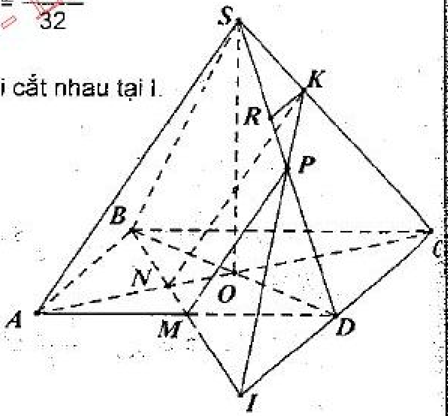
Suy ra M, D là trung điểm BI và CI.

Do N là trọng tâm ΔABD nên:

$\dfrac{CK}{CS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d(K;(ABC)) = \dfrac{2}{3} SO = a$

$S_{\Delta IBC} = \dfrac{1}{2} IC.BC.\sin C = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{IBCK} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

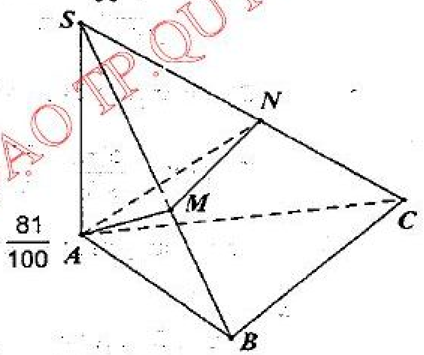


Kẻ KR// DC. $\dfrac{KP}{PI} = \dfrac{KR}{ID} = \dfrac{KR}{DC} = \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{1}{3}$

Suy ra: $\dfrac{IP}{IK} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{V_{IMDP}}{V_{IBCK}} = \dfrac{IM}{IB}\dfrac{ID}{IC}\dfrac{IP}{IK} = \dfrac{3}{16} \Rightarrow V_{KPBCDM} = \dfrac{13}{16}.V_{IBCK} = \dfrac{13\sqrt{3}a^3}{96}$

Bài 19:



Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM.SN}{SB.SC}$

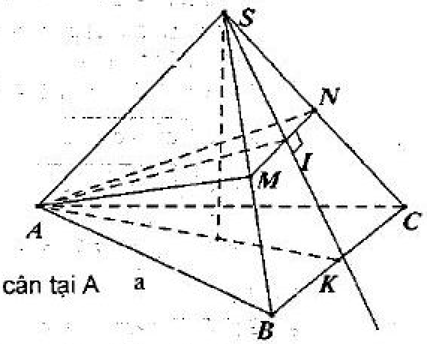
Trong đó $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.3a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$

Mặt khác $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB}\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SM^2}{SB^2} = \dfrac{81}{100}$

$\Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{81}{100}.\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$

$\Rightarrow V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = \dfrac{19\sqrt{3}a^3}{400}$

Bài 20:



Gọi K là trung điểm của BC, SK cắt MN tại I, lúc đó I sẽ là trung điểm của SK và MN.

Theo giả thiết hai mp (SBC) và mp (AMN) vuông góc với nhau mà đường thẳng SI vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng:

Suy ra $SI \perp (AMN) \Rightarrow SI \perp AI \Rightarrow \Delta SAK$ cân tại A a

$\Rightarrow SA = SK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và ta có:

$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow SI = \dfrac{SK}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

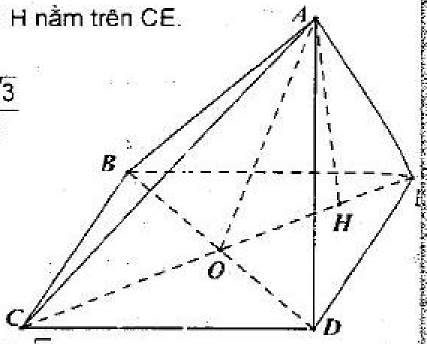
Từ đó ta tính được $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{8}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

Vậy diện tích của tam giác AMN là : $S = \dfrac{1}{2} MN.AI = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt)

Bài 21:

Ta có $CO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD \perp (ACE)$

Chứng minh được khoảng cách giữa AE và BD là $AO = \dfrac{3a}{4}$



Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD) thì H nằm trên CE.

Tam giác AOE vuông tại A có:

$$AE = \sqrt{OE^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$2.S_{AOE} = AH.OE = AE.AO$$

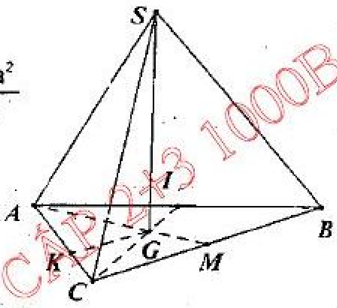
$$\Rightarrow AH = \frac{AE.AO}{EO} = \frac{3a}{8}$$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AH.CO.BD = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$

Ta có $CE = a\sqrt{3}$, $HE = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow CH = \frac{7a\sqrt{3}}{8}$.

Từ Δ vuông ACH có $\tan C = \frac{AH}{CH} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

Bài 22:



Gọi I là trung điểm AB, $CI = \frac{3a}{2} \Rightarrow IG = \frac{a}{2}$

Tam giác vuông BIG $\Rightarrow BG^2 = BI^2 + IG^2 = \frac{10a^2}{4}$

$$SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \sqrt{\frac{14a^2}{4} - \frac{10a^2}{4}} = a$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SG = \frac{1}{3}\frac{1}{2}3a.\frac{3a}{2}.a = \frac{3a^3}{4}$$

Kẻ $GK \perp AC, K \in AC, (GK // BC) \Rightarrow SK \perp BC$

$$GK = \frac{GC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SK = \sqrt{SG^2 + GK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; AC = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

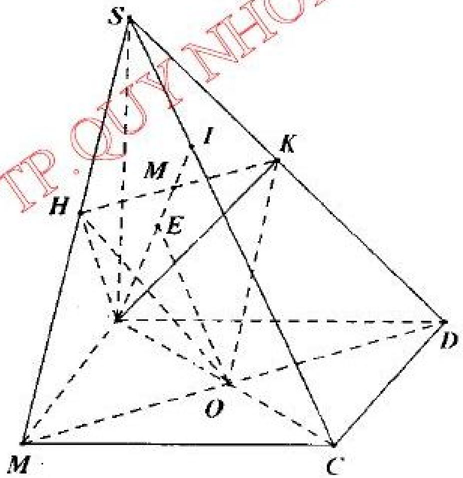
$$\Rightarrow S_{SAC} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Gọi *h* là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) $\Rightarrow h = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAC}} = a\sqrt{3}$

Bài 23:

- + BC vuông góc với (SAB)
  - ⇒ BC vuông góc với AH mà AH vuông với SB
  - ⇒ AH vuông góc với (SBC) ⇒ AH vuông góc SC (1)
- + Tương tự AK vuông góc SC (2)
  - (1) và (2) ⇒ SC vuông góc với (AHK)
  - $SB^2 = AB^2 + SA^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{3}$
  - $AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (do 2 tam giác SAB và SAD bằng nhau và cùng vuông tại A)



Ta có HK song song với BD nên

$$\frac{HK}{BD} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

Kẻ OE // SC

$\Rightarrow OE \perp (AHK)$ (do $SC \perp (AHK)$)

suy ra OE là đường cao của hình chóp OAHK và

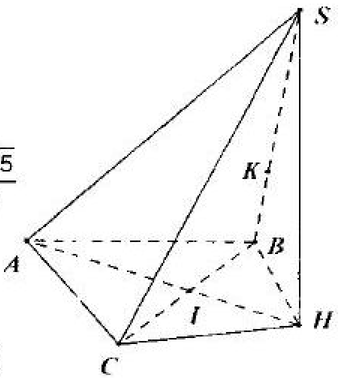
$$OE = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{4}SC = \frac{a}{2}$$

Gọi AM là đường cao của tam giác cân AHK ta có

$$AM^2 = AH^2 - HM^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow AM = \frac{2a}{3}$$

$$V_{OAHK} = \frac{1}{3}OE.S_{AHK} = \frac{1}{3}\frac{a}{2}.\frac{1}{2}HK.AM = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$$ (đvtt)

ài 24:



Ta có $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IH} \Rightarrow$ H thuộc tia đối của tia IA và IA = 2IH

$BC = AB\sqrt{2} = 2a$; $AI = a$; $IH = \frac{IA}{2} = \frac{a}{2}$

$$AH = AI + IH = \frac{3a}{2}$$

Ta có

$$HC^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC.AH\cos 45^0 \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Vì $SH \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{SC;(ABC)}) = \widehat{SCH} = 60^0$

$$SH = HC\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2\frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} BI \perp AH \\ BI \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow BI \perp (SAH)$$

Ta có $\frac{d(K;(SAH))}{d(B;(SAH))} = \frac{SK}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(K;(SAH)) = \frac{1}{2}d(B;(SAH) = \frac{1}{2}BI = \frac{a}{2}$

i 25:

ưng minh rằng mặt phẳng (SBM) vuông góc với mặt phẳng (SAC)

Xét hai tam giác vuông ABM và ABC có:

$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \Delta BAM \sim \Delta CBA \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA}$

$\Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAI} = \widehat{BCA} + \widehat{BAI} = 90^0$

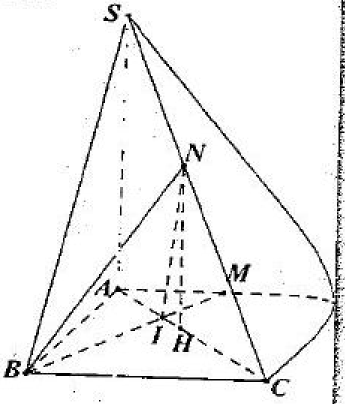
$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \to MB \perp AC$ (1)

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BM \perp (SAC)$

Vậy (SBM) vuông góc với (SAC)

Tính thể tích



Gọi H là trung điểm AC, suy ra $NH = \frac{a}{2}$

CM được NH là đường cao của tứ diện ABNI.

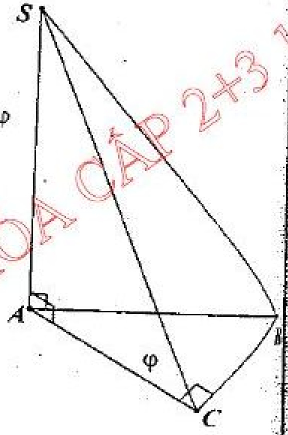
$\Rightarrow V = \frac{1}{3} NH.S_{\Delta ABI}$

Trong tam giác vuông ABM tính được

$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (tam giác ABI vuông tại I)

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ (đvtt)

Bài 26:



Gọi φ là góc giữa hai mp (SCB) và (ABC).

Ta có : $\varphi = \widehat{SCA}$; $BC = AC = a.\cos\varphi$; $SA = a.\sin\varphi$

Vậy

$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}AC.BC.SA$

$= \frac{1}{6}a^3\sin\varphi.\cos^2\varphi = \frac{1}{6}a^3\sin\varphi\left(1 - \sin^2\varphi\right)$

Xét hàm số $f(x) = x - x^3$ trên khoảng $(0; 1)$

Ta có $f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Từ đó ta thấy trên khoảng (0;1) hàm số f(x) liên tục và có một điểm cực trị điểm cực đại, nên tại đó hàm số đạt GTLN hay $\underset{x \in (0;1)}{Max} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

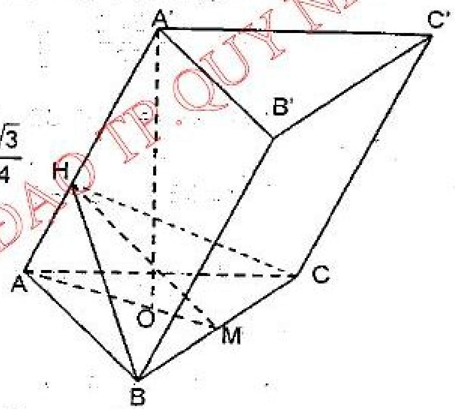
Vậy $MaxV_{SABC} = \frac{a^3}{9\sqrt{3}}$, đạt được khi $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ (với 0 $\varphi < \frac{\pi}{2}$)

Bài 27:

Gọi M là trung điểm BC ta thấy: $\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ A'O \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Kẻ $MH \perp AA'$, (do $\angle A$ nhọn nên H thuộc trong đoạn AA'.)

Do $\left.\begin{matrix} BC \perp (A'AM) \\ HM \in (A'AM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow HM \perp BC$.



Vậy HM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC, do đó $d(AA',BC) = HM = a\frac{\sqrt{3}}{4}$

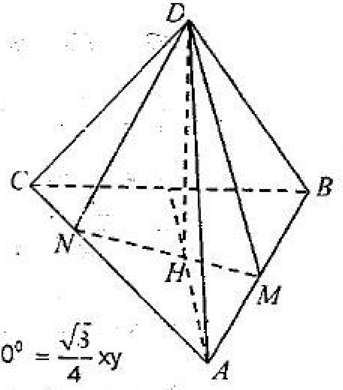
Xét 2 tam giác đồng dạng AA'O và AMH, ta có: $\frac{A'O}{AO} = \frac{HM}{AH}$

$\Rightarrow A'O = \frac{AO.HM}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{4}{3a} = \frac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ:

$V = A'O.S_{ABC} = \frac{1}{2}A'O.AM.BC = \frac{1}{2}\frac{a}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Bài 28:



Dựng $DH \perp MN = H$

Do $(DMN) \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp (ABC)$ mà D.ABC là tứ diện đều nên H là tâm tam giác đều ABC

Trong tam giác vuông DHA:

$DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Diện tích tam giác AMN là $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$

Thể tích tứ diện D.AMN là $V = \frac{1}{3}S_{AMN}.DH = \frac{\sqrt{2}}{12}xy$

Ta có: $S_{AMN} = S_{AMH} + S_{AMH} \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy.\sin 60^0 = \frac{1}{2}x.AH.\sin 30^0 + \frac{1}{2}y.AH.\sin 30^0$

$\Leftrightarrow x + y = 3xy$.

Bài 29:

Tính thể tích

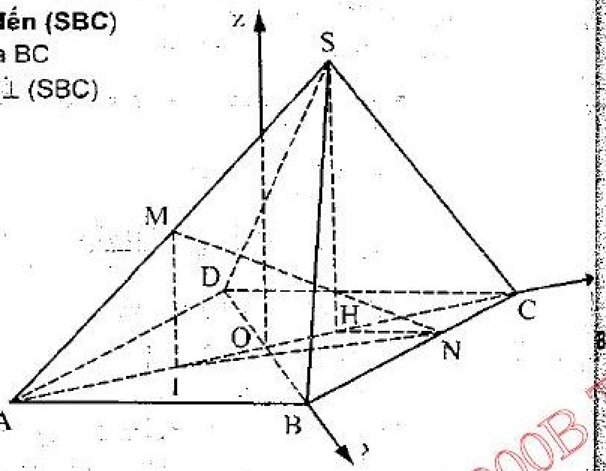
Dựng $HI \perp AC \Rightarrow SI \perp AC$ (định lý 3 đường vuông góc) $\Rightarrow \widehat{SIH} = 60^0$

Xét Δ SHI có $\tan 60^0 = \frac{SH}{HI} \Rightarrow SH = HI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$$S_{HABC} = \frac{(AH + BC).AB}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} + a\right).a}{2} = \frac{3a^2}{4}$$

$$V_{S.HABC} = \frac{1}{3}.S_{HABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$$

Tính khoảng cách từ H đến (SBC)



Gọi J là trung điểm của BC

Dựng $HK \perp SJ \Rightarrow HK \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(H;(SBC)) = HK$

Ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HJ^2}$$

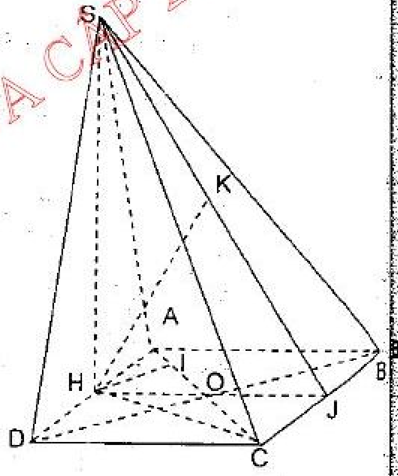
$$= \frac{1}{\frac{a^2.6}{16}} + \frac{1}{a^2}$$

$$= \frac{8}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{11}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{a\sqrt{33}}{11}.$$

Vậy $d(H;(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{33}}{11}$

Bài 30:



Gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABCD), SB = SC = SD nên H là tâm tam giác đều BCD. Gọi I là trung điểm HA thì MI // SH nên $MI \perp (ABCD)$ và góc giữa MN với mp (ABCD) là $\widehat{MNI} = 60^0$

TheoTa-let HN // AB và tam giác HNI có

$HN = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$,

$HI = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$\widehat{NHI} = 150^0$

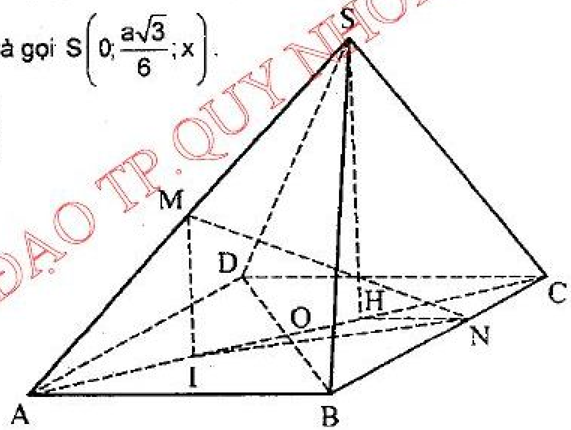
Áp dụng định lý hàm cos

$$NI^2 = HN^2 + HI^2 - 2HN.HI\cos 150^0 = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow NI = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Tam giác vuông MIN có ; $MI = NI.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{21}}{3} \Rightarrow SH = 2MI = \dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$

Thể tích khối chóp S.ABCD $= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AC.DB.SH = \frac{1}{6}.a\sqrt{3}.a.\frac{2\sqrt{21}a}{3} = \frac{\sqrt{7}.a^3}{3}$

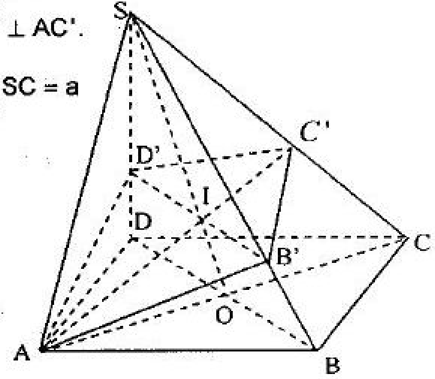
Chú ý: Có thể chọn hệ toạ độ và gọi $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};x\right)$.



Từ giả thiết góc tạo bởi MN với mặt phẳng (ABCD) bằng 60^0 tìm ra

$$x = \frac{2\sqrt{21}.a}{3}$$

Bài 31:



Gọi O là giao điểm AC và BD; I là giao điểm SO và AC'.

Trong mặt phẳng (SBD), qua I kẻ đường thẳng song song cắt SB, SD lần lượt tại B' và D'

Từ $BD \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Ta có: $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow SC = 2a \Rightarrow AC' = \frac{1}{2}SC = a$

Do I là trọng tâm tam giác SAC

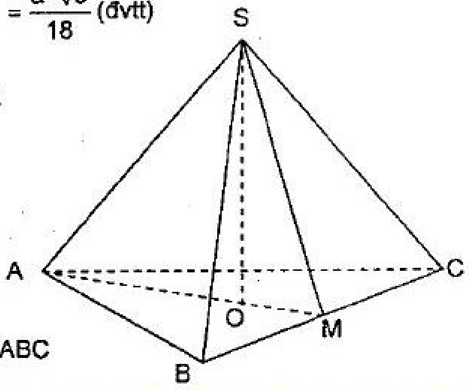
$\Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2a}{3}$.

$\Rightarrow S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC'.N'D' = \frac{a^2}{3}$

Vậy đường cao h của hình chóp S.AB'C'D' chính là đường cao của tam giác đều SAC'

$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}h.S_{AB'C'D'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ (đvtt)

Bài 32:



Gọi M là trung điểm của BC và O là hình chiếu của S lên AM.

Suy ra: $SM = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$\widehat{AMS} = 60^0$ và $SO \perp mp(ABC)$

$\Rightarrow d(S; BAC) = SO = \dfrac{3a}{4}$

Gọi V_{SABC} là thể tích của khối chóp S.ABC

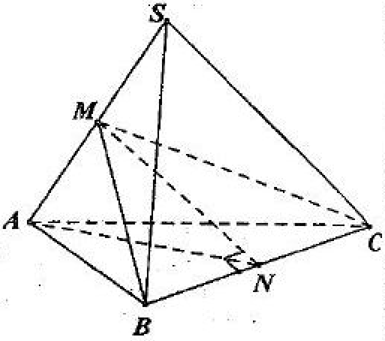
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (đvtt)

Mặt khác, $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta SAC}.d(B; SAC)$

ΔSAC cân tại C có CS = CA = a; $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\Delta SAC} = \frac{a^2\sqrt{13}\sqrt{3}}{16}$

Vậy: $d(B;\ SAC) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Bài 33:



Theo định lí côsin ta có:

$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos\widehat{SAB}$

$= 3a^2 + a^2 - 2.a\sqrt{3}.a.\cos 30^0 = a^2$

Suy ra SB = a.

Tương tự ta cũng có SC = a.

Gọi M là trung điểm của SA, do hai tam giác SAB và SAC là hai tam giác cân nên MB ⊥ SA, MC ⊥ SA.

Suy ra SA ⊥ (MBC).

$\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.c.c) ⇔ MB = MC ⇔ ΔMBC cân tại M.

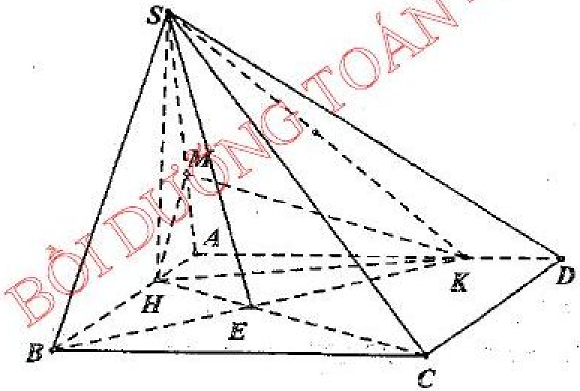
Gọi N là trung điểm của BC

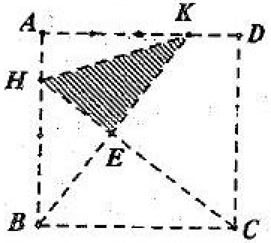
suy ra MN ⊥ BC. Tương tự ta cũng có MN ⊥ SA.

$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $V_{S.MBC} = \frac{1}{3}SM.\frac{1}{2}MN.BC = \frac{1}{6}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{32}$ (đvtt)

Bài 34:





ΔSHB vuông tại H có $\widehat{SBH} = 30^0$ nên $SH = BH.\tan 30^0 = a\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = AB^2 = 16a^2$.

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{16a^3\sqrt{3}}{3}$.

Theo giả thiết ta có: BH = 3a; HA = a; AK = 3a và KD = a.

$S_{BHKC} = S_{ABCD} - S_{AHK} - S_{CDK}$

$= (4a)^2 - \frac{1}{2}.a.3a - \frac{1}{2}a.4a = 16a^2 - \frac{3a^2}{2} - 2a^2 = \frac{25}{2}a^2$.

Ta có $V_{BHKC} = \frac{1}{3}S_{BHKC}.SH$.

Vậy $V_{BHKC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{25}{2}a^2 = \frac{25\sqrt{3}a^3}{6}$.

b. Ta có: AD ⊥ AB và AD ⊥ SH nên AD ⊥ SA ⇒ $\widehat{SAK} = 90^0$.

SH ⊥ HK nên $\widehat{SHK} = 90^0$.

CH ⊥ BK và BK ⊥ SH nên BK ⊥ (SKE) ⇒ $\widehat{SEK} = 90^0$.

Vậy SAHEK nội tiếp mặt cầu có đường kính là SK.

Ta có $SK^2 = SH^2 + HK^2 = 3a^2 + 10a^2 = 13a^2 \Rightarrow SH = a\sqrt{13}$.

Vậy $V_{mc} = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}(a\sqrt{13})^3 = \frac{52\pi a^3\sqrt{13}}{3}$

c. Ta có $\frac{d(M; ABCD)}{d(S; ABCD)} = \frac{AM}{AS} = \frac{AM.AS}{AS^2} = \frac{AH^2}{AS^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{d(M; ABCD)}{SH} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow d(M; (ABCD)) = \frac{1}{4}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ta có:

$\Delta BEH \sim \Delta BAK \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BK} \Rightarrow \frac{BE}{BK} = \frac{BH.BA}{BK^2} = \frac{3a.4a}{25a^2} = \frac{12}{25}$

$\Rightarrow \frac{S_{BEH}}{S_{BAK}} = \frac{BH}{BA}.\frac{BE}{BK} = \frac{3}{4}.\frac{12}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{AHEK}}{S_{ABK}} = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow S_{AHEK} = \frac{16}{25}.S_{BAK} = \frac{16}{25}.\frac{1}{2}3a.4a = \frac{96a^2}{25}$.

Do đó $V_{M.AHEK} = \frac{1}{3}S_{AHEK}.d(M; ABCD) = \frac{1}{3}.\frac{96a^2}{25}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{8a^3\sqrt{3}}{25}$.

Bài 35:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$

$BI = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow \Delta ABI$ là tam giác đều cạnh a.

Trong (ABC) kẻ HK ⊥ AB , IJ ⊥ AB, suy ra HK // IJ // AC

$IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (đường trung bình)

$SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$

Vậy $AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp SK$

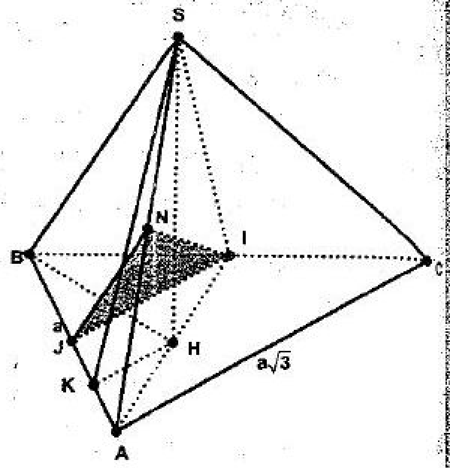
Góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $\widehat{SKH} = 60^0$

$SH = HK.\tan\widehat{SKH} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3} = \frac{3}{4}a$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC}$

$= \frac{1}{3}\frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt)



$SI^2 = SA^2 = SH^2 + HA^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{16}$

$\Rightarrow SI = SA = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

$SB^2 = SH^2 + HB^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{4} = \frac{21a^2}{16} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{21}}{4}$

Kẻ JN//SB (N là trung điểm SA)$\Rightarrow \left(\widehat{SB,AC}\right) = \left(\widehat{JN,JI}\right)$

$JN = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{8}$

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến cho ΔISA. Ta có:

$IN^2 = \frac{SI^2 + AI^2}{2} - \frac{SA^2}{4} = \frac{13a^2}{32} + \frac{a^2}{2} - \frac{13a^2}{64} = \frac{45a^2}{64}$

Áp dung định lý hàm số cosin cho ΔJNI. Ta có

$\cos\widehat{NJI} = \frac{IJ^2 + JN^2 - IN^2}{2IJ.JN} = \left(\frac{3a^2}{4} + \frac{21a^2}{64} - \frac{45a^2}{64}\right) : \left(2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{8}\right)$

$= \frac{3a^2}{8} : \frac{3a^2\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

Vậy $\cos(\widehat{SB,AC}) = \frac{\sqrt{7}}{7}$

Bài 36:

Nhận xét: Tâm O của lục giác đều ABCDEF là trung điểm của các đường ch AD, BE, CF. SO ⊥(ABCDEF). Các tam giác OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OF là các tam giác đều bằng nhau cạnh b.

Đặt: $B = S_{ABCDEF} \Rightarrow B = 6S_{\Delta OAB} = 6b^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}b^2}{2}$ (đvdt)

Chiều cao $h = SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$

Do đó: Thể tích $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{b^2\sqrt{3\left(a^2 - b^2\right)}}{2}$ (đvtt)

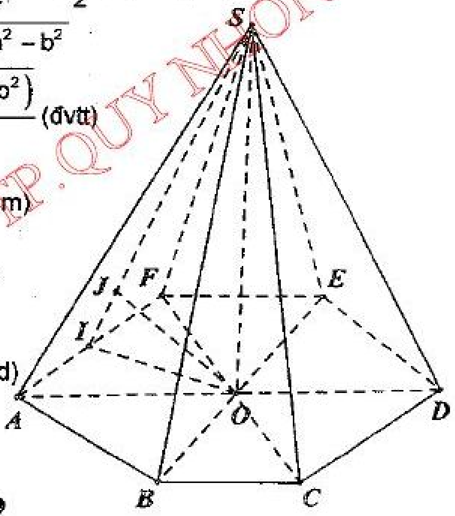
Xác định được

d(SA, BE) = d(O, (SAF)) = OJ (HS tự làm)

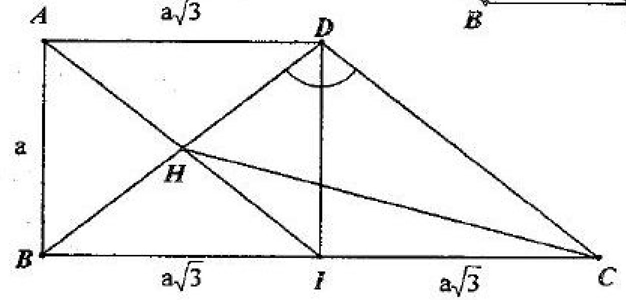
Chứng minh được OJ ⊥(SAF)

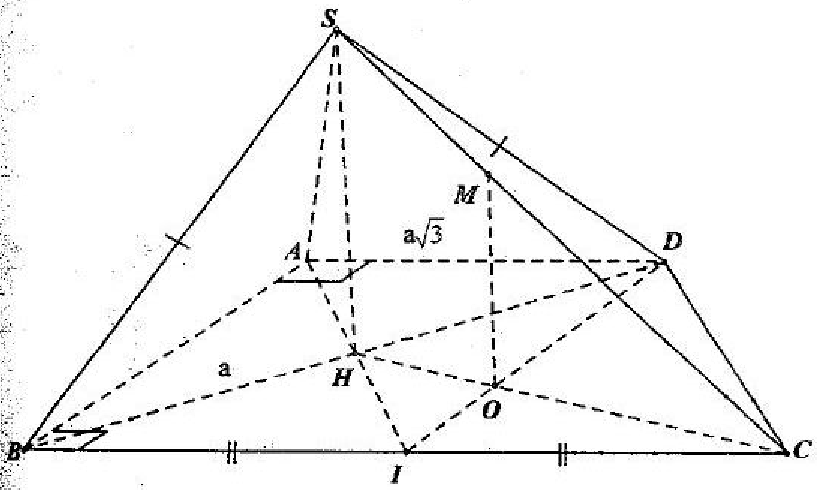
Trong ΔSOJ vuông tại O với đường cao OJ ứng cạnh huyền SI ta có

$OJ = \frac{OI.SO}{\sqrt{OI^2 + SO^2}} = b\sqrt{\frac{3\left(a^2 - b^2\right)}{4a^2 - b^2}}$ (đvđd)



Bài 37:





Ta có: diện tích của tứ giác ABCD là: $S_{\square ABCD}=\frac{3a\sqrt{3}}{2}a=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Vì SA = SB = SD và tam giác ABD vuông tại A nên hình chiếu của đỉnh S
với trung điểm H của đoạn thẳng BD

Do đó SH ⊥ (ABCD).

Gọi O là giao điểm của CH và DI (I là trung điểm của BCI), suy ra O là
tâm của tam giác BCD. Vì MC = 2.MS (giả thiết) nên MO song song với SH
đó MO ⊥ (ABCD).

Vậy MO là chiều cao của khối chóp MABCD.

Tính MO.

$$CH^2=\frac{BC^2+CD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}=a\sqrt{7}\Rightarrow OC=\frac{2a\sqrt{7}}{3}$$

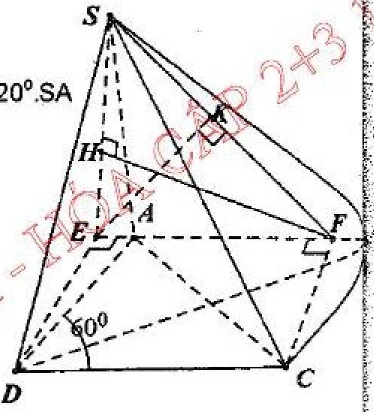
Trong tam giác MOC vuông tại O ta có: $\tan 60^0=\frac{MO}{OC}$

Suy ra: $MO=\frac{2a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3}=\frac{2a\sqrt{21}}{3}$

Vậy thể tích của khối chóp MABCD là:

$$V_{MABCD}=\frac{1}{3}S_{\square ABCD}.MO=\frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{2a\sqrt{21}}{3}=\frac{a^3\sqrt{63}}{3}\text{ (đvtt)}$$

Bài 38:



a. Ta có $V_{D.SAB}=V_{S.ABD}$

Mà $V_{S.ABD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}.SA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AD\sin 120^0.SA$

$$=\frac{1}{6}a^3.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\text{(dvtt)}$$

b. Kẻ EK ⊥SF ,kẻ CF⊥ AB (F∈AB)

Do EK ⊥ (SCF) và DE//(SCF)

Nen d(SC;DE) = d(DE;(SCF)) = EK

Tính EK là đủ ?

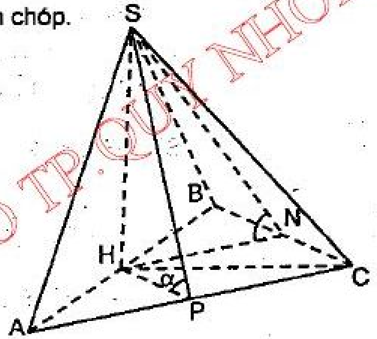
Do $BF=AE=a\cos 60^0=\frac{a}{2}\Rightarrow EF=a$

Xét Δ ⊥ ASF cho $SF^2=SA^2+AF^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow SF=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Lại do SA.SF = EK.SF $\Rightarrow EK=\frac{SA.EF}{SF}=\frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d(DE,SC)=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Bài 39:



Dựng SH ⊥ AB

Ta có: (SAB) ⊥ (ABC), (SAB) ∩ (ABC) = AB, SH ⊂ (SAB)

⇒ SH ⊥ (ABC) và SH là đường cao của hình chóp.

Dựng HN ⊥ BC, HP ⊥ AC

$\Rightarrow SN\perp BC,\ SP\perp AC\Rightarrow \widehat{SPH}=\widehat{SNH}=\alpha$

ΔSHN = ΔSHP ⇒ HN = HP.

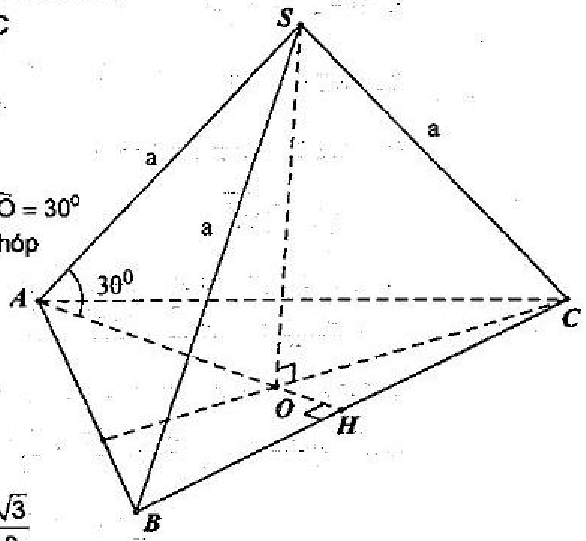
AHP vuông có: $HP=HA.\sin 60^{\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

SHP vuông có: $SH=HP.\tan\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{4}\tan\alpha$

Thể tích hình chóp SABC:

$$V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\tan\alpha.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{16}\tan\alpha$$

Bài 40:



1. Xác định góc giữa cạnh bên với mặt đáy chóp.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC ,

gọi H là trung điểm của BC

Vì SA = SB = SC = a

nên SO ⊥ (ABC)

nên OA là hình chiếu của SA trên (ABC)

Vậy góc [SA,(ABC)] = $\widehat{SAO}=30^0$

2. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

Do đó $\widehat{SAO}=30^0$,

$SO=SA.\sin 30^0=\frac{a}{2}$,

$AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$AH=\frac{3}{2}AO=\frac{3\sqrt{3}a}{4}=\frac{3a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì ABC là tam giác đều nên $BC=\frac{3a}{2}$

Diện tích đáy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{3\sqrt{3}a}{4}=\frac{9\sqrt{3}a^2}{16}$

Do đó thể tích khối chóp S.ABC là $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO=\frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{3}a^2}{16}.\frac{a}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{32}$

Bài 41:

Thể tích hình chóp S.ABC là: $V = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC}$

Tam giác ABC cân đỉnh A nên trung tuyến AD cũng là đường cao của tam gia

Theo giả thiết: $SA \perp mp(ABC) \Rightarrow \widehat{SBA} = (SB, mp(ABC)) = \alpha$

$BD \perp mp(SAD) \Rightarrow \widehat{BSD} = \beta$

Đặt BD = x suy ra: $AB = \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow SA = \sqrt{a^2 + x^2}.\tan\alpha$

$$SB = \frac{BD}{\sin\beta} = \frac{SA}{\sin\alpha} \Rightarrow x\sin\alpha = \sqrt{a^2 + x^2}\tan\alpha\sin\beta \Rightarrow x^2 = \frac{a^2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha + \sin^2\beta}$$

Do đó: $V = \frac{1}{3}.\sqrt{a^2 + x^2}.\tan\alpha.a.x = \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}$

Bài 42:

Từ giả thiết suy ra H là tâm của hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của C và G là trực tâm $\Delta SCD \Rightarrow HG \perp CD\,(1)$

$$\text{Mà } \left.\begin{matrix} BD \perp AD \\ BD \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$$

và $SC \perp DG \Rightarrow SC \perp (BDG) \Rightarrow SC \perp HG\,(2)$

Vì I là trung điểm của SH nên : $HG = d(H,(SCD)) = 2d(I,(SCD)) = 2b$

$$\Rightarrow GM^2 = \frac{a^2}{4} - 4b^2 \text{ và } \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{SH^2} \Rightarrow h = \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - 4b^2}} \Rightarrow V = \frac{2a^{3b}}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

Bài 43:

Gọi I là trung điểm AB,

$CI = \frac{3a}{2} \Rightarrow IG = \frac{a}{2}$

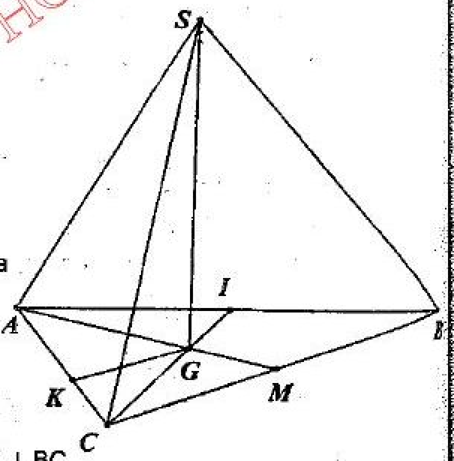
Tam giác vuông BIG

$\Rightarrow BG^2 = BI^2 + IG^2 = \frac{10a^2}{4}$

$SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \sqrt{\frac{14a^2}{4} - \frac{10a^2}{4}} = a$

$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SG$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{2}3a.\frac{3a}{2}.a = \frac{3a^3}{4}$



Kẻ $GK \perp AC, K \in AC, (GK // BC) \Rightarrow SK \perp BC$

$$GK = \frac{GC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SK = \sqrt{SG^2 + GK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; AC = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_{SAC} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) $\Rightarrow h = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAC}} = a\sqrt{3}$

Bài 44:

Từ giả thiết $AC = 2a\sqrt{3}$; BD = 2a và AC ,BD vuông góc với nhau tại trung điểm O của mỗi đường chéo.Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}$; BO = a, do đó $\widehat{ABD} = 60^0$

Hay tam giác ABD đều.

Từ giả thiết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên giao tuyến của chúng là $SO \perp (ABCD)$.

Do tam giác ABD đều nên với H là trung điểm của AB, K là trung điểm của HB ta có $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}$;

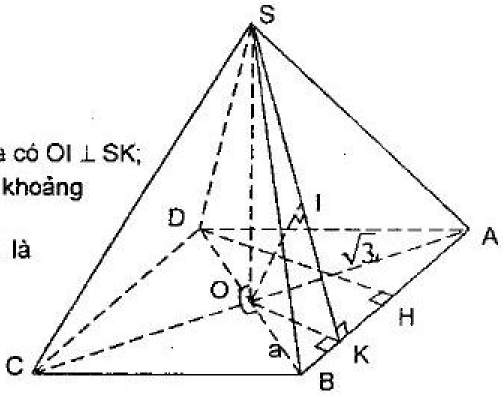
$OK // DH$ và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$

Gọi I là hình chiếu của O lên SK ta có $OI \perp SK$; $AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$, hay OI là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB).

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao

$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$



Diện tích đáy

$S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 2.OA.OB = 2\sqrt{3}a^2$; đường cao của hình chóp $SO = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Bài 45:

Theo định lí côsin ta có:

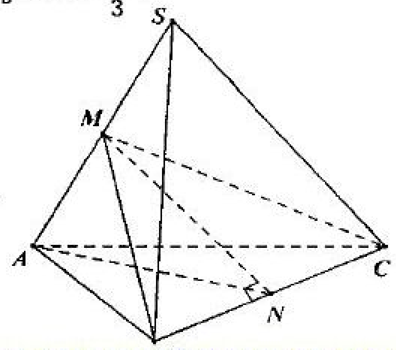
$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos\widehat{SAB}$

$= 3a^2 + a^2 - 2.a\sqrt{3}.a.\cos 30^0 = a^2$

Suy ra SB = a. Tương tự ta cũng có SC = a.

Gọi M là trung điểm của SA do hai tam giác SAB và SAC là hai tam giác cân nên $MB \perp SA$, $MC \perp SA$.

Suy ra $SA \perp (MBC)$.



Ta có: $V_{S.ABC} = V_{S.MBC} + V_{A.MBC} = \frac{1}{3}MA.S_{MBC} + \frac{1}{3}SA.S_{MBC} = \frac{1}{3}SA.S_{MBC}$

Hai tam giác SAB và SAC có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau nên chúng bằng nhau. Do đó MB = MC hay tam giác MBC cân tại M.

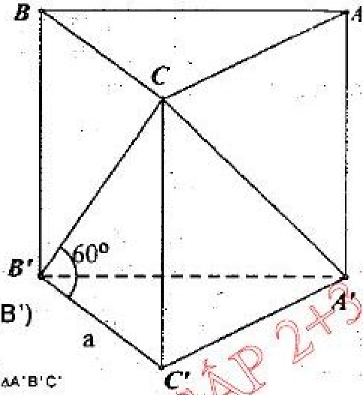
Gọi N là trung điểm của BC suy ra $MN \perp BC$. Tương tự ta cũng có $MN \perp SA$.

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{16}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}MN.BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{16}$

Bài 46:



ABC.A'B'C' là lăng trụ tam giác đều nên $CC' \perp (A'B'C')$ nên B'C' là hình chiếu của B'C trên (A'B'C') nên góc CB'C' bằng 60^0

$CC' = B'C'.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$, $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{3a^3}{4}$$

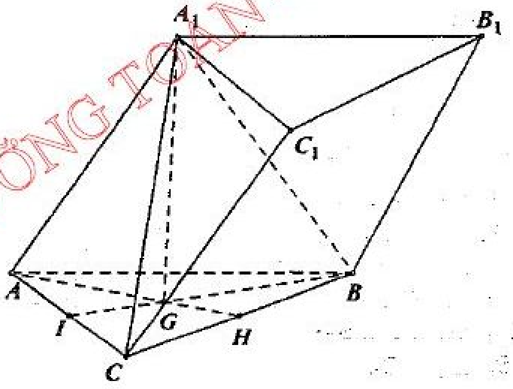
Có AA'//(B'C'CB)

d(AA';B'C) = d(AA';(BCC'B')) = d(A';(BCC'B')

$$V_{A'.B'C'C} = \frac{1}{3}d'(A;(BCC'B').S_{\Delta B'C'C} = \frac{1}{3}CC'.S_{\Delta A'B'C'}$$

$$\Rightarrow d'(A;(BCC'B') = \frac{CC'.S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta B'C'C}} = \frac{\frac{3a^3}{4}}{\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài 47:



Ta có tam giác ABC đều cạnh 2a nên $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$

Mặt khác $A_1A = A_1B = A_1C \Rightarrow A_1ABC$ là tứ diện đều.

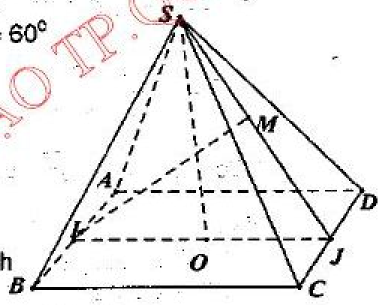
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có A_1G là đường cao.

Trong tam giác ABC có $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông A_1AG có: $\widehat{A_1AG} = \alpha$, $A_1G = AG.\tan\alpha = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.\tan\alpha$

$V_{LT} = A_1G.S_{ABC} = 2\sqrt{3}a^3 \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$

Bài 48:



Xác định khoảng cách giữa AB và SC

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, DC

AB // DC nên AB // (SDC)

$\Rightarrow$ khoảng cách giữa AB và mp (SCD) là khoảng cách giữa AB và SC.

Ta có $IJ \perp CD$; $SJ \perp CD$ (vì S.ABCD là hình chóp đều) $\Rightarrow CD \perp (SIJ)$ (1)

Trong mp(SIJ) kẻ $IM \perp SJ$ (2), từ (1) $\Rightarrow IM \perp CD$ (3)

Từ (2), (3) $\Rightarrow IM \perp (SCD) \Rightarrow IM = a\sqrt{3}$

Gọi O là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow$ SO là đường cao của hình chóp

Thể tích của hình chóp $V = \frac{1}{3}Bh$ trong đó $B = 4a^2$; h = SO

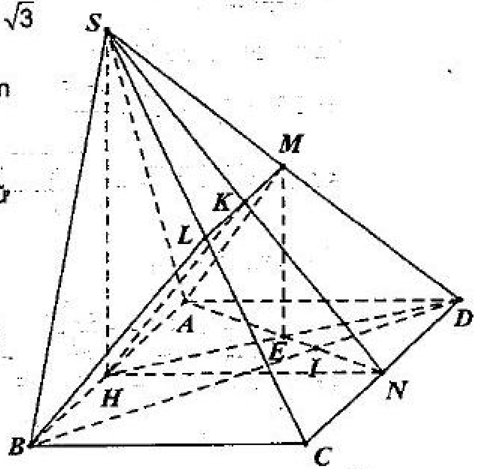
Tính SO. Trong tam giác vuông IMJ (vuông tại M) có $IM = a\sqrt{3}$, $IJ = 2a$,

Gọi α là góc IJM ta có $\sin\alpha = \frac{IM}{IJ} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

$\Rightarrow$ Tam giác SIJ là tam giác đều cạnh 2a $\Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}4a^2.a\sqrt{3} = \frac{4a^3}{\sqrt{3}}$

Bài 49:



Gọi H, N, L, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, SC, HD

Gọi $I = AN \cap BD$, $K = LM \cap SN$;

Dễ thấy tứ giác AHND là hình chữ nhật và $IN = \frac{AN}{3}$

Từ giả thiết ta có

$SH \perp (ABCD)$, $ME // SH \Rightarrow ME \perp BD$(1)

Lại do $AM \perp BD$(2).

Từ (1) & (2) $\Rightarrow BD \perp (AMN) \Rightarrow BD \perp AN$.

Trong tam giác AND ta có

$$ND^2 = NI.NA = \frac{NA^2}{3} \Rightarrow NA = ND\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow AD = \sqrt{NA^2 - ND^2} = a\sqrt{2}$$

Dễ thấy $CD \perp (SHN)$, do $ML // CD \Rightarrow ML \perp (SHN) \Rightarrow ML \perp SN (3)$

Do $(ABLM) \perp (SCD), (ABLM) \cap (SCD) = ML$ (4),

nên từ (3) & (4) $\Rightarrow SN \perp (ABLM) \Rightarrow SN \perp HK$.

Lại do K là trung điểm SN nên tam giác SHN vuông cân tại H suy $SH = HN = a\sqrt{2}$

Dễ thấy $CD \perp (SHN)$, do $ML // CD \Rightarrow ML \perp (SHN) \Rightarrow ML \perp SN (3)$

Do $(ABLM) \perp (SCD), (ABLM) \cap (SCD) = ML$ (4),

nên từ (3) & (4) $\Rightarrow SN \perp (ABLM) \Rightarrow SN \perp HK$.

Lại do K là trung điểm SN nên tam giác SHN vuông cân tại H suy $SH = HN = a\sqrt{2}$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.AD = \frac{4a^3}{3}$;

$$V_{S.BCM} = \frac{1}{2}V_{S.BCD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V_{S.ABCD}\right) = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}.$$

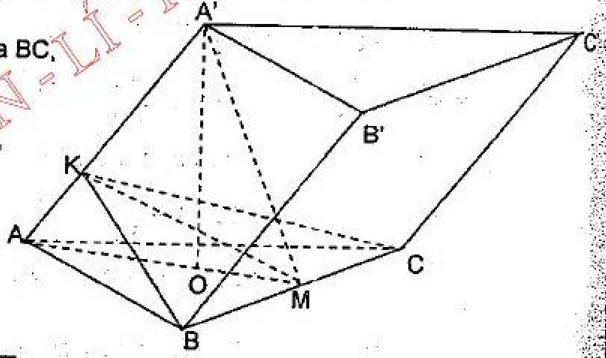
Ta có : $BC \perp SH, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$$\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2}SB.BC = \frac{1}{2}\sqrt{HB^2 + SH^2}.BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

Mặt khác ta có $d(M;(SBC)) = \frac{3V_{MSBC}}{S_{SBC}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 50:

Gọi M là trung điểm của BC,
do $A'O \perp (ABC)$
nên $BC \perp (A'AM)$.
Gọi K là điểm thuộc AA' sao cho $KB \perp AA'$,
nối KC thì $AA' \perp (KBC)$
$\Rightarrow AA' \perp KM$



$AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

ΔKBC có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ nên $\frac{KM.BC}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow KM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Xét $\Delta A'AM$ có 2 đường cao A'M và MK nên: $A'O.AM = KM.AA'$ (*)

Đặt $A'O = x > 0$ khi đó từ (*) ta có:

$$x.AM = AA'.KM \Leftrightarrow x.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}.\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

(do $\Delta A'AO$ vuông tại O và $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$)

hay $2x = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Ta có diện tích đáy ABC bằng $\frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (diện tích tam giác đều cạnh a)

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'O.S_{ABC} = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 51:

Gọi $I = AC' \cap A'C$, $J = A'B \cap AB'$

$$\left.\begin{array}{l}(BA'C) \cap (ABC') = BI \\ (BA'C) \cap (AB'C) = CJ \\ \text{Gọi } O = BI \cap CJ\end{array}\right\}$$

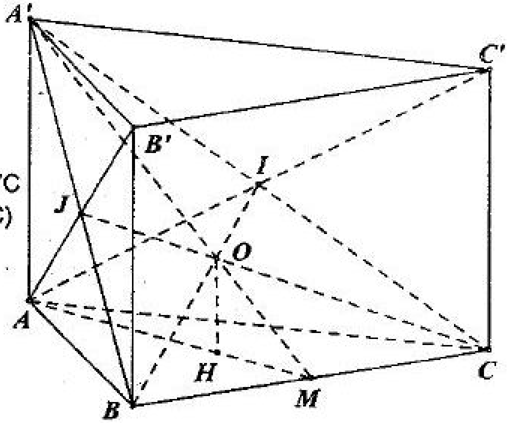
$\Rightarrow$ O là điểm cần tìm

Ta có O là trọng tâm tam giác BA'C

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC)

Do ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta BA'C$ trên (ABC) nên H là trọng tâm ΔABC

Gọi M là trung điểm BC.



Ta có: $\frac{OH}{A'B} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{3}OH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9}A'B.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{9}V$$

Bài 52:

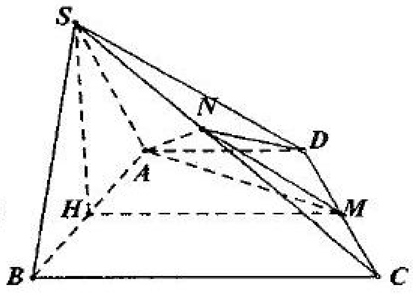
Gọi H là trung điểm của AB.

Tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mp vuông góc với (ABCD)

nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH \perp (ABCD)$.

Chiều cao của khối chopsADMN kẻ từ M :

$h = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Diện tích tam giác ADN: $S = \frac{1}{2}d(N, AD).BC = \frac{a^2}{4}$

Thể tích khối chóp ADMN: $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ADN}.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Bài 53:

Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $BH = \frac{1}{3}BD$

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE)$

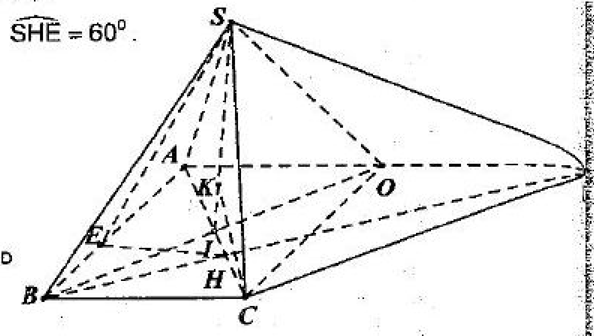
$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SHE} = 60^0$.

Mà $HE = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}$

$= \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$



Gọi O là trung điểm AD $\Rightarrow$ ABCO là hình vuông cạnh a

$\Rightarrow \Delta ACD$ có trung tuyến $CO = \frac{1}{2}AD$

$CD \perp AC \Rightarrow CD \perp (SAC)$ và BO // CD hay CD // (SBO) và $BO \perp (SOC)$.

$d(CD;SB) = d(CD;(SBO)) = d(C;(SBO))$.

Tính chất trọng tâm tam giác BCO

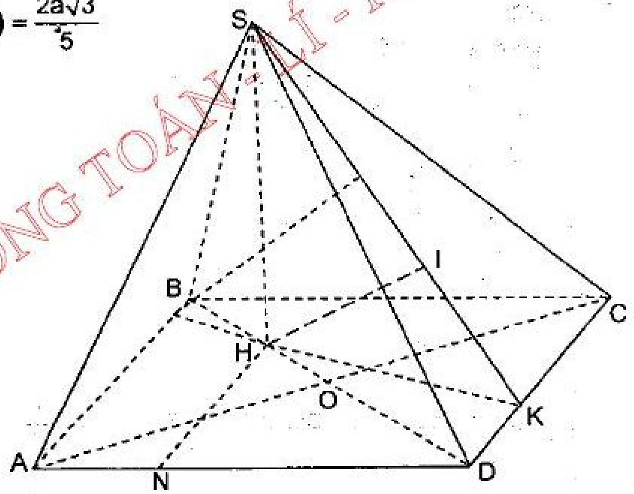
$\Rightarrow IH = \frac{1}{3}IC = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow IS = \sqrt{IH^2 + HS^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$

Kẻ $CK \perp SI$ mà $CK \perp BO \Rightarrow CK \perp (SBO) \Rightarrow d(C;(SBO)) = CK$

Trong tam giác SIC có $S_{SIC} = \frac{1}{2}SH.IC = \frac{1}{2}SI.CK \Rightarrow CK = \frac{SH.IC}{SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

Vậy $d(CD;SB) = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

Bài 54:



$h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{AHCD} = \frac{1}{2}AC.DH$ ta có ΔABD đều nên $BD = a \Rightarrow DH = \frac{3}{4}a$

$AC = 2AO = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{AHCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.AHCD} = \frac{1}{3}SH.S_{AHCD} = \frac{3a^3}{16}$

Kẻ HN song song AB, $N \in AD$ kẻ HK vuông góc với HN, $K \in CD$

kẻ $HI \perp SK$, I thuộc SK $\Rightarrow HI \perp (SCD)$ khoảng cách từ H tới (SCD) là HI

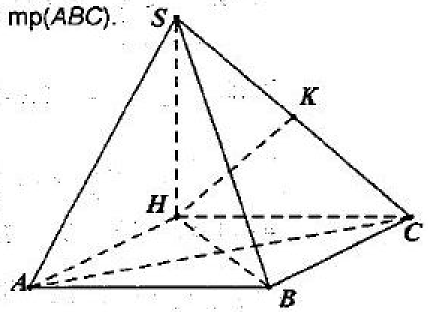
$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2}$, $HS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$HK = HD.\sin HDK = \frac{3a}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{64}{27a^2} = \frac{100}{27a^2} \Rightarrow HI = \frac{3a\sqrt{3}}{10}$

$d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = \frac{4}{3}d(HN,(SCD)) = \frac{4}{3}d(H,(SCD)) = \frac{4}{3}HI = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

ài 55:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của *S* trên mp(*ABC*).



Ta có: $\left.\begin{array}{l} SH \perp (ABC) \\ SA \perp AB \text{ (gt)} \end{array}\right\} \Rightarrow HA \perp AB$.

Tương tự $HC \perp BC$

Suy ra tứ giác *HABC* là một hình vuông

Ta có: $AH // BC \subset (SBC) \Rightarrow AH // (SBC)$

$\Rightarrow d[A,(SBC)] = d[H,(SBC)] = a\sqrt{2}$

Dựng $HK \perp SC$ tại *K* (1).

Do $\left.\begin{array}{l} BC \perp HC \\ BC \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp HK$ (2)

(1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$. Từ đó $d[H,(SBC)] = HK = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow KC = \sqrt{HC^2 - HK^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$

$\tan\widehat{SCH} = \frac{HK}{KC} = \frac{SH}{HC} \Rightarrow SH = \frac{HK.HC}{KC} = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{3}}{a} = a\sqrt{6}$

Thể tích Khối chóp *S.ABC* được tính bởi:

$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{6}AB.BC.SH = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt)

Góc giữa *SB* với mp(*ABC*) là góc $\widehat{SBH} = 45^0$ (do ΔSHB vuông cân)

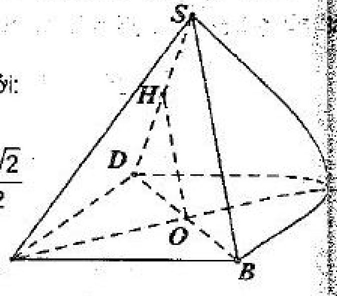
i 56:

Theo giả thiết $(ABCD) \perp (SBD)$ theo giao tuyến *BD*.

Do đó nếu dựng $AO \perp (SBD)$ thì $O \in BD$.

Mặt khác $AS = AB = AD \Rightarrow OS = OB = OD$ hay ΔSBD là tam giác vuông tại S.

Từ đó: $BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$



$AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$

Suy ra thể tích khối chóp *S.ABD* được tính bởi:

$V_{S.ABD} = V_{A.SBD}$

$= \frac{1}{3}S_{SBD}.AO = \frac{1}{6}SB.SD.AO = \frac{1}{6}a.a\sqrt{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ (đvtt).

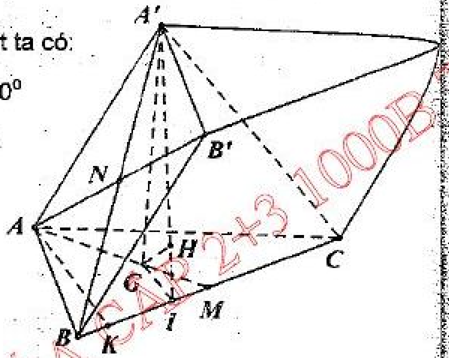
Trong ΔSBD dựng $OH \perp SD$ tại *H* (1) $\Rightarrow$ *H* là trung điểm của *SD*.

Theo chứng minh trên $AO \perp (SBD) \Rightarrow AO \perp OH$ (2)

(1) và (2) chứng tỏ *OH* là đoạn vuông góc chung của *AC* và *SD*

Vậy $d(AC, BD) = OH = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$

Bài 57:



Gọi M là trung điểm BC. Từ giả thiết ta có:

$BC = 2a,\ AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a}{3};\ \widehat{A'AG} = 60^0$

$\Rightarrow A'G = AG.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Thể tích V của khối lăng trụ được tính bởi:

$V = S_{ABC}.A'G = \frac{1}{2}AB.AC.A'G$

$= \frac{1}{2}a.a\sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3$ (đvtt)

Dựng $AK \perp BC$ tại *K* và $GI \perp BC$ tại I $\Rightarrow GI \parallel AK$

$\Rightarrow \frac{GI}{AK} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow CI = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3}.\frac{AB.AC}{BC} = \frac{1}{3}\frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Dựng $GH \perp A'I$ tại H (1)

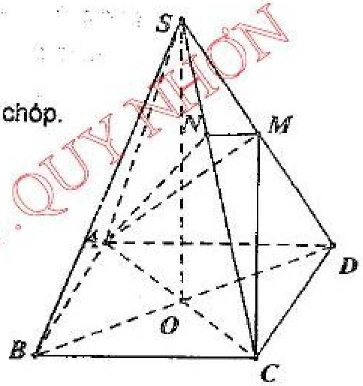
Do: $\left.\begin{matrix} BC \perp GI \\ BC \perp A'G \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp GH$ (2). Từ (1) và (2) => $GH \perp (A'BC)$

Mặt khác nhận thấy AB' cắt mp(A'BC) tại N là trung điểm của AB'.

Từ đó: $d[B', (A'BC)] = d[A, (A'BC)] = 3d[G, (A'BC)] = 3GH$

$$= 3.\frac{A'G.GI}{A'I} = \frac{3.A'G.GI}{\sqrt{A'G^2 + GI^2}} = \frac{3.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{12a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{6a}{\sqrt{51}} = \frac{2a\sqrt{\ }}{17}$$

ài 58:



Gọi O là trung điểm AB khi đó $SO \perp AC$

do $(SAC) \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Từ đó ta có SO chính là chiều cao của hình chóp.

Ta có : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.AD$.

Ta có : $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Do tam giác SAC đều nên

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.AB.AD = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Ta có: $V_{N.ACM} = \frac{1}{3}d(N;(ACM)).S_{\Delta ACM} \Rightarrow d(N;(ACM)) = \frac{3V_{N.ACM}}{S_{\Delta ACM}}$

Mặt khác:

$V_{N.ACM} = V_{S.ADC} - V_{S.AMN} - V_{M.ADC} = V_{S.ADC} - \frac{1}{6}V_{S.ADC} - \frac{1}{2}V_{S.ADC} = \frac{1}{3}V_{S.ADC}$

$\Rightarrow V_{N.ACM} = \frac{1}{6}V_{S.ABDC} = \frac{a^3\sqrt{15}}{18}$

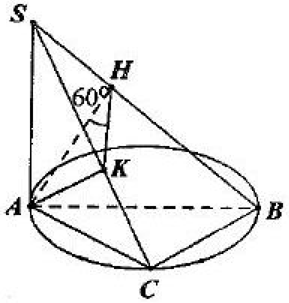
Áp dụng công thức đường trung tuyến: $CM^2 = \frac{CS^2 + CD^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$

Tương tự $AM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. Trong ΔACM có

$\cos A = \frac{AM^2 + AC^2 - CM^2}{2AM.AC} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}$

Do đó $S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}AC.AM\sin A = \frac{a^2\sqrt{91}}{8} \Rightarrow d(N;(ACM)) = \frac{4a\sqrt{15}}{3\sqrt{91}}$

i 59:



Chứng minh tam giác AHK vuông

$SA \perp (P) \Rightarrow SA \perp BC$

Lại có $CA \perp BC$ nên $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$

Theo gt : $SC \perp AK$

Do đó $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp HK$

Hay tam giác AHK vuông

Tính $V_{S.ABC}$

Ta có $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB$

Đồng thời theo gt $AH \perp SB$

Suy ra $BS \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$

Vì vậy góc giữa hai mp (SAB) và (SBC) chính là góc giữa hai đường thẳng và HK và bằng góc $\widehat{AHK}$

Trong tam giác SAC có : $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{R^2}$ (1)

Trong tam giác SAB có : $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{4R^2}$ (2)

Lấy (1) - (2) , ta được : $\frac{1}{AK^2}-\frac{1}{AH^2}=\frac{3}{4R^2}$ (3)

Vì tam giác AHK vuông tại K và $\widehat{AHK}=60^0$ nên tam giác AHK bằng nửa giác đều và do đó $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}AH$ thay vào (3) , ta tìm được $\frac{1}{AH^2}=\frac{9}{4R^2}$ vào (2), ta có: $SA^2=\frac{R^2}{2}\Rightarrow SA=\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{3}.SA.\frac{1}{2}.AC.BC=\frac{1}{6}SA.AC.\sqrt{AB^2-AC^2}$

$$=\frac{1}{6}.\frac{R\sqrt{2}}{2}.R.\sqrt{(2R)^2-R^2}=\frac{R^3\sqrt{6}}{12}$$

Bài 60:

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ và ΔSAB cân đỉnh S.

Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Kẻ $HK\perp AC\Rightarrow$ góc $\widehat{SKH}$ là góc giữa 2mp (SAC) và (ABCD),

nên $\widehat{SKH}=60^0$.

Xét 2 tam giác đồng dạng

$\Delta AKH\sim\Delta ABC$

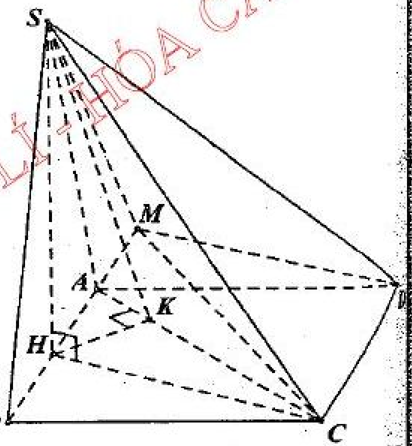
$\Rightarrow\frac{AH}{KH}=\frac{AC}{BC}\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{2}}{KH}=\frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow KH=\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Tam giác SHK vuông

$\Rightarrow\tan60^0=\frac{SH}{HK}$

$\Rightarrow SH=HK\tan60^0=\frac{a}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3}=\frac{a}{\sqrt{2}}$



Gọi V là thể tích khối chóp

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\cdot a\sqrt{2}=\frac{a^3}{3}$

Gọi M là điểm đối xứng với H qua A. Ta có $(CH,SD)=(SD,DM)$.

Từ giả thiết ta có $DA\perp(SBA)\Rightarrow\Delta SAD$ vuông tại A.

$\Rightarrow SD^2=AD^2+AS^2=AD^2+SH^2+HA^2=2a^2+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}=\frac{11a^2}{4}$,

$DM^2=CH^2=2a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{9a^2}{4}$, $SM^2=SH^2+HM^2=\frac{a^2}{2}+a^2=\frac{3a^2}{2}$.

$$\cos\widehat{SDM}=\frac{SD^2+DM^2-SM^2}{2SD\cdot DM}=\frac{\frac{11a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}-\frac{6a^2}{4}}{2\cdot\frac{a\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{3a}{2}}=\frac{\frac{7a^2}{2}}{\frac{3a^2\sqrt{11}}{2}}=\frac{7\sqrt{11}}{33}$$

Vậy $\cos(CH,SD)=\frac{7\sqrt{11}}{33}$

Bài 61:

Tự vẽ hình

Gọi H là trung điểm BC , chứng minh $SH\perp(ABC)$

Xác định đúng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) với mặt đáy là

$SEH=SFH=60^0$

Kẻ $HK\perp SB$, lập luận suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng HKA

Lập luận và tính được AC = AB = a , $HA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SH=HF\tan60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SHK vuông tại H có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HB^2}\Rightarrow KH=a\sqrt{\frac{3}{10}}$

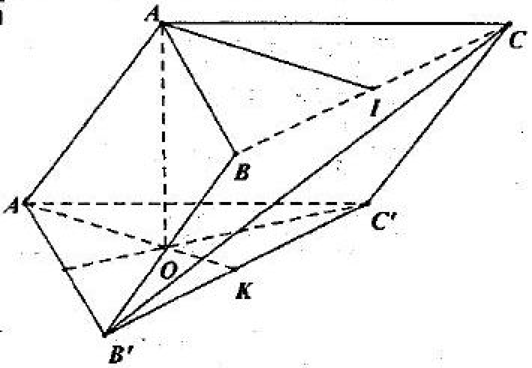
Tam giác AHK vuông tại H có

$$\tan AKH=\frac{AH}{KH}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{10}}}=\sqrt{\frac{20}{3}}\Rightarrow\cos AKH=\sqrt{\frac{3}{23}}$$

Bài 62:

$A'K=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'O=\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$A'A=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $AO=a$



$$\begin{cases}\overline{B'C}=\overline{B'C'}+\overline{A'A}\\B'C^2=B'C'^2+A'A^2=\frac{7a^2}{3}\Leftrightarrow B'C=\frac{a\sqrt{21}}{3}\end{cases}$$

Gọi α là góc hai đường thẳng AI và B'C

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{\left|\overrightarrow{AI}\right|\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{A'K}(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{A'A})\right|}{\left|\overrightarrow{AI}\right|\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{A'K}.\overrightarrow{A'A}\right|}{\left|\overrightarrow{AI}\right|\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{A'K}\right|\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cos60^0}{\left|\overrightarrow{AI}\right|\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}=\frac{\sqrt7}{7}$$

Thể tích lăng trụ $V=AO.S_{đáy}=\frac{a^3\sqrt3}{4}$

Thể tích khối chóp B'ABC bằng thể tích khối chóp AA'B'C' bằng $\frac{a^3\sqrt3}{12}$.

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{a^3\sqrt3}{4}-\frac{a^3\sqrt3}{12}=\frac{a^3\sqrt3}{6}$

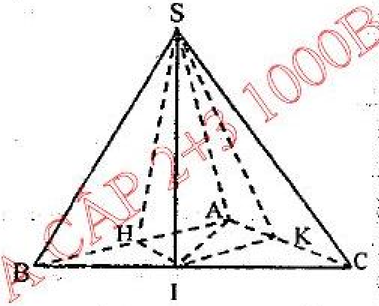
Bài 63:

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên BC, do $(SBC)\perp(ABC)$ nên SI vu góc với mp(ABC). Gọi H, K lần lượt hình chiếu vuông góc của I trên AB và A suy ra $AB\perp SH; AC\perp SK$ (định lý 3đvg) $\Rightarrow\alpha=\widehat{SHI}=\widehat{SKI}\Rightarrow IH=IK\Rightarrow$ I thu đường phân giác trong góc A của tam giác ABC nên I trung điểm BC.

Ta có :

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IK^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{1}{3.a^2}+\frac{1}{9.a^2}$$

$$\Rightarrow IH=IK=\frac{3a}{2}$$



Trong tam giác vuông SHI ta có

$$SI=IH.\tan\alpha=\frac{3a}{2}\tan\alpha$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\sqrt3 6a=3a^2\sqrt3$$

Vậy $V_{SABC}=\frac13 SI.S_{ABC}=\frac32 a^3\sqrt3\tan\alpha$ (đvtt)

Bài 64:

Chứng minh SH vuông góc (ABCD)

Kẻ HM vuông góc AB

$\Rightarrow AB\perp(SHM)$

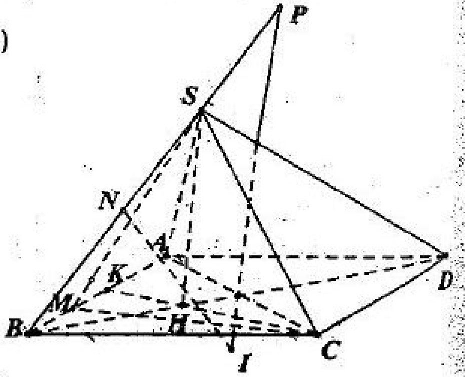
$\Rightarrow ((SAB),(ABCD))=\widehat{SHM}=60^0$

ΔBMH vuông cân tại H có

$BM=BH=\frac{a}{3}\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt2}{3}$

$\Rightarrow SH=MH.\tan60^0=\frac{a}{\sqrt3}$

$V_{ABCD}=\frac13 S_{ABCD}.SH=\frac{a^3}{3\sqrt3}=\frac{a^3\sqrt3}{9}$



Ta có tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi O là giao điểm của AC và BD

$\Rightarrow$ tâm I của mặt cầu thuộc Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, Δ vuông góc (ABCD) tại O.

Gọi N là trung điểm của SB. Trong mp (SBD), d là trung trực của SB, gọi I là giao điểm của d và SO $\Rightarrow IS=IA=IB=IC\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu.

Gọi P là giao điểm của Δ và BS. Do

$$BH=\frac23 BO\Rightarrow OP=\frac32 SH=\frac{a\sqrt3}{2}$$

$$BS=\sqrt{SH^2+HB^2}=\frac{a\sqrt5}{3}\Rightarrow BP=\frac32 BS=\frac{a\sqrt5}{2}, NP=\frac23 BP=\frac{a\sqrt5}{3}.$$

ΔPNI đồng dạng với ΔPOB

$$\Rightarrow IP=\frac{PN.BP}{OP}=\frac{5a}{3\sqrt3}>OP\Rightarrow R=IC=\sqrt{OI^2+OC^2}=a\sqrt{\frac{55}{108}}.$$

Bài 65:

Do đó $\widehat{SBH}=\widehat{SEH}\Rightarrow HB=HE=2a$.

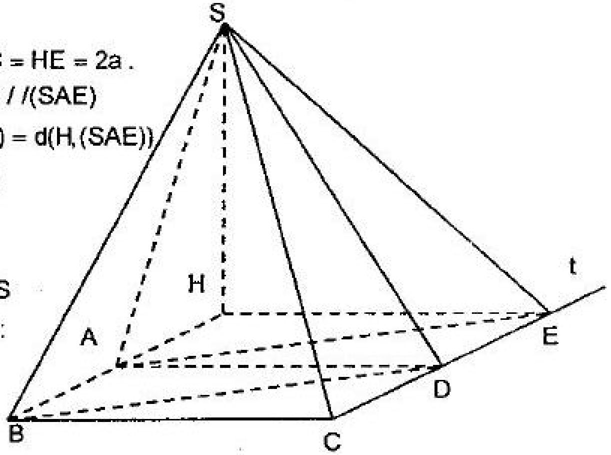
Ta được $BD//AE\Rightarrow BD//(SAE)$

$\Rightarrow d(SA,BD)=d(B,(SAE))=d(H,(SAE))$

(do A là trung điểm HB)

$\Rightarrow d(H,(SAE))=\frac{2a}{\sqrt6}$.

Nhận xét rằng HA, HE, HS đôi một vuông góc, suy ra:



$$\frac{1}{d^2(H,(SAE))}=\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HE^2}+\frac{1}{HS^2}\Leftrightarrow\frac{3}{2a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{HS^2}\Leftrightarrow SH=2a.$$

Thể tích: $V_{(S.ABCD)}=\frac13 S_{(ABCD)}.SH=\frac{4a^3}{3}$.

$BD//AE$, suy ra góc giữa hai đường thẳng SA và BD là $\widehat{SAE}$.

Áp dụng định lý hàm số côsin cho tam giác SAE, với

$AE=SA=\sqrt{SH^2+HA^2}=a\sqrt5$ và $SE=SH\sqrt2=2\sqrt2a$, ta có:

$$\cos(\widehat{SA,BD})=\cos\widehat{SAE}=\frac{SA^2+AE^2-SE^2}{2.SA.AE}=\frac15$$

Bài 66:

a. Trong tam giác vuông ABC

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow AB=2a.\cos60^0=a$$

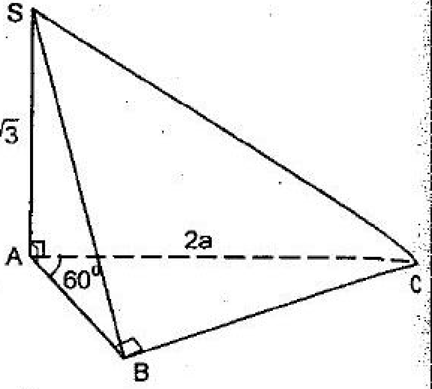
- $BC \perp AB,\ BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$
- Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và AB

  Xét tam giác SAB vuông tại A.

  $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

  $\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$

  Kết luận: $\left((SBC),(ABC)\right) = \widehat{SBA} = 60^0$



b. Dựng hình chữ nhật ABCD.

Ta có AB// CD. Do đó AB // (SCD)

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC là

$d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD)$

Gọi H là hình chiếu của A lên SD

$CD \perp AD,\ CD \perp SA \Rightarrow CD \perp AH$ (1)

$AH \perp SD$ (2)

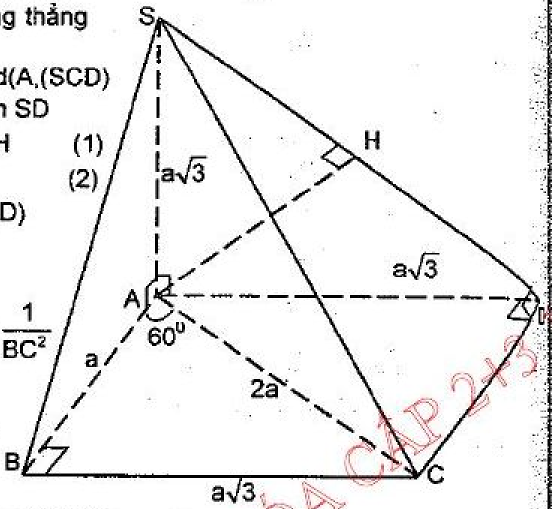
Từ (1) và (2) ta có $AH \perp (SCD)$

Do đó $d(A,(SCD)) = AH$

Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{BC^2}$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$



Bài 67:

Gọi I là trung điểm của AB ta có MI//SA

$\Rightarrow MI \perp (ABCD) \Rightarrow MI \perp (NBCD)$.

Khi đó $V_{M.NBCD} = \dfrac{1}{3}.MI.S_{NBCD}$

Và góc giữa MN với mp đáy chính là góc MNI = 30^0

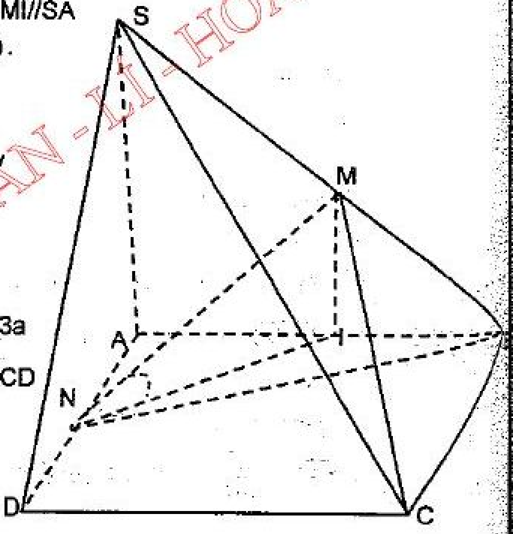
Tam giác MNI có $\cos 30^0 = \dfrac{NI}{MN}$

$\Rightarrow NI = MN.\cos 30^0 = 2a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3a$

Gọi x là cạnh của hình vuông ABCD

Vì $NI^2 = AN^2 + AI^2$

$\Leftrightarrow 9a^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = 3a\sqrt{2}$



Khi đó $S_{ABCD} = x^2 = 18a^2$ và $S_{ANI} = \dfrac{1}{2}AN.AI = \dfrac{1}{2}.\dfrac{x}{2}.\dfrac{x}{2} = \dfrac{9a^2}{4}$

$\Rightarrow S_{NBCD} = S_{ABCD} - S_{AIN} = 18a^2 - \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{63a^2}{4}$

Mặt khác: $\sin 30^0 = \dfrac{MI}{MN} \Leftrightarrow MI = MN.\sin 30^0 = 2a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{N.MBCD} = \dfrac{1}{3}.MI.S_{NBCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{63a^2}{4} = \dfrac{63a^3\sqrt{3}}{12}$ (đvtt)

Bài 68:

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì ABCD là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC và BD .

Theo giả thiết SA = SC = SB = SD

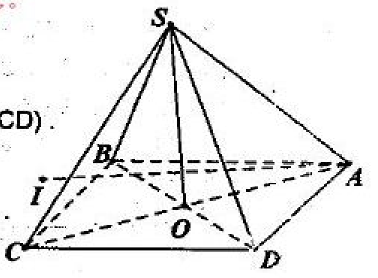
nên các tam giác SAC và SBD cân tại S .

Do đó $SO \perp AC$ và $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

$AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow OA = OC = a$

Đặt $SO = h \Rightarrow SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{h^2 + a^2}$.

Do SI = 2CI nên $IC = \dfrac{1}{3}SC = \dfrac{1}{3}\sqrt{h^2 + a^2}$



Tam giác AIC vuông tại I nên $AI = \sqrt{AC^2 - IC^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{35a^2 - h^2}$ (với $0 < h < a\sqrt{35}$)

Có $2S_{SAC} = AI.SC = SO.AC \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\sqrt{35a^2 - h^2}.\sqrt{h^2 + a^2} = 2h.a$

$\Leftrightarrow h^4 + 2a^2h^2 - 35a^4 = 0 \Leftrightarrow (h^2 + 7a^2)(h^2 - 5a^2) = 0$

$\Leftrightarrow h = a\sqrt{5}$ (thỏa mãn)

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = a^3\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Bài 69:

Gọi H là trung điểm AD

do tam giác SAD đều cạnh a

nên $SH \perp AD,\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

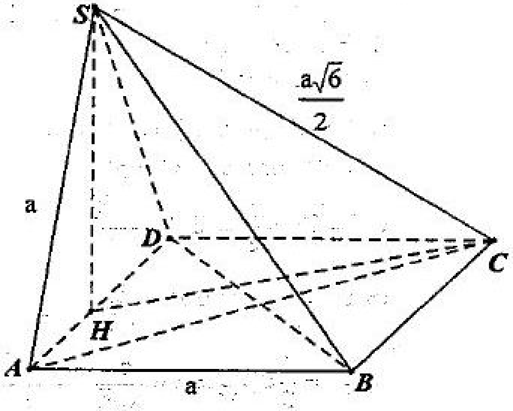
mà $(ADS) \perp (ABCD)$

nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HC$

trong tam giác vuông SHC có

$HC^2 = SC^2 - SH^2 = \dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Theo định lí côsin trong tam giac DHC có

$$\cos\widehat{HDC}=\frac{HD^2+DC^2-HC^2}{2HD.DC}=\frac{1}{2}\Rightarrow \widehat{HDC}=60^0$$

Diện tích ABCD là $S_{ABCD}=2S_{\Delta ADC}=AD.DC.\sin 60^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích S.ABCD$=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{a^3}{4}$

DHC = 60^0 nên tam giác ADC đều. $\Rightarrow CH\perp AD$

$\Rightarrow CH\perp BC$ mà $SH\perp BC$ nên $BC\perp SC$

Diện tích tam giác SBC là $S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}SC.BC=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

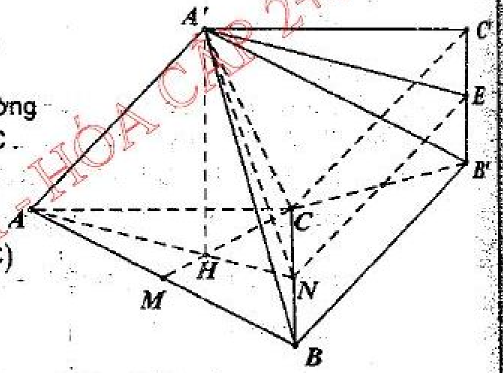
Thể tích

$$V_{S.DBC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta DBC}=\frac{1}{3}d(D,(SBC)).S_{\Delta SBC}$$

$$\Rightarrow d(D,(SBC))=\frac{SH.S_{\Delta DBC}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{4}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow d(AD,SB)=d(AD,(SBC))=d(D,(SBC))=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Bài 70:



Gọi M, Nm E lần lượt là trung điểm của AB, BC và B'C';

$H=CM\cap AN$. Có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Từ A'.ABC là hình chóp đều

$\Rightarrow A'H\perp(ABC)$

Góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (BCC'B') bằng 90^0

$\Rightarrow (A'BC)\perp(BCC'B')$.

Có $A'N\perp BC\Rightarrow A'N\perp(BCC'B')\Leftrightarrow A'N\perp NE$.

Đặt $A'A=A'B=A'C=x(x>0)$.

$$A'N^2=A'B^2-BN^2=x^2-\frac{a^2}{4};\ \begin{cases}NE=BB'\\NE//BB'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}NE=AA'\\NE//AA'\end{cases}\Rightarrow$$

Tứ giác ANEA' là hình bình hành $\Rightarrow\begin{cases}NE=x\\A'E=\frac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

- Trong tam giác vuông A'NE có

$$A'N^2+NE^2=A'E^2\Leftrightarrow x^2-\frac{a^2}{4}+x^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\Leftrightarrow 2x^2=a^2\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là $V=A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

$A'A//B'B\Rightarrow A'A//(BCC'B')$

$\Rightarrow d(A'A,B'C)=d(A'A,(BCC'B'))=d(A,(BCC'B'))$

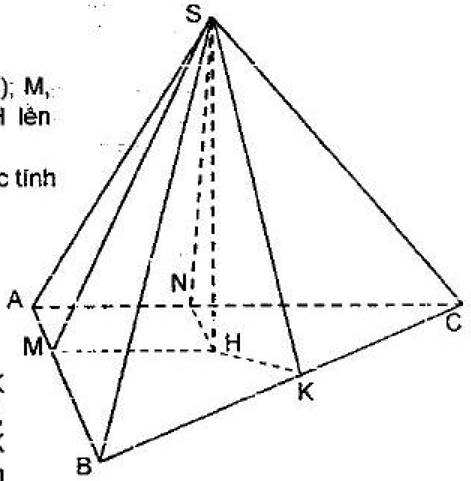
- $\begin{cases}BC\perp AN\\BC\perp A'N\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AN)\Rightarrow BC\perp AA'\Rightarrow BC\perp BB'$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{\Delta B'BC}=\frac{1}{2}B'B.BC=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

$$V_{B'.ABC}=\frac{1}{3}V=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}=\frac{1}{3}d(A,(BCB')).S_{\Delta B'BC}\Rightarrow d(A,(BCB'))=\frac{3V_{B'.ABC}}{S_{\Delta B'BC}}$$

$$\Rightarrow d(A,(BCB'))=\frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{8}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{4}}=\frac{a}{2}$$

Bài 71:



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC); M, N, K lần lượt là hình chiếu của H lên cạnh AB, AC, BC.

Khi đó thể tích V của khối chóp được tính bởi công thức $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH$

mà $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=6$

Tính SH.

Xét các tam giác SHM, SHN, SHK vuông tại H, có các góc SMH, SNH, SKH bằng 60^0 do đó HM = HN = HK

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

$$\Rightarrow HM=\frac{2S_{ABC}}{AB+BC+CA}=1\Rightarrow SH=HM.\tan60^0=\sqrt{3}$$

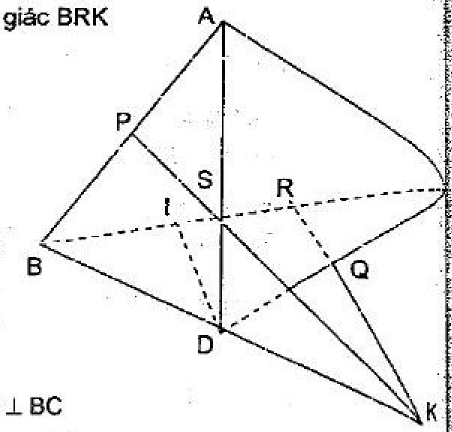
Vậy $V=\frac{1}{3}\sqrt{3}.6=2\sqrt{3}$

Bài 72:

RQ cắt BD tại K. Gọi I là trung điểm của BR $\Rightarrow$ DI//RQ

$\Rightarrow$ ID là đường trung bình của tam giác BRK

$\Rightarrow$ D là trung điểm của BK, từ đó suy ra S là trọng tâm tam giác ABK $\Rightarrow \dfrac{AS}{AD} = \dfrac{2}{3}$



Ta có

$$\frac{V_{ABSC}}{V_{ABCD}} = \frac{AS}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{SBCD} = \frac{1}{3}V_{ABCD}$$

Mà $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} \Rightarrow V_{SBCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Bài 73:

Kẻ SH $\perp$ AB $\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABC). Kẻ HE $\perp$ BC

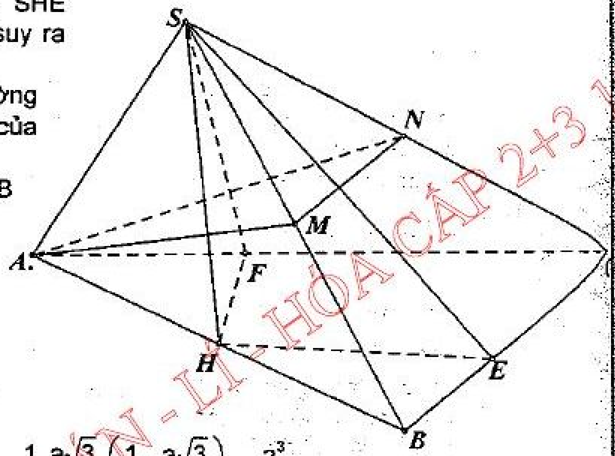
$\Rightarrow BC \perp (SHE) \Rightarrow BC \perp SE \Rightarrow \widehat{SHE} = 45^\circ$

Tương tự $\widehat{SFH} = 45^\circ$

Hai tam giác vuông SHE và SHF bằng nhau suy ra HE = HF

$\Rightarrow$ H nằm trên đường phân giác góc C của tam giác đều ABC

$\Rightarrow$ H là trung điểm AB



Ta có:

HE.BC = CH.HB

$\Rightarrow HE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$SH = HE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S\Delta_{ABC} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^3}{16}$$

$$\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM.SN}{SB.SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{ABCMN} = \frac{3}{4}V_{SABC} = \frac{3a^3}{64}$$

Bài 74:

Từ giả thiết: $\widehat{D'DO} = 60^0$

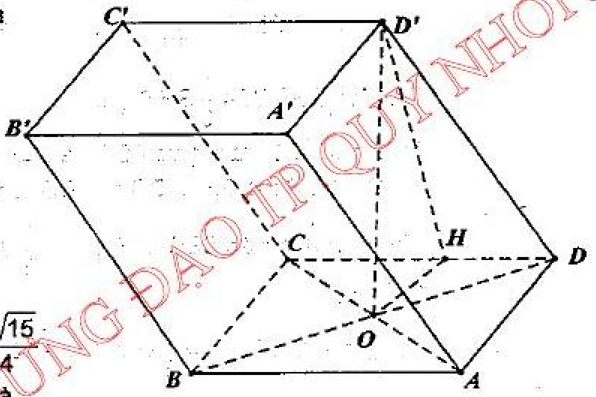
Tam giác ABD đều, $AC = 2AO = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và $OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2}$; DD' = a

Gọi O' là tâm của hình thoi A'B'C'D'. Ta có: OO' = a = DD' và OO' $\perp$ AC (do $AC \perp (BDD'B')$), nên diện tích tam giác ACC' là:

$$S_{\Delta ACC'} = \frac{1}{2}S_{ACC'A'} = \frac{1}{2}OO'.AC = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$, trong đó $AC = a\sqrt{3}$

Diện tích tam giác ACD là

$S_{\Delta ACD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Kẻ OH vuông góc với CD thì D'H $\perp$ CD và ΔOD'H vuông tại O.

Do đó $DH = \dfrac{a}{4}$

Suy ra

$D'H = \sqrt{D'D^2 - DH^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$

Diện tích tam giác C'CD là

$$S_{\Delta C'CD} = \frac{1}{2}S_{CDD'C'} = \frac{1}{2}CD.D'H = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình chóp C.ADC' là:

$$S_{xq} = S_{\Delta ACC'} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta CDC'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{15}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\left(6+\sqrt{5}\right)$$

Thể tích $V_{C.AC'D} = V_{C'.ACD} = \dfrac{1}{3}D'O.S_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$ (đvtt)

Bài 75:

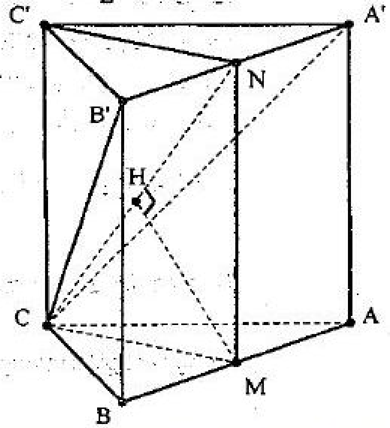
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A'B'. Tam giác CAB cân tại C suy ra AB $\perp$ CM. Mặt khác AB $\perp$ CC' $\Rightarrow AB \perp (CMNC') \Rightarrow A'B' \perp (CMNC')$. Kẻ MH $\perp$ CN (H $\in$ CN). $MH \subset (CMNC') \Rightarrow MH \perp A'B' \Rightarrow MH \perp (CA'B')$

mp(CA'B') chứa CB' và song song với AB nên

$$d(AB, CB') = d(AB,(CA'B')) = d(M,(CA'B')) = MH = \frac{a}{2}$$

Tam giác vuông BMC

$\Rightarrow CM = BM.\tan 30^0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$



Tam giác vuông CMN

$\Rightarrow \dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{MC^2} + \dfrac{1}{MN^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{1}{MN^2} \Leftrightarrow MN = a$

Từ đó

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.MN = \dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.a = \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$

Bài 76 :

Gọi H là trung điểm của BC . Vì ΔABC đều $\Rightarrow AH \perp BC$

Ta có $AA' \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc)

Vậy góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'HA} = 30^\circ$

Gọi $BH = x \Rightarrow AB = BC = 2x$.

Vậy $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$

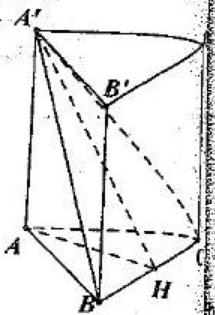
Xét $\Delta A'AH$, có $A'H = \dfrac{AH}{\cos 30^\circ} = \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 2x$

Mặt khác, có $S_{\Delta A'BC} = \dfrac{1}{2}.A'H.BC = \dfrac{1}{2}.2x.2x = 18 \Rightarrow x = 3$

nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AH.BC = \dfrac{1}{2}.3\sqrt{3}.6 = 9\sqrt{3}$ cân tại A $\Rightarrow AA' = AB = a\sqrt{2}$

Ta có $AA' = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3$

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = 9\sqrt{3}.3 = 27\sqrt{3}$



Bài 77:

a. Gọi $O = AC \cap BD$

Theo giả thiết $SA = SB = SC = SD$ và $OA = OB = OC = OD$, tức hai điểm S và O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$

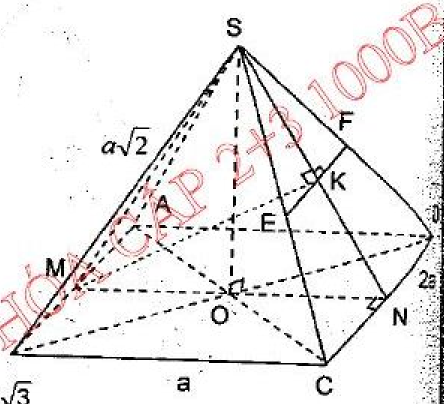
$\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Trong tam giác vuông SOA,

$SO^2 = SA^2 - AO^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).



b. Gọi K là trung điểm EF, khi đó K là trung điểm SN.

Ta có $SM = \sqrt{MO^2 + SO^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}} = a$,

do đó $SM = MN$, suy ra tam giác SMN cân tại M, dẫn đến $SN \perp MK$.

Mặt khác $SN \perp EF$, suy ra $SN \perp (MEF)$. đpcm.

Bài 78:

a. Vì tam giác ABC vuông tại C nên

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (cm)

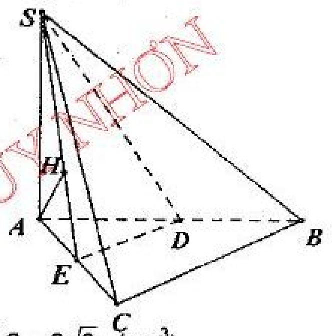
$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BC = \dfrac{1}{2}.3.4 = 6$ (cm^2)

Vì $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC trên (ABC)

$\Rightarrow$ góc giữa SC với (ABC) là $\widehat{SCA} = 60^\circ$

Trong tam giác vuông SAC có

$SA = AC.\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$



Do $SA \perp (ABC)$ nên $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.3\sqrt{3}.6 = 6\sqrt{3}$ (cm^3).

b. Gọi E là trung điểm AC mà D là trung điểm AB nên DE là đường trung bình trong tam giác ABC $\Rightarrow DE // BC \Rightarrow BC // (SDE)$ mà $SD \subset (SDE)$ nên

$d_{(BC,SD)} = d_{(BC,(SDE))} = d_{(B,(SDE))} = d_{(A,(SDE))}$ (vì D là trung điểm AB)

Vì $BC \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$, mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp DE \Rightarrow DE \perp (SAE)$

$\Rightarrow (SDE) \perp (SAE)$ mà $(SDE) \cap (SAE) = SE$. Trong (SAE) kẻ $AH \perp SE$

$\Rightarrow AH \perp (SAE) \Rightarrow AH = d_{(A,(SDE))}$

Trong tam giác vuông SAE có AH là đường cao nên :

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{27} + \dfrac{8}{27} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$. Vậy $d_{(BC,SD)} = \sqrt{3}$

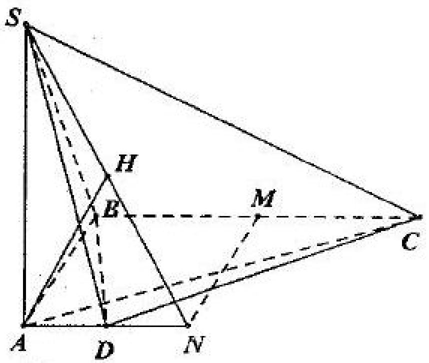
Bài 79:

a. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABCD).

Do đó góc giữa SC với mặt phẳng (ABCD) là góc giữa SC với AC và bằng $\widehat{SCA}$ (vì tam giác SAC vuông tại A nên $\widehat{SCA} < 90^\circ$)

Theo giả thiết, hình thang ABCD vuông tại A và B nên tam giác ABC vuông tại B và có

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.



Trong tam giác vuông SAC có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b. Vì AC là hình chiếu của SC trên (ABCD) mà $AC \perp BD$ nên $SC \perp BD$.

Đặt $AD = x$, $x > 0$ ta có $BD = \sqrt{a^2 + x^2}$

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}(AD + BC).AB \Leftrightarrow a\sqrt{5}.\sqrt{a^2 + x^2} = (x + 2a).a$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 4ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$. Vậy $AD = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2} + 2a\right).a = \dfrac{5a^2}{4}$

Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a.\frac{5a^2}{4} = \frac{5a^3}{12}$

c. Ta có M là trung điểm BC nên $BM = \frac{1}{2}BC = a$

Gọi N là điểm đối xứng với A qua D thì $AN = 2AD = a$.
Khi đó $BM = AN = AB = a$ và $BM // AN$ nên tứ giác $ABMN$ là hình vuông
$\Rightarrow AB // MN \Rightarrow AB // (SMN)$ mà $SM \subset (SMN)$ nên $d_{(AB,SM)} = d_{(AB,(SMN))} = d_{(A,(S$

Vì $MN // AB \Rightarrow MN \perp AN$ và $MN \perp SA$ nên $MN \perp (SAN)$.
Từ A kẻ $AH \perp SN$ tại H thì $AH \perp (SMN) \Rightarrow d_{(A,(SMN))} = AH$.

Do tam giác SAN vuông cân tại A nên H là trung điểm $SN \Rightarrow AH = \frac{1}{2}SN =$

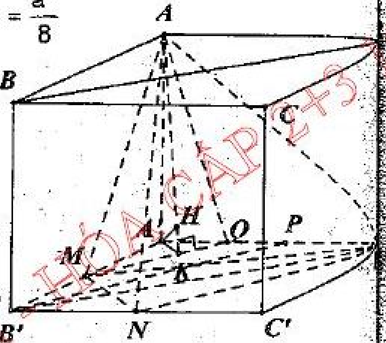
Bài 80:

1. Ta có: $S_{\Delta D'MN} = S_{A'B'C'D'} - 2S_{\Delta D'C'N} - S_{\Delta B'MN} = a^2 - a\cdot\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}$

Theo giả thiết: $AA' \perp (A'B'C'D')$

$\Rightarrow AA'$ là đường cao của tứ diện $AD'MN$.

Vậy $V_{AD'MN} = \frac{1}{3}\cdot AA'\cdot S_{\Delta D'MN} = \frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{3a^2}{8} = \frac{a^3}{8}$



2. Trong $(A'B'C'D')$ gọi P là trung điểm của $A'D' \Rightarrow B'P // D'N$.
Trong $(A'B'C'D')$ kẻ $MQ // B'P$ $(Q \in A'D')$.
Do M là trung điểm của $A'B'$ nên Q là trung điểm của $A'P \Rightarrow D'Q = 3A'Q$.
Do $MQ // B'P \Rightarrow MQ // D'N \Rightarrow D'N // (AMQ)$
$\Rightarrow d(AM, D'N) = d(D'N, (AMQ))$
$= d(D', (AMQ)) = 3d(A', (AMQ))$ (do $D'Q = 3A'Q$)
Trong $(A'MQ)$ kẻ $A'K \perp MQ \Rightarrow MQ \perp (AA'K)$. Trong $(AA'K)$ kẻ $A'H \perp AK$
$\Rightarrow A'H \perp (AMQ) \Rightarrow d(A', (AMQ)) = A'H$.
Ta có:

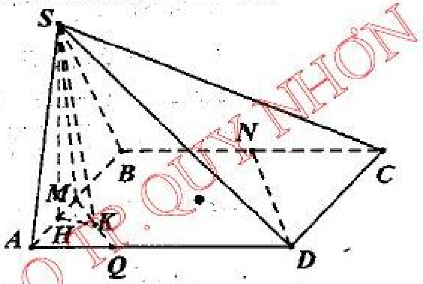
$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{A'Q^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{16}{a^2} \Rightarrow A'H = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Vậy $d(AM, D'N) = 3A'H = \frac{3a}{\sqrt{21}}$

Bài 81:

Tính được $BD = 2a, AC = 2a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD.AC = 2a^2\sqrt{3}$

Tam giác SAB vuông tại S, suy ra SM = a, từ đó tam giác SAM đều.



Gọi H là trung điểm của AM suy ra
$SH \perp AB$
$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$SH = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = a^3$

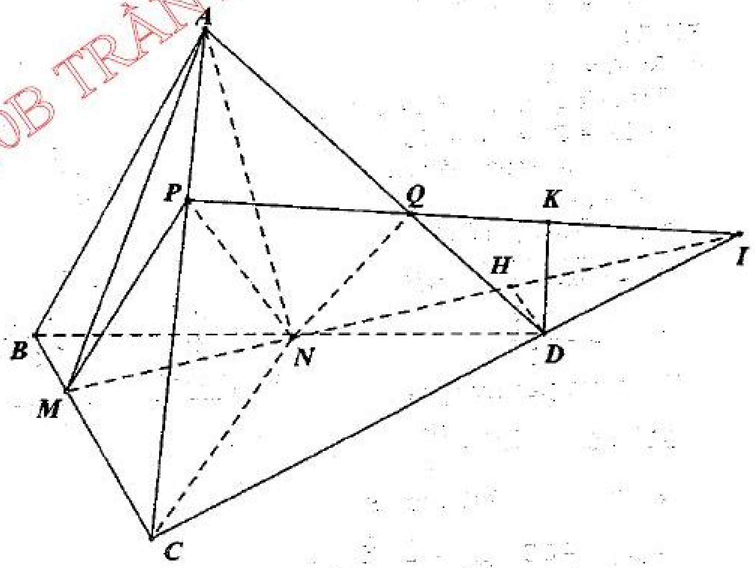
Gọi Q là điểm thoả mãn

$AQ = \frac{1}{4}AD \Rightarrow MQ // DN$

Gọi K là trung điểm của MQ, suy ra $HK // AD$, $HK \perp MQ$, $MQ \perp (SHK)$

Góc α giữa SM và DN là góc $\widehat{BAD}$: $\cos\alpha = \frac{MK}{SM} = \frac{\frac{1}{2}MQ}{a} = \frac{\frac{1}{4}DN}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Bài 82:



Trong (BCD): $MN \cap CD = I \Rightarrow IP = (MNP) \cap (ACD)$
Trong (ACD): $IP \cap AD = Q \Rightarrow Q = AD \cap (MNP)$
Kẻ $DH // BC$ $(H \in IM)$; Kẻ $DK // AC$ $(K \in IP)$

$\Delta NMB = \Delta NDH \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{DH}{CM} = \frac{BM}{CM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IK}{IP} = \frac{DK}{CP} = \frac{ID}{IC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{DK}{2AP} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DK}{AP} = \frac{2}{3}$

ΔAPQ đồng dạng $\Delta DKQ \Rightarrow \frac{AQ}{DQ} = \frac{AP}{DK} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}$

Ta có : $\frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{BM.BN}{BC.BD} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; $\frac{S_{BCN}}{S_{BCD}} = \frac{S_{NCD}}{S_{BCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{MNC}}{S_{BCD}} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{8}$ (1); $\frac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{2}$; $\frac{V_{AMNC}}{V_{ABCD}} = \frac{3}{8}$

$\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \frac{AP}{AC}.\frac{AQ}{AD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{V_{ANPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{10}$ (2)

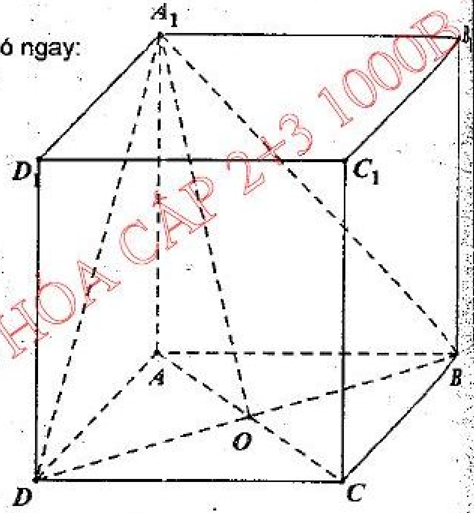
$\frac{V_{AMNP}}{V_{AMNC}} = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{8}$ (3)

Cộng (1) , (2) và (3) Ta có: $\frac{V_{ABMN} + V_{ANPQ} + V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{7}{20}$

$\frac{V_{ABMNQP}}{V_{ABCD}} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{V_{CDNMPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{13}{20} \Rightarrow \frac{V_{ABMNQP}}{V_{CDNMPQ}} = \frac{7}{13}$

Vậy (MNP) chia khối tứ diện thành hai phần với tỉ lệ thể tích $\frac{7}{13}$

Bài 83:



Đặt AC = a, BD = b, AA_1 = c, ta có ngay:

$SACC_1A_1 = AA_1 . AC \Leftrightarrow ac = s_1$

$SBDD_1B_1 = BB_1 . BD \Leftrightarrow bc = s_2$

Thể tích V của hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ được cho bởi:

$V = S_{ABCD}.AA_1 = \frac{1}{2}AC.BD.AA_1$

$= \frac{1}{2}abc = \frac{s_1s_2}{2c}$ (1)

Trong ΔA_1BD vuông tại A, ta có:

$A_1O = \frac{1}{2}BD = \frac{b}{2}$.

Ngoài ra, trong ΔA_1BD vuông tại A, ta có:

$A_1O^2 = A_1A^2 + AO^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = c^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow c^4 = \frac{1}{4}(b^2c^2 - a^2c^2)$

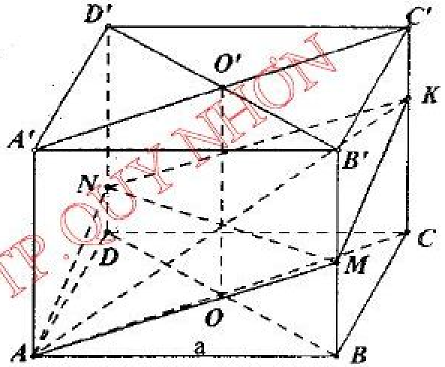
$\Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{s_2{}^2 - s_1{}^2}{4}}$ (2)

Thay (2) vào (1), ta được: $V = \frac{s_1s_2}{2\sqrt[4]{\frac{s_2^2 - s_1^2}{4}}} = \frac{s_1s_2}{\sqrt[4]{4(s_2^2 - s_1^2)}}$

Bài 84:

Gọi O, O' lần lượt là tâm của ABCD, A'B'C'D'.

I là giao điểm của AK với OO'



$\Rightarrow OI = \frac{CK}{2} = \frac{a}{3}$.

Mặt phẳng (α) chứa AK // BD

nên (α) qua I và cắt mp (BDB'D') theo giao tuyến MN // BD

$\Rightarrow BM = DN = OI = \frac{a}{3}$.

Đáy ABCD là hình vuông

$\Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow AK \perp MN$

I là trung điểm của MN và của AK

nên thiết diện AMKN là hình thoi.

Mặt phẳng (α) cắt hình lập phương thành hai khối.

Gọi V_1 là thể tích khối đa diện ABCDMNK,

V_2 là thể tích khối đa diện AMKNA'B'C'D'.

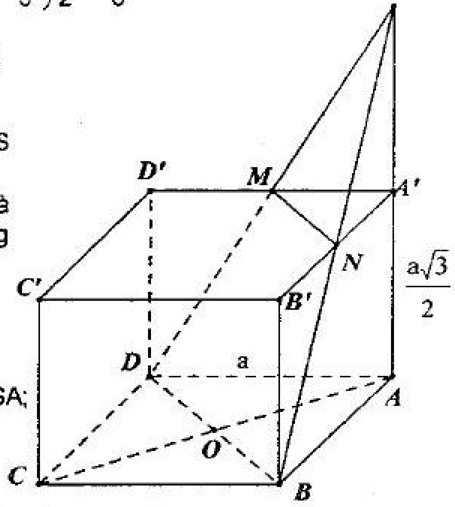
$V = a^3$ là thể tích của khối tứ diện ABCD thì

$V = a^3 = V_1 + V_2$. Ta có: $V_1 = 2V_{ABCKM}$

Mà $2V_{ABCKM} = \frac{1}{3}AB.S_{BCMK} = \frac{1}{3}a\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$

$\Rightarrow V_1 = \frac{2a^3}{6} = \frac{a^3}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{2a^3}{3}$ (đvtt)

i 85:



Gọi O là tâm của hình thoi ABCD; S là điểm đối xứng của A qua A'.

Khi đó S, M, D thẳng hàng và N là trung điểm của SD; S, N, B thẳng hàng và N là trung điểm của SB.

ΔBAD có AB = AD = a

$\widehat{BAD} = 60^o \Rightarrow \Delta BAD$ đều

$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC = 2AO = a\sqrt{3} = SA$;

$CC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = AO$.

Hai tam giác vuông SAO và ACC' bằng nhau.

$\Rightarrow \widehat{ASO} = \widehat{CAC'} \Rightarrow AC' \perp SO$ (1).

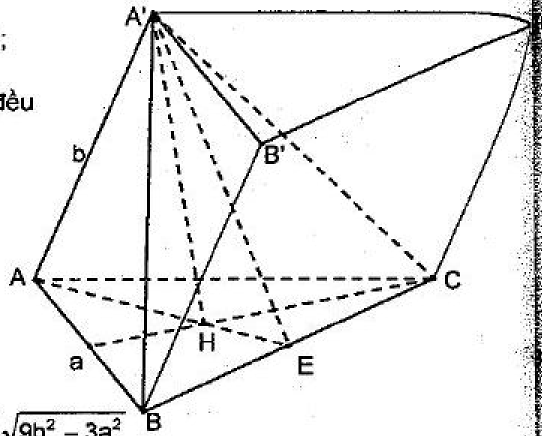
Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp AA' \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (BDMN)$.

Do đó: $V_{ABDMN} = \frac{3}{4}V_{SABD}$ (vì $S\Delta_{SMN} = \frac{1}{4}S\Delta_{SBD}$)

$= \frac{3}{4}.\frac{1}{3}SA.S\Delta_{ABD} = \frac{1}{4}a\sqrt{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{16}$ (đvtt).

Bài 86:



Gọi E là trung điểm cạnh BC;
H là tâm tam giác đều ABC.
Do A'ABC là chóp tam giác đều
nên $(\widehat{ABC, A'BC}) = \widehat{A'EH}$

Ta có: $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$HE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

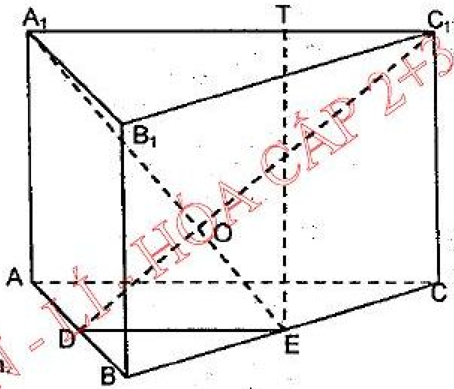
$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9b^2 - 3a^2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{A'H}{HE} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AE = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $V_{A'BB'C'C} = V_{ABCA'B'C'} - V_{A'ABC}$

$$= A'H.S_{ABC} - \frac{1}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{2}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6} \text{ (đvtt).}$$

Bài 87:



Trên hình: D, E là trung điểm của AB và BC tương ứng.

Góc giữa EA1 và DC1 bằng $\frac{\pi}{3}$,

do đó có 2 khả năng:

1. $\widehat{A_1OC_1} = \widehat{DOE} = \frac{\pi}{3}$

2. $\widehat{A_1OD} = \widehat{C_1OE} = \frac{\pi}{3}$

Trường hợp 1.

Dễ thấy, A_1C_1ED là hình thang cân.

Khi đó $DO = OE = DE = \frac{a}{2}$ (DE là đường trung bình của ΔABC)

và $A_1O = OC_1 = A_1C_1 = a \Rightarrow A_1E = \frac{3a}{2}$

Đường cao của hình lăng trụ:

$$H = AA_1 = \sqrt{A_1E^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow V = S_{ABC}.H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8} \text{ (đvtt)}$$

ường hợp 2.

Ta có: $\widehat{EA_1C_1} = \frac{\pi}{6}$, kẻ $ET \perp A_1C_1 \Rightarrow A1T = \frac{1}{2}(DE + A_1C_1) = \frac{3a}{4}$

Trong $\Delta EA_1T, A_1E = \frac{A_1T}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A1E = AE$ là vô lý vì A_1E là đường xiên còn AE là hình chiếu của A_1E trên mặt phẳng (ABC) nên trường hợp này không xảy ra.

Vậy thể tích khối lăng trụ nếu tam giác đáy có cạnh bằng a là $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ (đvtt).

ài 88:

Giả sử $BB_1 = LL_1 = h$, $LB = L_1B_1 = l$; $\Delta FDB \sim \Delta L_1EB_1$.

Tỉ số đồng dạng $k = \frac{FD}{EB_1} = \frac{3}{4}$; $L_1E = \frac{4}{3}DB = \frac{2}{3}h$, $EL = h - \frac{2}{3}h = \frac{h}{3}$,

$FB = \frac{3}{4}L_1B_1 = \frac{3}{4}l$, $LF = l - \frac{3}{4}l = \frac{l}{4}$

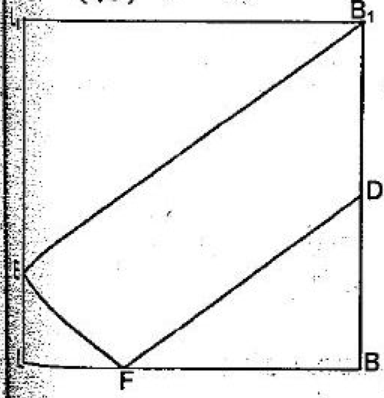
Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} EF^2 = EL^2 + LF^2 \\ FD^2 = DB^2 + FB^2 \end{cases}$

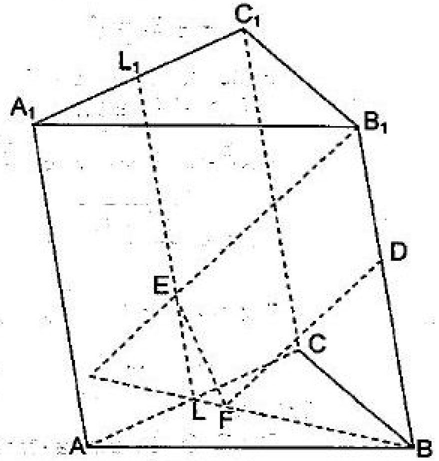
Từ đó: $\begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{h}{3}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2 \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}l\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{2} \\ l = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

Giả sử AC = a. Rõ ràng $l \geq \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a \leq \frac{2.l}{\sqrt{3}}$

Thể tích của lăng trụ $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ sẽ đạt cực đại

$V_{max} = \left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right).\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$ (đvtt).





Bài 89:

Cách 1: Đặt AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên A'C, suy BH ⊥ A'C, mà BD ⊥ (A'AC) ⇒ BD ⊥ A'C, do đó A'C ⊥ (BHD) ⇒ A'C ⊥ DH

Vậy góc phẳng nhị diện [B,A'C,D] là góc $\widehat{BHD}$.

Xét △A'DC vuông tại D có DH là đường cao, ta có:

$$DH.A'C = CD.A'D \Rightarrow DH = \frac{CD.A'D}{A'C} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Tương tự, △A'BC vuông tại B có BH là đường cao và $BH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác: $2a^2 = BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2.BH.DH.\cos\widehat{BHD}$

$$= \frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2.\frac{2a^2}{3}\cos\widehat{BHD}$$

Do đó: $\cos\widehat{BHD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^0$.

Cách 2: Ta có: BD ⊥ AC ⇒ BD ⊥ A'C (Định lý ba đường vuông góc).

Tương tự, B'C ⊥ A'C ⇒ (BC'D) ⊥ A'C.

Gọi H là giao điểm của A'C và (BC'D) ⇒ $\widehat{BHD}$ là góc phẳng của [B,A'C,D]

Các tam giác vuông HA'B, HA'D, HA'C' bằng nhau

⇒ HB = H'C = HD ⇒ H là tâm △BC'D đều ⇒ $\widehat{BHD} = 120^0$.

Bài 90:

Ta có A'M // NC; A'M = NC ⇒ A'MCN là hình bình hành, do đó A'C và MN nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Mặt khác A'DCB' là hình bình hành nên trung điểm I của A'C cũng chính trung điểm B'D.

Vậy MN và B'D cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên B'MDN là hì bình hành.

Do đó B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng (đpcm)

Mặt khác $DM^2 = DA^2 + AM^2 = DC^2 + CN^2 = DN^2$.

Vậy hình bình hành B'MDN là hình thoi. Do đó B'MDN là hình vuông

⇔ MN = B'D ⇔ AC = B'D ⇔ $AC^2 = B'D^2 = B'B^2 + BD^2$

⇔ $3a^2 = B'B^2 + a^2$ ⇔ $B'B = a\sqrt{2}$ ⇔ $AA' = a\sqrt{2}$

Bài 91:

a. Tính khoảng cách giữa A'B và B'C'

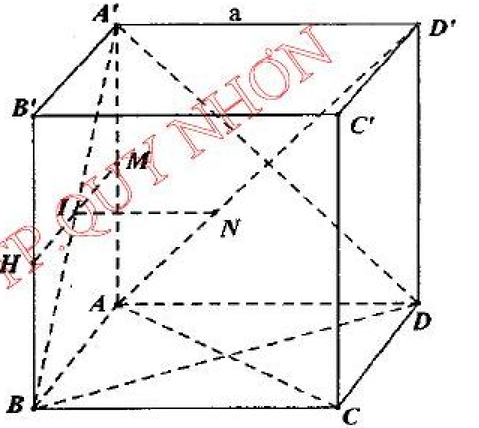
Ta có: B'C // A'D ⇒ B'C' // (A'BD)

⇒ Khoảng cách giữa B'C và A'B bằng khoảng cách từ C đến (A'BD)

Ta có: $V_{A'BCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.AA' \Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.CD.AA' = \frac{a^3}{6}$

Gọi d là khoảng cách từ C đến (A'BD).

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3}S_{A'BD}.d \Leftrightarrow d = \frac{3V}{S_{A'BD}} = \frac{3\frac{a^3}{6}}{\left(a\sqrt{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Vậy d(A'B, B'C) = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

b. Tính thể tích ANBB'

Gọi I là trung điểm BB'

$\Rightarrow NI = \frac{AD'}{2} = \frac{a}{2}$.

Ta có: A'D' ⊥ (ABB')

⇒ NI ⊥ (ABB')

$$\Rightarrow V_{N.ABB'} = \frac{1}{3}S_{ABB'}.NI$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{12} \text{ (đvtt)}$$

c. Gọi H là trung điểm BB' ⇒ MH // A'B'

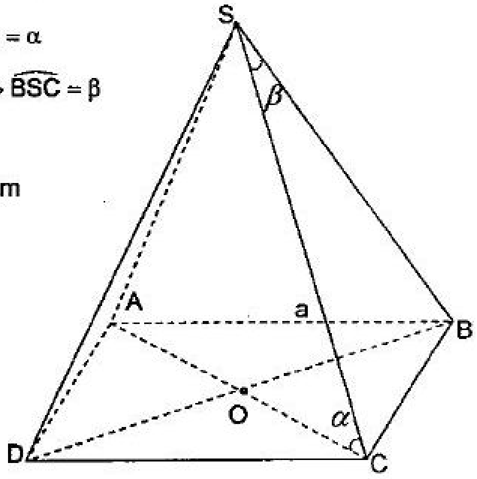
Ta có: A'B' ⊥ (BB'C'C) ⇒ MH ⊥ (BB'C'C)

$$\Rightarrow V_{MBB'C'C} = \frac{1}{3}S_{BB'C'C}.MH = \frac{1}{3}a^2.a = \frac{a^3}{3}$$

$$\text{Ta có: } V_{ACBC'C'B'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2}{2}.a = \frac{a^3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MBB'C'C}}{V_{ACBA'C'B'}} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{a^3}{2}} = \frac{2}{3}$$ hằng số, không phụ thuộc vị trí điểm M.

Bài 91:



Từ giả thiết SA ⊥ (ABCD) ⇒ $\widehat{SCA} = \alpha$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{BSC} = \beta$$

a. Đặt AD = b, ta có: $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ta tính SC lần lượt trong hai tam giác SAC và SBC, ta được:

$$SC = \frac{AC}{\cos\widehat{SCA}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos\alpha};$$

$$SC = \frac{BC}{\sin\widehat{BSC}} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\Leftrightarrow b^2\left(\frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{a^2.\sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \Rightarrow b = \frac{a.\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

BỒI DƯỠNG TOÁN-LÝ-HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Từ đó, ta được: $SC^2 = \frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

b. Ta có: $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA$

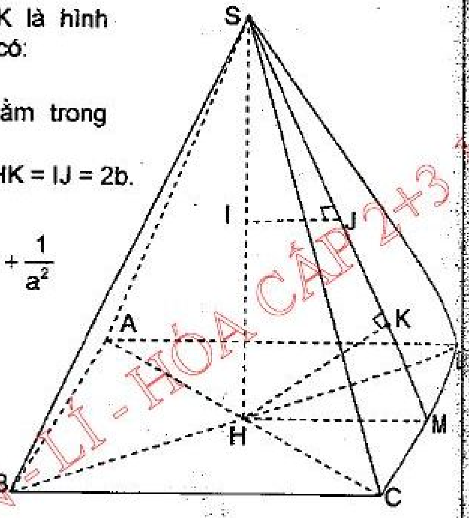
Trong đó: $S_{ABCD} = a.b = \frac{a^2.\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$, vì ABCD là hình chữ nhật

$SA = SC.\sin SCA = \frac{a.\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$

Vậy thể tích của khối chóp SABCD là:

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}\frac{a^2.\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.\frac{a.\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}} = \frac{a^2\sin\alpha.\sin\beta}{3\left(\cos^2\alpha - \sin^2\beta\right)}$ (đvtt).

Bài 92:



Do S.ABCD là hình chóp đều nên H tâm của hình vuông ABCD.

Gọi M là trung điểm của BC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SM ta có:

$BC \perp SH$; $BC \perp HM$

Suy ra $BC \perp (SHM)$. Do BC nằm trong mp(SBC) nên $(SBC) \perp (SHM)$.

Mà $HK \perp SM$ nên $HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = IJ = 2b$.

Trong Δ vuông SHM ta có:

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{a^2}$

$\Leftrightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.SH.dt(ABCD)$

$= \frac{2}{3}.\frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}$ (đvtt).

Bài 93:

Hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 60^0$. Nên ΔBAD đều có cạnh là a.

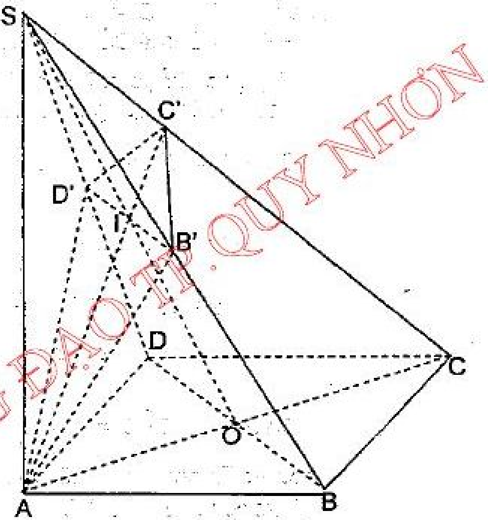
$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a$.

Trong ΔSAC vuông ở A, trung tuyến $AC' = \frac{SC}{2} = a \Rightarrow \Delta SAC'$ đều cạnh a.

Gọi O là giao điểm của AC với BD.

I là giao điểm cẩu AC' và B'D'.



Ta có: I là trọng tâm ΔSAC (vì I là giao điểm của 2 trung tuyến SO và AC')

$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a$.

Ta có: $B'D' \perp AC'$ (vì B'D' // BD)

nên $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC'.B'D' = \frac{a^2}{3}$.

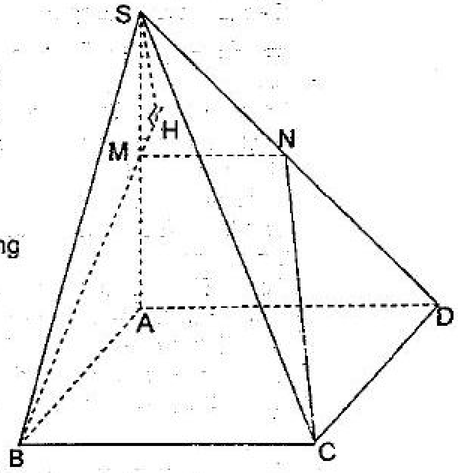
Đường cao h của khối chóp S.AB'C'D' chính là đường cao SH của ΔSAC' vì $SH \perp AC'$, $SH \perp B'D'$.

Chú ý rằng ΔSAC' đều cạnh a

nên $h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{SAB'C'D'} = \frac{1}{3}h.S_{AB'C'D'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Bài 94:



Tính thể tích hình chóp S.BCNM.

Mặt phẳng (BCM) // AD nên nó cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến MN // AD.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp BM$

Tứ giác BCNM là hình thang vuông BM là đường cao.

Ta có: $SA = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow MN = \frac{4a}{3}; BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích hình thang BCNM là: $S = \left(\frac{2a + \frac{4a}{3}}{2}\right)\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$ (đvdt).

$V_{SBCNM} = \frac{1}{3}SH.dt(BCNM)$. Hạ $SH \perp BM$.

Ta có: $SH \perp BM$.

Và $BC \perp mp(SAB) \equiv (SBM) \Rightarrow BC \perp SH$. Vậy $SH \perp mp(BMNC)$

⇒ SH là đường cao của khối chóp S.BCNM.

Trong tam giác SBA ta có: $SB = \frac{AB}{\cos 60^0} = 2a \Rightarrow \frac{AB}{SB} = \frac{AM}{MS} = \frac{1}{2}$.

Vậy BM là phân giác của góc

$\widehat{SBH} \Rightarrow \widehat{SBH} = 30^0 \Rightarrow SH = SB.\sin 30^0 = 2a.\frac{1}{2} = a$.

Vậy thể tích khối chop S.BCNM là: $V = \frac{1}{3}a.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}a^2}{27}$ (đvtt).

Bài 95:

Gọi giao điểm của AC và BD là O thì $SO \perp (ABCD)$,

Suy ra $\widehat{SBC} = \beta$.

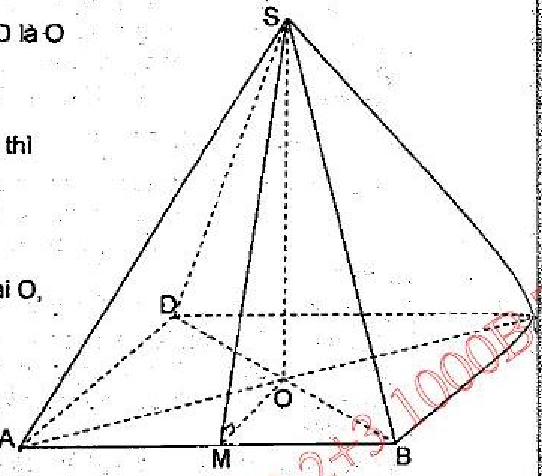
Gọi trung điểm của AB là M thì $OM \perp AB$ và $SM \perp AB$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là $\widehat{SMO}$.

Tam giác OAB vuông cân tại O,

Nên $OM = \frac{a}{2}$, $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\beta$



Do đó: $\tan\widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \sqrt{2}\tan\beta$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\beta = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\tan\beta$ (đvtt).

Bài 96:

a. Tính thể tích hình chóp S.ABCD

Vẽ $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$

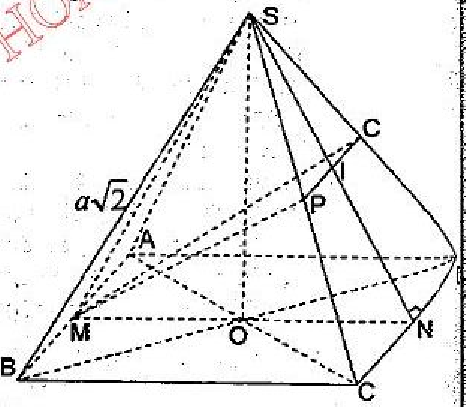
$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$

$\Rightarrow$ O là tâm hình chữ nhật ABCD

$\Rightarrow$ O là giao điểm 2 đường chéo AC và BD. Ta có:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$



$\Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.2a.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

b. Chứng minh rằng ΔSMN đều

$SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a \Rightarrow SM = SN = a$ mà $MN = a$.

Vậy ΔSMN là tam giác đều.

c. Chứng minh rằng: $SN \perp mp(MPQ)$

SN cắt PQ tại I, PQ // CD $\Rightarrow$ I là trung điểm PQ $\Rightarrow$ MI = SN (1)

Ta có: $CD \perp mp(SMN) \Rightarrow PQ \perp mp(SMN) \Rightarrow PQ \perp SN$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SN \perp mp(MPQ)$ (đpcm).

Bài 97:

Gọi K là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SK.

Do $BC \perp AK$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp AH$.

Do $AH \perp HK$, $AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$.

Xét tam giác vuông SAK: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Xét tam giác vuông SAB: $SA^2 = SM.SB \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{4}{5}$

Xét tam giác vuông SAC: $SA^2 = SN.SC \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{4}{5}$

Suy ra: $\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow S_{BCNM} = \frac{9}{25}S_{SBC} = \frac{9a^2\sqrt{19}}{100}$.

Vậy thể tích của khối chóp A.BCNM là :

$V = \frac{1}{3}.AH.S_{BCNM} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$ (đvtt).

Bài 98:

Gọi P là trung điểm SA.

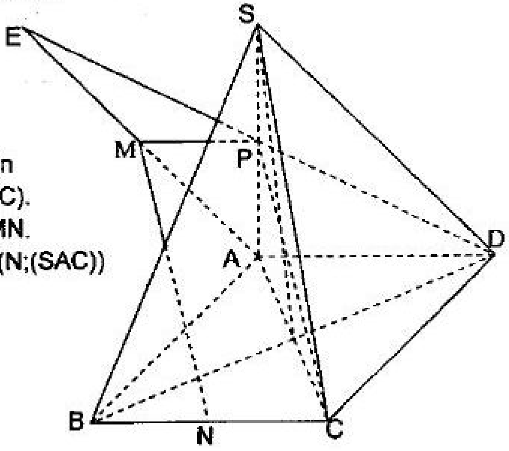
Ta có MNCP là hình bình hành nên MN song song với mặt phẳng (SAC).

Mặt khác, $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MN$.

Vì MN // (SAC) nên d(MN;AC) = d(N;(SAC))

$= \frac{1}{2}d(B;(SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Vậy $d(MN;AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (đvđd).



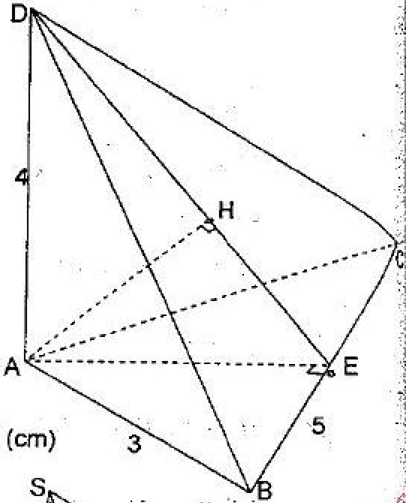
Bài 99:

Cách 1. Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$.

Lại có $AD \perp mp(ABC) \Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Do đó có thể chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc, gốc A sao cho B(3; 0; 0), C (0; 4; 0), D(0; 0; 4).

Mặt phẳng (BCD) có phương trình: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}-1=0$.

Khoảng cách cần tính là: $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$.



Cách 2. Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB\perp AC$.

Lại có $AD\perp mp(ABC)$ $\Rightarrow AD\perp AB$ và $AD\perp AC$ nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.

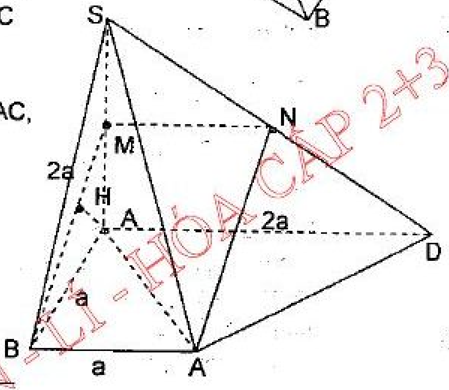
Gọi AE là đường cao của tam giác ABC; AH là đường cao của tam giác ADE thì AH chính là khoảng cách cần tính.

Dễ dàng chứng minh được hệ thức:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

Thay AC = AD = 4cm; AB = 3cm

vào hệ thức trên ta tính được $AH=\frac{6\sqrt{34}}{17}$ (cm)



Cách 3. Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB\perp AC$.

Lại có $AD\perp mp(ABC)$

$\Rightarrow AD\perp AB$ và $AD\perp AC$ nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD,

ta có $V=\frac{1}{6}.AB.AC.AD=8$

Áp dụng công thức

$AH=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$ với V = 8 và

$S_{\Delta ABC}=2\sqrt{34}$ ta tính được $AH=\frac{6\sqrt{34}}{17}$ (cm).

Bài 100:

Ta có: MN // AD; $MN=\frac{1}{2}AD$, nên ta có: MN // BC; MN = BC = a

$BC\perp mp(SAB)$, nên $BC\perp BM$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNBC là hình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật.
M là trung điểm của SA nên ta có:

$$d(S,BCMN)=d(A,BCMN)=d(A,BM)=\frac{a\sqrt{2}}{2}=h.$$

$$V_{(S.BCMN)}=\frac{1}{3}(a.a\sqrt{2})\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3}{3}\text{ (đvtt)}$$

§ 6: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN ĐỂ GIẢI HHKG

Trong các bài trước chúng ta đã học các phương pháp giải hình học không gian bằng phương pháp hình học, bài này chúng ta học thêm một phương pháp nữa là ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian vào giải hình học không gian. Mỗi phương pháp đều có ưu điểm và nhược điểm riêng. Xu hướng ra đề thường sẽ giải được bằng hai phương pháp khác nhau, chính vì thế để hiểu và vận dụng được phương pháp này cần học được tốt phần giải tích trong không gian và kết hợp với các yếu tố vuông góc, song song trong không gian để từ đó thiết lập các hệ trục hợp lý cho bài toán hình.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp (quan trọng là gốc tọa độ O)

Thích hợp có nghĩa là phải căn cứ vào các cặp cạnh vuông góc để từ đó xác định được gốc tọa độ thích hợp, thông thường dựa vào đặc điểm của hình như hình chóp đều, cạnh bên vuông góc với đáy, mặt bên vuông góc với đáy, hay đáy là hình gì....

Bước 2: Xác định tọa độ các điểm có liên quan (có thể xác định toạ độ tất cả các điểm hoặc một số điểm cần thiết)

Để xác định được tọa độ các điểm các bạn phải tính được độ dài các cạnh (khoảng cách từ điểm đó tới gốc tọa độ) hay hình chiếu các điểm đó xuống các cạnh hay mặt phẳng.

Xem điểm đó thuộc cạnh trục nào, mặt phẳng nào, hay không thuộc mặt phẳng nào, chiều dương hay âm của các trục.

Khi xác định tọa độ các điểm ta có thể dựa vào:

Ý nghĩa hình học của tọa độ điểm (khi các điểm nằm trên các trục tọa độ, mặt phẳng tọa độ).

Dựa vào các quan hệ hình học như bằng nhau, vuông góc, song song, cùng phương, thẳng hàng, điểm chia đọan thẳng để tìm tọa độ, tịnh tiến.

Xem điểm cần tìm là giao điểm của đường thẳng, mặt phẳng.

Dựa vào các quan hệ về góc của đường thẳng, mặt phẳng.

Bước 3: Sử dụng các kiến thức về tọa độ để giải quyết bài toán.

Ưu điểm: Chỉ cần xác định đúng các tọa độ các điểm, áp dụng các kiến thức về hình giải tích như thể tích, diện tích, góc, khoảng cách..., ngoài ra còn ôn lại được các kiến thức về hình giải tích như viết phương trình đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu...

Nhược điểm: Tính toán cồng kềnh, phức tạp làm học sinh dễ nản.

Chú ý: Vì nhược điểm của bài toán nên khi tính toán chúng ta nên chọn các điểm có tọa độ liên quan nhiều đến số 0 và tận dụng các câu có mối liên

quan tới nhau để đỡ mất công tính toán và khi tính các vtvp hoặc vtcp **chọn sao cho các vecto đó đơn giản dễ tính. Mặt khác phải biết kết** **các công thức giữa tọa độ và không gian**

Các dạng toán thường gặp:

Định tính: Chứng minh các quan hệ vuông góc, song song, ...

Định lượng:

- Độ dài đoạn thẳng: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng: $d(M_0;\Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng: $d(M_1,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: $d(\Delta_1,\Delta_2) = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$

Đặc biệt: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD khi biết tọa độ của chúng

$$d(AB,CD) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}$$

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:
$$\left[\begin{array}{l} d\left((P_1),(P_2)\right) = d\left(M_1,(P_2)\right), M_1 \in (P_1) \\ d\left((P_1),(P_2)\right) = d\left(M_2,(P_1)\right), M_2 \in (P_2) \end{array}\right.$$
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song: $\left[\begin{array}{l} d(\Delta_1,\Delta_2) = d(M_1,\Delta_2), M_1 \in \Delta_1 \\ d(\Delta_1,\Delta_2) = d(M_2,\Delta_1), M_2 \in \Delta_2 \end{array}\right.$
- Khoảng cách giữa một đường thẳng song song với một mặt phẳng:
$$d(\Delta,(P)) = (M,(P)), M \in \Delta$$
- Góc giữa hai đường thẳng: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{u_1}.\vec{u_1}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_1}|}$

Đặc biệt: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD khi biết tọa độ của chúng: $\cos\varphi = \dfrac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|}$

- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}$

Góc giữa hai mặt phẳng: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}$

Thể tích khối tứ diện: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ hoặc $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta BCD}.AH$ với $AH = d\left(A,(BCD)\right)$

+ Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

Diện tích thiết diện

+ Diện tích của tam giác: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$

+ Diện tích hình hình hành: $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\right|$

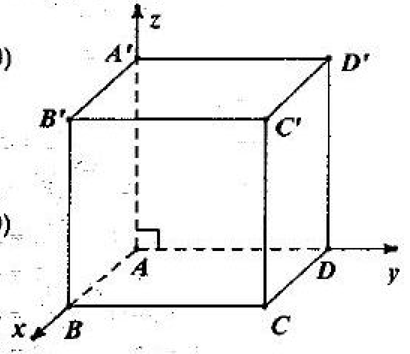
Thể tích hoặc diện tích của một hình hỗn hợp thì ta chia thể tích thành các phần nhỏ hơn và cộng lại

toán cực trị, quỹ tích.

Sử dụng các kiến thức về bất đẳng thức, ứng dụng của đạo hàm.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1: Với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'



hình lập phương .

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

A ≡ O(0;0;0) ; B(a;0;0) ; C(a;a;0) ; D(0;a;0)

A'(0;0;a) ; B'(a;0;a) ; C'(a;a;a) ; D'(0;a;a)

hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

A ≡ O(0;0;0) ; B(a;0;0) ; C(a;b;0) ; D(0;b;0)

A'(0;0;c) ; B'(a;0;c) ; C'(a;b;c) ; D'(0;b;c)

tập giải mẫu:

1: Trong không gian Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α, biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Giải:

Tọa độ của các đỉnh còn lại : $C(1;1;0), B'(1;0;1), D'(0;1;1), C'(1;1;1)$

a. Ta có : $\overrightarrow{A'C} = (1;1;1), \overrightarrow{MN} = (0;1;0), \overrightarrow{A'M} = \left(\frac{1}{2};0;1\right)$

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN là :

$$d(A'C,MN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]\overrightarrow{A'M}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]\right|}$$

$$\text{Hay}: d(A'C,MN) = \frac{\left|\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\right)\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}^2}} = \frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

b. Mặt phẳng (Oxy) có $\vec{n} = \vec{k} = (0;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có dạng : $ax + by + cz + d = 0$

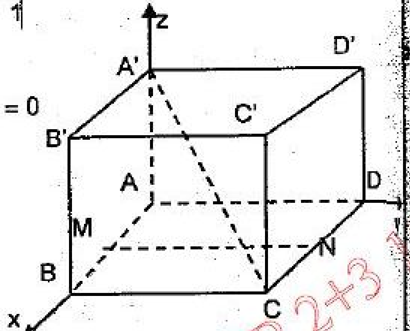
(P) qua A'(0;0;1) thì : $c + d = 0$

(P) qua C(1;1;0) thì : $a + b + d = 0$.

Từ đó suy ra :

$c = -d \Rightarrow (P): ax + by + cz - c = 0$ (1)

Như vậy : $\overrightarrow{n_P} = (a;b;c)$. Theo giả thiết :



$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\overrightarrow{n_P}.\vec{k}}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\Leftrightarrow 6c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$ (2)

Như vậy :

$$\begin{cases}a+b=c\\a^2+b^2=5c^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a-c\\a^2+(a-c)^2=5c^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a-c\\a^2-ac-2c^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a-c\\(a+c)(a-2c)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=a-c\\c=-a\end{cases}\\ \begin{cases}b=a-c\\a=2c\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=2a\\c=-a\end{cases} \Rightarrow (P): ax+2ay-az+a=0 \Leftrightarrow x+2y-z+1=0\\ \begin{cases}b=c\\a=2c\end{cases} \Rightarrow (P): 2cx+cy+cz-c=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-1=0\end{array}\right.$$

Bài 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

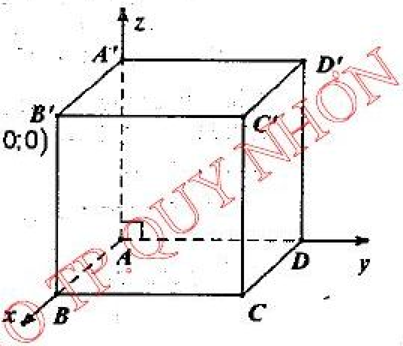
a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'D.

b. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB', CD, A'D'. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C'N.

Giải:

Với hình lập phương .

Chọn hệ trục tọa độ sao cho :



$A \equiv O(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;a;0)$; $D(0;a;0)$

$A'(0;0;a)$; $B'(a;0;a)$; $C'(a;a;a)$; $D'(0;a;a)$

Tính khoảng cách

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (a;0;-a), \overrightarrow{B'D} = (-a;a;-a), \overrightarrow{A'B'} = (a;0;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right] = (a^2;2a^2;a^2)$

$$\Rightarrow d(A'B,B'D) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right].\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{B'D}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Tính góc

$M\left(a;0;\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};a;0\right), P\left(0;\frac{a}{2};a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC'} = \left(\frac{a}{2};0;a\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = 0 \Leftrightarrow MP \perp C'N.$

ch khác:

$$\left.\begin{array}{l}A_1B \perp AB_1\\A_1B \perp AD\end{array}\right\} \Rightarrow A_1B \perp (AB_1C_1D) \Rightarrow A_1B \perp B_1D$$

Tương tự $A_1C_1 \perp B_1D \Rightarrow B_1D \perp (A_1BC_1)$. Gọi $G = B_1D \cap (A_1BC_1)$

Do $B_1A_1 = B_1B = B_1C_1 = a$ nên $GA_1 = GB = GC_1 \Rightarrow$ G là tâm tam giác đều A_1BC_1 có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của A1B thì IG là đường vuông góc chung của A_1B và B1D nên

$$d(A_1B, B_1D) = IG = \frac{1}{3}C_1I = \frac{1}{3}A1B\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Từ cách 1 của 2a) ta tìm được $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2};a;0\right), P\left(0;\frac{a}{2};a\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a;\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC_1} = \left(\frac{a}{2};0;a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC_1} = 0$. Vậy $MP \perp C_1N$.

Gọi E là trung điểm của CC_1 thì $ME \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của MP trên (CDD_1C_1) là ED_1. Ta có:

$\Delta C_1CN = \Delta D_1C_1E \Rightarrow C_1D_1E = CC_1N = 90^0 - D_1C_1N \Rightarrow D_1E \perp C_1N$

Từ đây theo định lý ba đường vuông góc ra có $MP \perp C_1N$.

số: a. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ b. $MP \perp C'N$.

3: Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc của hệ tọa độ biết B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b) (a > 0, b > 0). Gọi M là trung điểm cạnh CC''.

Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b.

c định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

Giải:

Ta có

$C(a;a;0), C'(a;a;b), M\left(a;a;\frac{b}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD} = (-a;a;0), \overrightarrow{BM} = \left(0;a;\frac{b}{2}\right); \overrightarrow{BA'} = (-a;0;b$

a. Tính thể tích

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right) \\ \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'} = -\frac{3a^2b}{2} \end{cases} \Rightarrow V_{BDA'M} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right| = \frac{a^2b}{4}$$

b. Xác định tỉ số

$\overrightarrow{n_{BDM}} = \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right); \overrightarrow{n_{A'BD}} = \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right] = (ab;ab;a^2)$

Mặt phẳng

$(BDM) \perp (A'BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{BDM}}.\overrightarrow{n_{A'BD}} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

Đáp số: a. $\frac{a^2b}{4}$ b. $\frac{a}{b} = 1$.

Bài 4: (ĐH – D 2012) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuô tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích khối tứ diện ABB'C' và khoả cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Giải:

A'AC vuông cân tại A.

Ta có $A'C = a \Rightarrow AC = AA' = \frac{a}{\sqrt{2}}, BC = AD = AB = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$A \equiv O(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox, D\left(0;\frac{a}{2};0\right) \in Oy, C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$A'\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \in Oz; B'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \in Oxz; C'\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right); D'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a}{2};0;0\right) \\ \overrightarrow{AB'} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \\ \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right] = \left(0;-\frac{a^2}{2\sqrt{2}};0\right) \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'} = -\frac{a^3}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ABB'C'} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{4\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = \left(0;\frac{a}{2};0\right) \\ \overrightarrow{BD'} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD'}\right] = \left(\frac{a^2}{2\sqrt{2}};0;\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}(\sqrt{2};0;1)$

Mặt phẳng (BCD') đi qua B và có vtpt $\vec{n} = (\sqrt{2};0;1)$ có phương trình

$$\sqrt{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x + z - \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$

Khoảng cách $d(A,(BCD')) = \frac{\left|-\frac{a}{\sqrt{2}}\right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

ài tập tự giải:

i 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ có A trùng với gốc tọa độ O, B(1;0;0), D(0;1;0), $A_1(0;0;\sqrt{2})$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A_1, B, C và viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B_1D_1 trên mặt phẳng (P).

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với A_1C. Tính diện tích thiết diện của hình chóp A_1.ABCD với mặt phẳng (Q).

Hướng dẫn:

Tìm được tọa độ $C(2;0;0) \in Ox$,

Mặt phẳng $(P): x + y - \sqrt{2}z + 1 = 0$. Phương trình hình chiếu: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = \sqrt{2} + \sqrt{2}t \end{cases}$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với A_1C thì chứa AC_1. Do tam giác AAC_1 vuông cân nên mặt phẳng (Q) cắt BB_1 và CC_1 tại các trung điểm E và F AE cắt A_1B tại J, AF cắt A_1D tại K. Thiết diện là tam giác IJK.

i 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có A(0;0;0), B(2;0;0), $D_1(0;2;2)$.

Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) vuông góc với nhau.

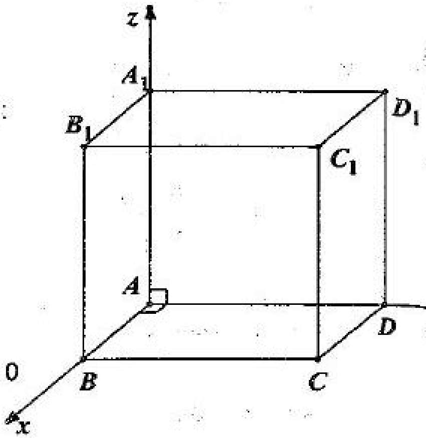
Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ điểm N thuộc đường thẳng AC_1 $(N \neq A)$ đến hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

Hướng dẫn:

Ta có $A(0;0;0); B(2;0;0); C(2;2;0), D(0;2;0);$

$A_1(0;0;2); B_1(2;0;2); C_1(2;2;2); D_1(0;2;2)$

Mặt phẳng (AB_1D_1) có cặp vtcp là: $\overrightarrow{AB_1} = (2,0,2)$; $\overrightarrow{AD_1} = (0,2,2)$



$\Rightarrow$ Mặt phẳng (AB_1D_1) có vtpt là

$\bar{u} = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}\right] = (-1,-1,1)$

Mặt phẳng (AMB_1) có cặp vtcp là:

$\overrightarrow{AM} = (2,1,0)$ và $M(2,1,0)$;

$\overrightarrow{AB_1} = (2,0,2)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (AMB_1) có vtpt là

$\bar{v} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = (1,-2,-1)$

Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = -1(1) - 1(-2) + 1(-1) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow (AB_1D_1) \perp (AMB_1)$

b. $\overrightarrow{AC_1} = (2,2,2) \Rightarrow$ Phương trình tham số AC_1 : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $N \in AC_1 \Rightarrow N(t,t,t)$

Phương trình $(AB_1D_1) : -(x-0) - (y-0) + (z-0) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$

$\Rightarrow d(N, AB_1D_1) = \frac{|t+t-t|}{\sqrt{3}} = \frac{|t|}{\sqrt{3}} = d_1$

Phương trình $(AMB_1) : (x-0) - 2(y-0) - (z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z = 0$

$$\Rightarrow d(N, AMB_1) = \frac{|t-2t-t|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-2t|}{\sqrt{6}} = d_2 \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{|t|}{\sqrt{3}}}{\frac{2|t|}{\sqrt{6}}} = \frac{|t|}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{6}}{2|t|} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy tỉ số khoảng cách từ $N \in AC_1$ $(N \neq A \Leftrightarrow t \neq 0)$ tới 2 mặt phẳng $(AB_1D$

(AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

Bài 3: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = AD = a, AA' =

và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D

A'B'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng (BDMN). Tính thể tích

chóp A.BDMN.

Hướng dẫn:

Vì AB = AD = a và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều nên đáy là hình

Gọi O là tâm hình thoi qua O dựng Oz / /AA'

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$ là gốc tọa độ

$A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox;, C\left(\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox, D\left(0;\frac{a}{2};0\right) \in Oy,$

$B\left(0;-\frac{a}{2};0\right) \in Oy, A'\left(-\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \in Oxz$

$D'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \in Oxz, B'\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \in Oxz, C'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \in Oxz$

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A'B'

$\Rightarrow M\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Tính $\overline{A'C}$ và tính vecto pháp tuyến của mặt phẳng (BDMN) là $\bar{n} = \left[\overline{BD}, \overline{BM}\right]$.

Chứng minh $\overline{A'C} / /\bar{n}$

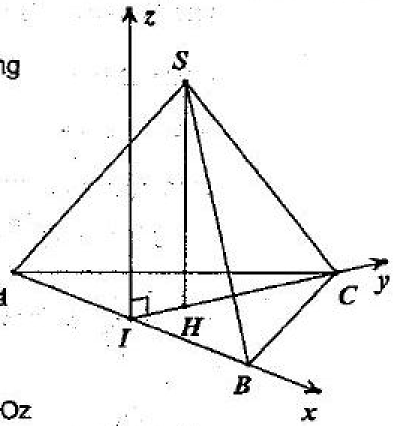
Tính thể tích khối chóp A.BDMN = $V_{ABDM} + V_{ABDN} = \frac{3a^3}{16}$

Dạng 2: Với hình chóp đều

1. Hình chóp tam giác đều S. ABC

Dấu hiệu: Đáy là tam giác đều cạnh a, đường cao vuông góc với đáy từ đó ta thiết lập hệ tọa độ như sau

Cách chọn: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử cạnh tam giác đều bằng a và đường cao bằng h.

$CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HI = \frac{1}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Gọi I là trung điểm của BC

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $I \equiv (0;0;0)$

Khi đó : $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox$

$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy$; $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right) \in Oz$

Hoặc: Chọn hệ trục sao cho $H \equiv O(0;0;0)$

Tính $CI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $HI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Khi đó $A\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right) \in Ox$; $B\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right) \in Ox$

$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right) \in Oy$; $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right) \in Oz$; $I\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right) \in Oy$

Hoặc:

Từ A ta dựng hai đường thẳng $Az//SH, Ax//BC$

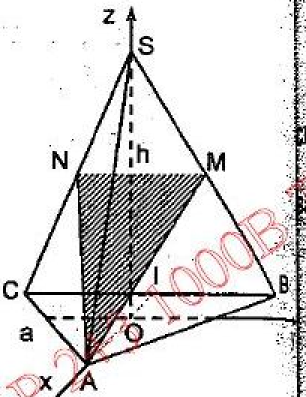
Chọn hệ trục như hình vẽ sao cho

$$A \equiv O(0;0;0),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oxy,\ C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oxy,\ S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h\right) \in O$$

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC

Giải:



Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Trong mặt phẳng (ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt SO = h, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$$O(0;0;0),\ S(0;0;h),\ A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$$

$$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right),\ B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};0\right),\ M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right) \text{ và } N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};-\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overline{AM}, \overline{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4};0;\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right),\ \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overline{SB}, \overline{SC}\right] = \left(-ah;0;\frac{a^2\sqrt{\ }}{6}\right.$$

$$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AM}, \overline{AN}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{\ }}{16}$$

Cách khác:

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$.

Từ giả thiết $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, MN // BC.

$\Rightarrow$ I là trung điểm của SK và MN.

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAC$

$\Rightarrow$ Hai trung tuyến tương ứng AM = AN

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow AI \perp MN$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$$

Suy ra ΔSAK cân tại A $\Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

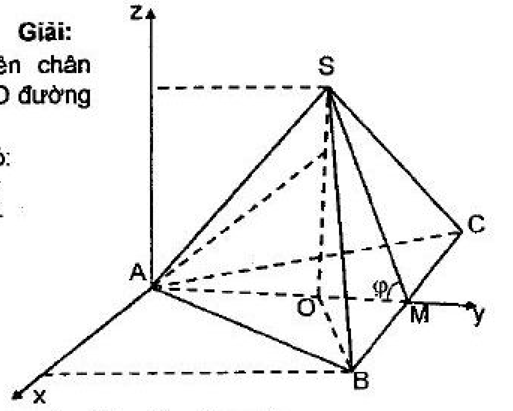
Ta có: $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt).

Chú ý: Có thể chứng minh AI = MN như sau:

$BC \perp (SAK) \Rightarrow MN \perp (SAK) \Rightarrow MN \perp AI$

Bài 2: Cho hình chóp đều S.ABC, cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ $(0 < \varphi < 90^0)$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

Giải:



Vì S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao đỉnh S trùng với tâm O đường tròn (ABC).

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có:

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ và } OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$AM \perp BC,\ SM \perp BC \Rightarrow \widehat{SMA} = \varphi$

ΔSOM vuông có:

$$SO = OM.\tan\varphi = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi$$

Dựng hệ trục tọa độ Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc,

$$A(0;0;0),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$M\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), O\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right),\ S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};\frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)$$

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABC} = \frac{a^3\tan\varphi}{24}$

Ta có: $\overline{BS} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right), \overline{BC} = (-a;0;0)$

$$\Rightarrow \left[\overline{BS};\overline{BC}\right]=\left(0;-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\tan\varphi;-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)=\bar{n}$$

Phương trình mặt phẳng (SBC) qua B với vectơ pháp tuyến $\bar{n}$:

$$O\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}(z-0)=0$$

$$\Leftrightarrow (SBC):\ \tan\varphi y+z-\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi=0.$$

Khoảng cách d từ A đến (SBC):

$$d=\frac{\left|\tan\varphi.O+O-\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi\right|}{\sqrt{\tan^2\varphi+1}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\varphi}{\frac{1}{\cos\varphi}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: (ĐH – B 2012) Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* với *SA* = 2a, *AB* = a. G
H là hình chiếu vuông góc của *A* trên cạnh *SC*. Chứng minh *SC* vuông góc v
mặt phẳng (*ABH*). Tính thể tích của khối chóp *S.ABH* theo a.

Đáp số: Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH) $\Leftrightarrow \overline{SC}.\bar{n}=0$ v

$\bar{n}=\left[\overline{BH},\overline{BA}\right]$

$$V_{SABH}=\frac{7a^3\sqrt{11}}{96}$$

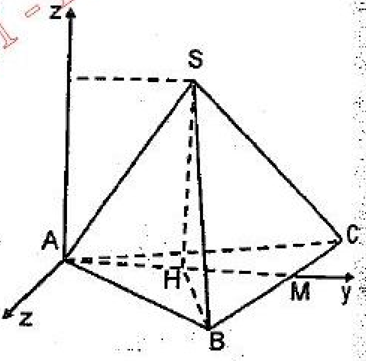
Bài 2: Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác đều cạnh a. SA = SB = SC,
khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là h. Tính h theo a để hai mặt phẳ
(SAB) và (SAC) vuông góc nhau.

Hướng dẫn:

Gọi H là tâm của tam giác ABC vì M là trung điểm của BC

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ HA = HB = HC\ (\Delta ABC\ deu)\end{cases}$

Dựng hệ trục tọa độ Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc A(0; 0; 0),



$B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$

$H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h\right)$

$\overline{SA}=\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};h\right), \overline{SB}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};-h\right), \overline{SC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};-h\right)$

$$[\overline{SA};\overline{SB}]=\left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2};\frac{ah}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{a}{6}(3h\sqrt{3};-3h;a\sqrt{3})=-\frac{a}{6}.\bar{n}_1,$$

với $\bar{n}_1=(3h\sqrt{3};-3h;a\sqrt{3})$

$$[\overline{SA};\overline{SC}]=\left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2};-\frac{ah}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{a}{6}(3h\sqrt{3};3h;-a\sqrt{3})=-\frac{a}{6}.\bar{n}_2,$$

với $\bar{n}_2=(3h\sqrt{3};3h;-a\sqrt{3})$.

Mặt phẳng (SAB) có cặp vectơ chỉ phương $\overline{SA};\overline{SB}$ nên có pháp vectơ $\bar{n}_1$.

Mặt phẳng (SAC) có cặp vectơ chỉ phương $\overline{SA};\overline{SC}$ nên có pháp vectơ $\bar{n}_2$.

$(SAB)\perp(SAC)\Leftrightarrow\cos(\bar{n}_1;\bar{n}_2)=0$

$\Leftrightarrow 3h\sqrt{3}.3h\sqrt{3}-3h.3h+a\sqrt{3}(-a\sqrt{3})=0\Leftrightarrow 27h^2-9h^2-3a^2=0$

$\Leftrightarrow 18h^2=3a^2\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $h=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

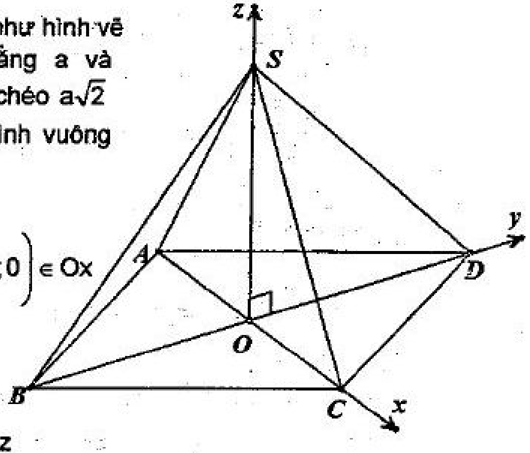
Với hình chóp tứ giác đều S.ABCD

u hiệu: Đáy là hình vuông, đường cao vuông góc với đáy từ đó ta thiết lập hệ tọa độ như sau

ch chọn: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Giả sử cạnh hình vuông bằng a và đường cao SO = h và đường chéo $a\sqrt{2}$

Chọn $O(0;0;0)$ là tâm của hình vuông và là gốc tọa độ



Khi đó :

$A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)\in Ox; C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)\in Ox$

$B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)\in Oy;$

$D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)\in Oy; S(0;0;h)\in Oz$

ặc: Trục Ox / /AD , Oy / /BC

Khi đó $A\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)\in Oxy; C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)\in Oxy$

$B\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)\in Oxy; D\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)\in Oxy; S(0;0;h)\in Oz$

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÍ - HÓA CẤP 2+3 / FB TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

WWW.DAYKEMQUYNHON.UCOZ.COM WWW.FACEBOOK.COM/DAYKEM.QUYNHON

Hoặc:

Lấy một đỉnh bất kỳ và dựng đường thẳng song song với SO

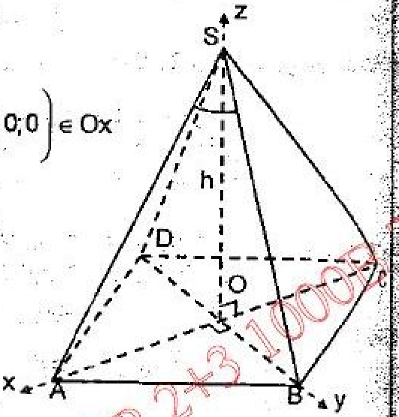
Giả sử từ A ta dựng $Az // SO$. Chọn hệ trục như sau

$$A \equiv O(0;0;0),\ D(a;0;0) \in Ox, B(0;a;0) \in Oy, C(a;a;0) \in Oxy, S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$$

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E
điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N
trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoản
cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Chọn hệ trục tọa độ

$$O(0;0;0),\ A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right) \in Ox,\ C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right) \in Ox$$

$$B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right) \in Oy,\ D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right) \in Oy,$$

$$S(0;0;h) \in Oz$$

Gọi H là trung điểm của SA

$$\Rightarrow H\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{h}{2}\right)$$

E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA $\Rightarrow E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};h\right)$

M là trung điểm của AE $\Rightarrow M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right)$

N là trung điểm của BC $\Rightarrow N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

Chứng minh MN vuông góc với BD

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} = \left(-\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\frac{h}{2}\right) \\ \overline{BD} = \left(0;a\sqrt{2};0\right) \end{cases} \Rightarrow \overline{MN}.\overline{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} = \left(-\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\frac{h}{2}\right) \\ \overline{AC} = \left(-a\sqrt{2};0;0\right) \\ \overline{MA} = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overline{MN},\overline{AC}\right] = \left(0;\frac{ah\sqrt{2}}{2};0\right) \\ \left[\overline{MN},\overline{AC}\right]\overline{MA} = \frac{a^2h}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(MN, AC) = \frac{\left|\left[\overline{MN},\overline{AC}\right]\overline{MA}\right|}{\left|\left[\overline{MN},\overline{AC}\right]\right|} = \frac{\frac{a^2h}{4}}{\frac{ah\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SBC) bằng b. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

Đáp số: $V = \frac{2}{3}.\frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$

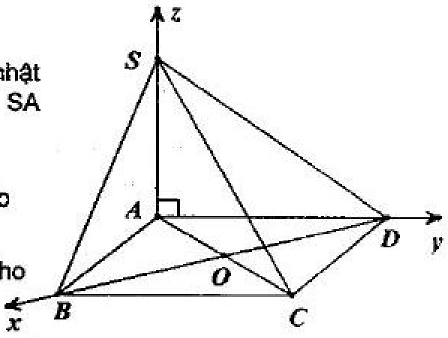
Bài 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^0 < \varphi < 90^0$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a và φ.

Đáp số: $\tan\widehat{SMO} = \sqrt{2}\tan\varphi$ và $V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\tan\varphi$

Dạng 3. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy

A. Hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD)

1. Đáy là một hình chữ nhật ABCD



Dấu hiệu: Các cạnh của hình chữ nhật vuông góc với nhau và cạnh bên SA vuông góc với đáy

Cách chọn:

ABCD là hình chữ nhật $AB = a; AD = b$

chiều cao bằng $SA = h$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho

$A \equiv O(0;0;0)$

Khi đó : $B(a;0;0) \in Ox;\ C(a;b;0) \in Oxy;$

$D(0;b;0) \in Oy;\ S(0;0;h) \in Oz$

2. Đáy là một hình thoi ABCD

Dấu hiệu: Hai đường chéo vuông góc với nhau và cạnh bên SA vuông góc với đáy

Cách chọn:

ABCD là hình thoi cạnh a chiều cao bằng $SA = h$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $O(0;0;0)$ là tâm hình thoi và là gốc tọa độ, từ O dựng $Oz // SA$

Tùy vào giả thiết để tính được độ dài đoạn OC, OD từ đó tìm được tọa độ các đỉnh A, B, C, D và suy ra tọa độ điểm S với $A, C \in Ox; B, D \in Oy$

Hoặc:

ABCD là hình thoi cạnh a, chiều cao bằng h

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $A \equiv O(0;0;0)$, qua A dựng Ay / /

$S \in Oz \Rightarrow S(0;0;h)$. Tùy vào giả thiết để tính được độ dài đoạn OA, OB từ tìm được tọa độ các đỉnh A, B, C, D.

3. Đáy là hình thang vuông tại A, D (tương tự với B, D)

Dấu hiệu: Hình thang vuông tại A, D và cạnh bên SA vuông góc với đáy

Cách chọn: ABCD là hình thang vuông tại A, D, chiều cao bằng $SA = h$

Chọn hệ tọa độ sao cho $A \equiv O(0;0;0)$; $S \in Oz \Rightarrow S(0;0;h)$

Tùy vào giả thiết tính độ dài các cạnh AD, AB, CD từ đó tìm được tọa độ các đỉnh A, B, C, D với $D \in Oy; B \in Ox, C \in Oxy$

Hoặc:

ABCD là hình thang vuông tại A, D, chiều cao bằng $SA = h$

Chọn hệ tọa độ sao cho $D \equiv O(0;0;0)$; Dz / /SA

Tùy vào giả thiết tính độ dài các cạnh AD, AB, CD từ đó tìm được tọa độ các đỉnh A, B, C, D với $A \in Oy; C \in Ox, B \in Oxy$

4. Đáy là hình vuông ABCD (thiết lập tương tự như hình thoi hoặc hình chữ nhật)

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$A \equiv O(0;0;0), B(0;a;0) \in Oy, D(2a;0;0) \in Ox, C(a;a;0) \in Oxy, S(0;0;a\sqrt{2}) \in Oz$

$\overline{SB} = (0;-a;a\sqrt{2})$. Đường thẳng SB đi qua B và có vtcp $\overline{SB}$ nên có

$$SB:\begin{cases} x = 0 \\ y = a - at \\ z = a\sqrt{2}t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của A trên SB

$\Rightarrow H \in SB \Rightarrow H(0;a-at;a\sqrt{2}t) \Rightarrow \overline{AH} = (0;a-at;a\sqrt{2}t)$

Ta có $\overline{AH}.\overline{SB} = 0 \Leftrightarrow -a^2 + a^2t + 2a^2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Chứng minh tam giác SCD vuông

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{CS} = (-a;-a;a\sqrt{2}) \\ \overline{CD} = (a;-a;0) \end{cases} \Rightarrow \overline{CS}.\overline{CD} = 0 \Rightarrow CS \perp CD \Rightarrow \Delta CSD \text{ vuông tại } C$$

Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

Mặt phẳng (SCD) đi qua C và có vtpt

$\vec{n} = \left[\overline{CS}.\overline{CD}\right] = \left(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2\right) = a^2\sqrt{2}\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ có phương trình

$1(x-a) + 1(y-a) + \sqrt{2}(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - 2a = 0$

$$d(H,(SCD)) = \frac{\left|\frac{2a}{3} + \sqrt{2}\frac{a\sqrt{2}}{3} - 2a\right|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{a}{3}$$

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0) \in Ox, D(0;a;0) \in Oy, C(a;a;0) \in Oxy, S(0;0;a) \in Oz$

Gọi E là trung điểm của cạnh CD

$\Rightarrow E\left(\frac{a}{2};a;0\right) \Rightarrow \overline{BE} = \left(-\frac{a}{2};a;0\right), \overline{SB} = (a;0;-a) \Rightarrow \left[\overline{SB},\overline{BE}\right] = \left(-a^2;-\frac{a^2}{2};-a^2\right)$

$$\Rightarrow d(S,BE) = \frac{\left|\left[\overline{SB},\overline{BE}\right]\right|}{\left|\overline{BE}\right|} = \frac{\sqrt{a^4 + \frac{a^4}{4} + a^4}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 3: Trong không gian với hệ toạ độ Đềcác Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc toạ độ O.

Biết $A(2;0;0), B(0;1;0), S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

b. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tính thể tích hình chóp S.ABMN.

Giải:

a. O là trung điểm BD $\Rightarrow D(0;-1;0)$; O là trung điểm AC $\Rightarrow C(-2;0;0)$

M là trung điểm SC $\Rightarrow M(-1;0;\sqrt{2}) \Rightarrow \overrightarrow{SA} = (-2;0;2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BM} = (-1;-1;\sqrt{2})$;

Gọi φ là góc nhọn tạo bởi SA và BM : $\cos\varphi = \frac{|2+0+4|}{\sqrt{4+8}\sqrt{1+1+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa SA và // BM. Suy ra PT : $(\alpha): \sqrt{2}x + z + -2\sqrt{2} = 0$

Ta có : $d(SA,BM) = d(B,(\alpha)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

PT mp (ABM): $\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y+3z-2\sqrt{2}=0$

PT tham số SD: $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t\ (t\in R) \\ z=-2\sqrt{2}t \end{cases}$

Tọa độ điểm $N=SD\cap(ABM)\Rightarrow N\left(0;-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{BS}=(0;-1;2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{BA}=(2;-1;0)$; $\overrightarrow{BN}=\left(0;-\frac{3}{2};\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{BM}=(-1;-1;\sqrt{2})$

$\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right]=(2\sqrt{2};0;0)$; $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BA}=4\sqrt{2}$; $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BN}\right].\overrightarrow{BM}=-2\sqrt{2}$

Vậy $V_{SABMN}=V_{SABN}+V_{SMNB}=\frac{1}{6}.4\sqrt{2}+\frac{1}{6}.2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ (đvdt)

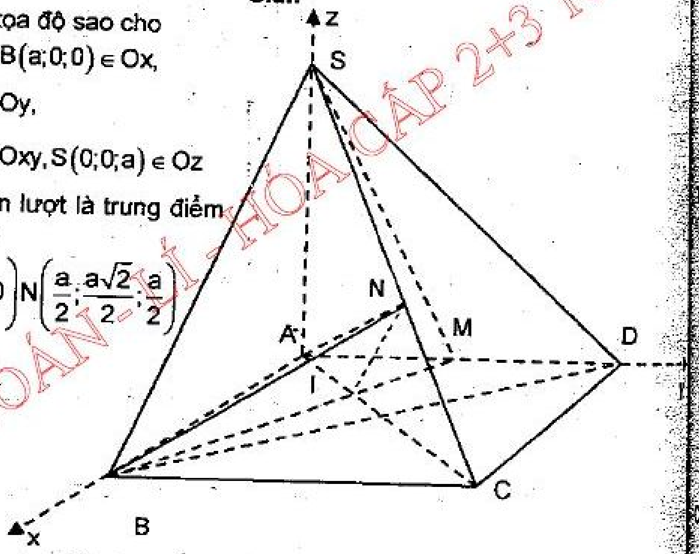
Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).
Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho
$A\equiv O(0;0;0), B(a;0;0)\in Ox$,
$D\left(0;a\sqrt{2};0\right)\in Oy$,
$C\left(a;a\sqrt{2};0\right)\in Oxy, S(0;0;a)\in Oz$

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC

$\Rightarrow M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right) N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$



Đường thẳng BM đi qua điểm M và có vtcp $\overline{BM}=\left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)=-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2};-1;0\right)$

có phương trình BM : $\begin{cases} x=a+\sqrt{2}t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$

Đường thẳng AC đi qua A và có vtcp $\overline{AC}=\left(a;a\sqrt{2};0\right)=a\left(1;\sqrt{2};0\right)$ có phương trình AC : $\begin{cases} x=t' \\ y=\sqrt{2}t' \\ z=0 \end{cases}$

Tọa độ điểm $I=BM\cap AC$ là nghiệm của phương trình

$\begin{cases} a+\sqrt{2}t=t' \\ -t=\sqrt{2}t' \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=-\frac{\sqrt{2}a}{3} \\ t'=\frac{a}{3} \end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{a}{3};\frac{\sqrt{2}a}{3};0\right)$

Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).

Mặt phẳng (SAC) có vtpt $\begin{cases} \overline{AC}=\left(a;a\sqrt{2};0\right) \\ \overline{AS}=(0;0;a) \end{cases}\Rightarrow\overline{n_{SAC}}=\left[\overline{AC},\overline{AS}\right]=\left(a^2\sqrt{2};-a^2;0\right)$

Mặt phẳng (SBM) có vtpt

$\begin{cases} \overline{BS}=(-a;0;a) \\ \overline{BM}=\left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right) \end{cases}\Rightarrow\overline{n_{SBM}}=\left[\overline{BS},\overline{BM}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-a^2;-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

Vì $\overline{n_{SAC}}.\overline{n_{SBM}}=0\Leftrightarrow(SAC)\perp(SBM)$

Tính thể tích của khối tứ diện ANIB

$\begin{cases} \overline{AB}=B(a;0;0) \\ \overline{AN}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right) \\ \overline{AI}=\left(\frac{a}{3};\frac{\sqrt{2}a}{3};0\right) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \left[\overline{AB},\overline{AN}\right]=\left(0;-\frac{a^2}{2};-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left[\overline{AB},\overline{AN}\right].\overline{AI}=-\frac{a^3\sqrt{2}}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow V_{ANBI}=\frac{1}{6}\left|\left[\overline{AB},\overline{AN}\right].\overline{AI}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Chú ý: Có thể nhận xét nhanh I giao điểm là AC và BM nên I là trọng tâm của tam giác ABD

$\Rightarrow I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=$ SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = a. Gọi C' là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD, cắt các cạnh SB của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

Đáp số: $V_{S.AB'C'D'}=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Bài 2: Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và điể thuộc nửa đường tròn đó sao cho AC = R. Trên đường thẳng vuông góc với tại A lấy điểm S sao cho $\left(\widehat{(SAB,SBC)}\right)=60^0$. Gọi H, K lần lượt là hình c của A trên SB, SC. Chứng minh rằng tam giác AHK vuông và tính thể tích chóp S.ABC.

Đáp số: $V_{S.ABC}=\frac{R^3\sqrt{6}}{12}$

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khố diện SACD và tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Đáp số: $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ và $\cos\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, AD = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt ph đáy một góc 60°. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳ (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Đáp số: $V_{S.BCNM}=\frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông g với đáy hình chóp. Cho AB = a, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu c A trên SB, SD. Chứng minh $SC\perp(AHK)$ và tính thể tích hình chóp OAHK.

Đáp số: $V_{OAHK}=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$

B. Hình chóp S.ABC có SA ⊥ (ABC)

1. Đáy là tam giác vuông tại A (bài toán tam diện vuông)

Dấu hiệu: Tam giác ABC vuông tại A và cạnh bên SA vuông góc với đáy

Cách chọn: Tam giác ABC vuông tại A có AB = a; AC = b đường cao bằng SA =

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $A\equiv O(0;0;0)$

Khi đó : $B(a;0;0)\in Ox;\ C(0;b;0)\in Oy;S(0;0;h)\in Oz$

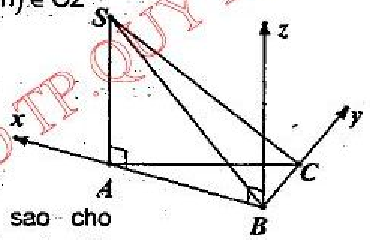
2. Đáy là tam giác vuông tại B (tương tự vuông tại C)

Dấu hiệu: Tam giác ABC vuông tại B và cạnh bên SA vuông góc với đáy

Cách chọn: Tam giác ABC vuông tại B có BA = a; BC = b đường cao bằng SA = h

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $B\equiv O(0;0;0)$, dựng Bz / /SA

Khi đó : $A(a;0;0)\in Ox;\ C(0;b;0)\in Oy;S(a;0;h)\in Oz$



Hoặc:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $A\equiv O(0;0;0)$, dựng Ay / /BC

Khi đó:

$B(a;0;0)\in Ox;\ C(a;b;0)\in Oxy;S(0;0;h)\in Oz$

Hoặc: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $A\equiv O(0;0;0)$, dựng Ay / /BI, với I là trung điểm của AC

$AI=BI=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{2}$

Khi đó : $C\left(\sqrt{b^2+a^2};0;0\right)\in Ox;\ B\left(\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{2};\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{2};0\right)\in Oxy;S(0;0;h)\in Oz$

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a, biết rằng $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Giải:

Gọi I là trung điểm của BC.

Chọn hệ trục như hình vẽ: $I\equiv O(0;0;0)$,

$$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)\in Ox,B\left(\frac{a}{2};0;0\right)\in Ox,A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)\in Oy,S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)\in Oz$$

$$\text{Ta có }\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-a;0;0)\\ \overrightarrow{BS}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{6}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(0;\sqrt{2};-1\right)$$

Mặt phẳng (SBC) đi qua B và có vtpt $\overline{n}=\left(0;\sqrt{2};-1\right)$ có phương trình

$$0\left(x-\frac{a}{2}\right)+\sqrt{2}(y-0)-1(z-0)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}y-z=0$$

$$\text{Khoảng cách } d\left(A,(SAC)\right)=\frac{\left|\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và AB = a, BC = cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Gọi M là trung điểm của SC. Ch minh rằng tam giác AMB cân tại M và tính diện tích tam giác AMB theo a.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$B \equiv O(0;0;0), A(a;0;0) \in Ox, C(0;2a;0) \in Oy, S(a;0;2a) \in Oxz$

M là trung điểm của SC $\Rightarrow M\left(\frac{a}{2};a;a\right)$.

Ta có $\begin{cases} \overline{MA} = \left(\frac{a}{2};-a;-a\right) \\ \overline{MB} = \left(-\frac{a}{2};-a;-a\right) \end{cases} \Rightarrow MA = MB = \frac{3a}{2} \Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M

Mặt khác $\left[\overline{MA},\overline{MB}\right] = (0;a^2;a^2) \Rightarrow S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{MA},\overline{MB}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Cách khác:

Tam giác ABC vuông tại B có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$

Dựng BH ⊥ AC (H ∈ AC), ta có:

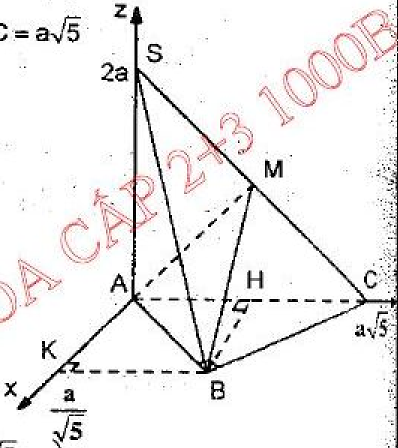
$AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Dựng hệ trục tọa vuông góc Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc với

$A(0;0;0), C(0;a\sqrt{5};0), S(0;0;2a),$

$B\left(\frac{2a}{\sqrt{5}};\frac{a}{\sqrt{5}};0\right)$



Tọa độ trung điểm M của SC là $M\left(0;\frac{a\sqrt{5}}{2};a\right)$

Ta có: $\overline{MA} = \left(0;\frac{a\sqrt{5}}{2};a\right) \Rightarrow MA = \frac{3a}{2}$

$\overline{MB} = \left(-\frac{2a}{\sqrt{5}};\frac{3a}{2\sqrt{5}};a\right) \Rightarrow MB = \frac{3a}{2}$.

Suy ra: MA = MB ⇒ tam giác MAB cân tại M.

Ta có: $[\overline{MA};\overline{MB}] = \left(\frac{a^2}{\sqrt{5}};-\frac{2a^2}{\sqrt{5}};a^2\right) \Rightarrow \left|[\overline{MA};\overline{MB}]\right| = a^2\sqrt{2}$

Diện tích tam giác MAB: $S_{MAB} = \frac{1}{2}\left|[\overline{MA};\overline{MB}]\right| = \frac{1}{2}.a^2\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a và vuông góc với đáy ABC, tam giác ABC có AB = BC = 2a, góc ở B bằng 120⁰. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

Giải:

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có trong tam giác vuông ABI tại I có $\begin{cases} AI = CI = \cos 30^0.AB = a\sqrt{3} \\ BI = \sin 30^0.AB = a \end{cases}$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$I \equiv O(0;0;0)$,

$C(\sqrt{3}a;0;0) \in Ox, A(-\sqrt{3}a;0;0) \in Ox, B(0;a;0) \in Oy, S(-\sqrt{3}a;0;3a) \in Oxz$

Ta có $\begin{cases} \overline{BS} = (-\sqrt{3}a;-a;3a) \\ \overline{BC} = (\sqrt{3}a;-a;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overline{BS},\overline{BC}\right] = (3a^2;3a^2\sqrt{3};2a^2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(\sqrt{3};3;2)$

Mặt phẳng (SBC) đi qua điểm B và có vptp $\vec{n} = (\sqrt{3};3;2)$ có phương trình là

$\sqrt{3}(x-0) + 3(y-a) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y + 2z - 3a = 0$

Khoảng cách $d(A,(SBC)) = \frac{\left|-\sqrt{3}a\sqrt{3} - 3a\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$

Bài 4: Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Giải:

Gọi I là trung điểm của BC. Chọn hệ trục như hình vẽ: $I \equiv O(0;0;0)$,

$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox, B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox, A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy, S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};2a\right) \in Oz$

Đường thẳng SB đi qua điểm B và nhận vecto $\overline{SB} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};\ 2a\right)$ làm vtcp

nên có phương trình $SB: x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}t; y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}t; z = -2at$

Gọi M là hình chiếu của A trên SB ⇒ M( )

Đường thẳng SC đi qua điểm C và nhận vecto $\overline{SC} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right)$

Gọi M là hình chiếu của A trên SC ⇒ N( )

Thể tích khối chóp A.BCNM

$V_{ABCNM} = V_{ABCM} + V_{ABCN}$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông có AB = AC = a,

vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC)

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SC với I là trung điểm của cạnh B

Hướng dẫn:

Do AB, AC, AS đôi một vuông góc nên ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

$O \equiv A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $S(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{2})$

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC):

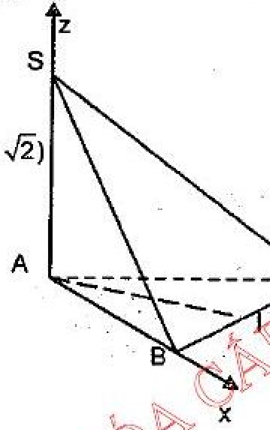
Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i} = (1;0;0)$

Mặt phẳng (SBC) có cặp vectơ chỉ phương:

$\overrightarrow{SB} = (a;0;-\frac{a\sqrt{2}}{2}); \overrightarrow{SC} = (0;a;-\frac{a\sqrt{2}}{2})$

Ta có

$$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\right) = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(1;1;\sqrt{2})$$



nên mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;\sqrt{2})$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) ta có:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{i}.\vec{n}|}{|\vec{i}|.|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0$$

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và SC:

Vì I là trung điểm của BC $\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), \overrightarrow{SC} = \left(0;a;-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{SC}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{4};\frac{a^2\sqrt{2}}{4};\frac{a^2}{2}\right), \overrightarrow{AS} = \left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{AS} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{SC}\right]\right| = \sqrt{\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

Vậy khoảng cch giữa hai đường thẳng AI và SC là:

$$d(AI,SC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{SC}\right]\right|} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{a^2} = \frac{a}{2}$$

ạng 4: Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy (hoặc mặt bên là tam giác vuông cân, vuông, đều, cân)

Hình chóp S.ABCD có (SAB) ⊥ (ABCD)

ấu hiệu: Đáy là hình vuông và mặt bên vuông góc với đáy nên từ S hạ SH vuông góc với AB

ách chọn:

ABCD là hình vuông cạnh a, dựng Az // SH với H là chân đường cao hạ từ S xuống AB

Chọn hệ trục như hình vẽ sao cho $A \equiv O(0;0;0)$, $B \in Ox \Rightarrow B(a;0;0)$, $D \in Oy \Rightarrow D(0;a;0)$, $C \in (Oxy) \Rightarrow C(a;a;0)$, để tọa độ điểm S ta tính đoạn SH và HA

oặc:

ABCD là hình vuông cạnh a, dựng Hy / /BC với H là chân đường cao hạ từ S xuống AB

Chọn hệ trục như hình vẽ sao cho $H \equiv O(0;0;0)$, tính độ dài đoạn HA, HB, SH từ đó suy ra tạo độ các điểm còn lại với $B \in Ox$, $D \in Oy$, $C \in (Oxy)$, $S \in Oz$

ường hợp đặc biệt khi các mặt bên là tam giác đều, tam giác cân thì ta dễ dàng tìm tọa độ các điểm

i tập giải mẫu:

i 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

Giải:

Vì mặt phẳng (SAD) vuông góc với đáy nên gọi H là trung điểm của AD thì SH ⊥ AD

Chọn hệ trục tọa độ $H \equiv O(0;0;0)$, $D\left(\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right) \in Ox$,

$$B\left(-\frac{a}{2};a;0\right) \in Oxy,\ C\left(\frac{a}{2};a;0\right) \in Oxy,\ S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \in Oz$$

M là trung điểm của SB $\Rightarrow M\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, N là trung điểm của BC $\Rightarrow N(0;a;0)$

P là trung điểm của CD $\Rightarrow P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

ứng minh AM vuông góc với BP

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)\\ \overrightarrow{BP} = \left(a;-\frac{a}{2};0\right)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow AM \perp BP.$$

Tính thể tích của khối tứ diện CMNP

$$\begin{cases}\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{3a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)\\ \overrightarrow{CN}=\left(-\frac{a}{2};0;0\right)\\ \overrightarrow{CP}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right]=\left(0;-\frac{a^2\sqrt{3}}{8};0\right)\\ \left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{CMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP}\right|=\frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}a^3}{96}$$

Đáp số: $V_{CMNP}=\frac{\sqrt{3}a^3}{96}$.

Chú ý: Có thể chọn hệ tọa độ như sau:

Qua A dựng Az vuông góc với AD $\Rightarrow Az//SH$

$A\equiv O(0;0;0)$, $D\in Ox\Rightarrow D(a;0;0)$, $B\in Oy\Rightarrow B(0;a;0)$,

$C\in(Oxy)\Rightarrow C(a;a;0)$, $S\left(a;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N l lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối ch S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Giải:

Dựng Az song song với SH với H là chân đường cao hạ từ S xuống AB

$$HA=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A\equiv O(0;0;0)$; $S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\in(Oxz$

$D(0;2a;0)$, $B(2a;0;0)$, $M(a;0;0)$, $C(2a;2a;0)$; $N(2a;a;0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN}=(2a;-a;0)$

Từ đó ta tính $V_{S.BMDN}=V_{S.DMN}+V_{S.MNB}$

$$\cos\left(\widehat{SM,DN}\right)=\frac{\left|a^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}\right)(4a^2+a^2)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Chú ý: Ta có thể chọn hệ tọa độ như sau

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ S xuống AB

$$HA=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2};$$

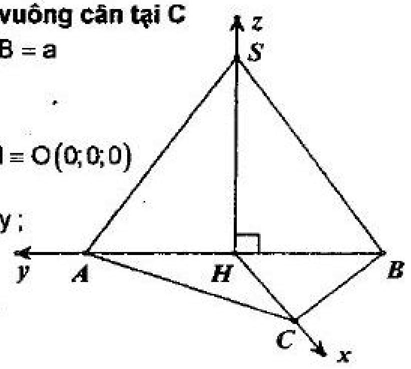
$$HB=\sqrt{SB^2-SH^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3a}{2}$$

$H\equiv O(0;0;0)$, $B\left(\frac{3a}{2};0;0\right)$, $A\left(-\frac{3a}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{3a}{2};2a;0\right)$,

$D\left(-\frac{3a}{2};2a;0\right)$; $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

B. Hình chóp S.ABC có (SAB) ⊥ (ABC)

1. Khi tam giác Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông cân tại C



Tam giác ABC vuông cân tại C có CA = CB = a

đường cao bằng SH = h.

H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $H\equiv O(0;0;0)$

Khi đó : $C\left(\frac{a}{\sqrt{2}};0;0\right)\in Ox$; $A\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}};0\right)\in Oy$;

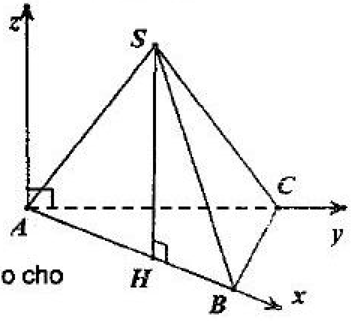
$B\left(0;-\frac{a}{\sqrt{2}};0\right)\in Oy$; $S(0;0;h)\in Oz$

Hoặc:

Từ C dựng $Cz//SH$

2. Khi tam giác Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại A (hoặc tại B)

Δ ABC vuông tại A có AB = a; AC = b chiều cao bằng SH = h



H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $A\equiv O(0;0;0)$

Khi đó : $B(a;0;0)\in Ox$; $C(0;b;0)\in Oy$;

$S\left(0;\frac{a}{2};h\right)\in Oz$

Hoặc:

Từ H dựng $Hy//AC$. Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$H\equiv O(0;0;0)$

3. Khi tam giác Δ SAB cân tại S và Δ ABC vuông tại C

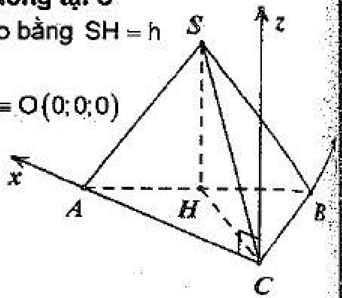
Δ ABC vuông tại C CA = a; CB = b chiều cao bằng SH = h

H là trung điểm của AB

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho $C \equiv O(0;0;0)$

Khi đó : $A(a;0;0) \in Ox$; $B(0;b;0) \in Oy$;

$S\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};h\right) \in Oz$



Chú ý:

Khi giả thiết không cho tam giác SAB cân (vuông cân hoặc đều) mà khi nói (SAB) vuông góc với (ABC) thì giả thiết sẽ cho SI vuông góc với Khi đó ta dựng tương tự như trên

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại B, BA = BC = 4a; mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Biết *SB* = 2a và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ điểm B mặt phẳng (*SAC*) theo *a*.

Giải:

Vì (*SBC*) ⊥ (*ABC*). Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống BC ⇒ SH ⊥ BC

Ta có $BH = SB.\cos 30^0 = 3a, SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

Qua B dựng Bz // SH. Chọn hệ trục như hình vẽ sao cho $B \equiv O(0;0$

$C(4a;0;0) \in Ox$, $A(0;3a;0) \in Oy$, $S(3a;0;a\sqrt{3}) \in Oxz$. Ta có

$$\begin{cases} \overline{SA} = (3a;-3a;a\sqrt{3}) \\ \overline{SC} = (-a;0;a\sqrt{3}) \\ \overline{SB} = (3a;0;a\sqrt{3}) \\ \left[\overline{SA},\overline{SC}\right] = (-3a^2\sqrt{3};-4a^2\sqrt{3};-3a^2) \\ \left[\overline{SA},\overline{SC}\right].\overline{SB} = -12a^3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overline{SA},\overline{SC}\right].\overline{SB}\right| = \frac{1}{6}\left|-12a^3\sqrt{3}\right| = 2a^3\sqrt{3}$$

Mặt phẳng (SAC) đi qua S và có vtpt

$$\vec{n} = \left[\overline{SA},\overline{SC}\right] = (-3a^2\sqrt{3};-4a^2\sqrt{3};-3a^2) = -a^2\sqrt{3}(3;4;\sqrt{3})$$

nên có phương trình

$$3(x-3a)+4(y-0)+\sqrt{3}(z-a\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow 3x+4y+\sqrt{3}z-12a = 0$$

Khoảng cách $d(B,(SAC)) = \dfrac{|-12a|}{\sqrt{3^2+4^2+(\sqrt{3})^2}} = \dfrac{6\sqrt{7}a}{7}$

Bài 2: (ĐH – A 2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Giải:

Gọi M là trung điểm AB, ta có

$MH = MB - HB = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$

Theo giả thiết SH ⊥ (ABC) ⇒ SH ⊥ HC

⇒ ΔSHC vuông tại H

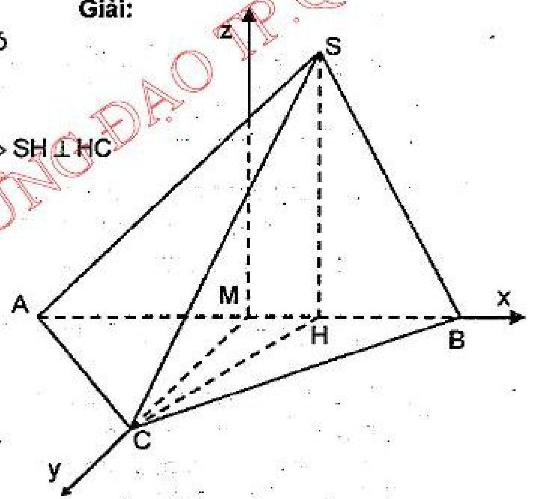
và $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{SCH} = 60^0$

Theo định lý pitago trong tam giác vuông HCM ta có

$CH^2 = CM^2 + MH^2$

$= \left[\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{a}{6}\right]^2 = \frac{28a^2}{36}$

$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$



Với $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ đường cao của tam giác đều ABC

Trong tam giác vuông SHC ta có $SH = CH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

Dựng Mz // HS. Chọn hệ trục Mxyz với $M \equiv O(0;0;0)$ (như hình vẽ)

Tính MH và SH như trên khi đó tọa độ các điểm như sau

$$A\left(\frac{-a}{2};0;0\right);B\left(\frac{a}{2};0;0\right);C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right);S\left(\frac{a}{6};0;\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)$$

Tính thể tích

$$\text{Ta có}\begin{cases} \overline{SB} = \left(\frac{a}{3};0;-\frac{a\sqrt{21}}{3}\right);\overline{SA} = \left(-\frac{2a}{3};0;-\frac{a\sqrt{21}}{3}\right) \\ \overline{SC} = \left(-\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a\sqrt{21}}{3}\right);\overline{BC} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\overline{SA},\overline{SB}\right] = \left(0;\dfrac{a^2\sqrt{21}}{3};0\right) \\ \left|\left[\overline{SA},\overline{SB}\right]\right| = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{3} \\ \left[\overline{SA},\overline{SB}\right].\overline{SC} = \dfrac{a^3\sqrt{63}}{6} \end{cases} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overline{SA},\overline{SB}\right].\overline{SC}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{63}}{6} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

Tính khoảng cách

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\overline{SA},\overline{BC}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{21}}{6};\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) \\ \left|\left[\overline{SA},\overline{BC}\right]\right| = \sqrt{\dfrac{21a^4}{36}+\dfrac{63a^4}{36}+\dfrac{12a^4}{36}} = \dfrac{4\sqrt{6}a^2}{6} \\ \left[\overline{SA},\overline{BC}\right].\overline{AB} = \dfrac{a^3\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(SA,BC) = \frac{\left|\left[\overline{SA},\overline{BC}\right].\overline{AB}\right|}{\left|\left[\overline{SA},\overline{BC}\right]\right|} = \frac{a^3\sqrt{7}}{2}:\frac{6}{4\sqrt{6}a^2} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC mà mỗi mặt bên là một tam giác vuông, SA = SB SC = a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC; D là đi đối xứng của S qua E; I là giao điểm của đường thẳng AD với mặt phẳ (SMN). Chứng minh rằng $AD \perp SI$ và tính theo a thể tích của khối tứ di MBSI.

Đáp số: $V = \dfrac{a^3}{18}$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có các mặt ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a, c mặt ACD và BCD vuông góc với nhau. Hãy tính theo a thể tích khối tứ di ABCD và tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD, BC.

Đáp số: $V_{A.BCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ và $\widehat{(AD,BC)} = 60^0$

Bài 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2 hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. B góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối ch S. BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Hướng dẫn:

Theo giả thiết $\begin{cases}(SAB)\perp(SAC) \\ (SAB)\cap(SAC) = SA\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA$ là đường cao hì chóp S. BCMN.

Do $\begin{cases}BC \perp SA \\ BC \perp AB\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{SAB} = 60^0$

Trong tam giác vuông SAB ta có $SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$. Dựng Bz / /SA

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$B \equiv O(0;0;0), A(2a;0;0) \in Ox, C(0;2a;0) \in Oy, S(2a;0;2a\sqrt{3}) \in Oxz$

M là trung điểm của AB nên $M(a;0;0)$, N là trung điểm của BC nên $N(a;a;0)$

Khi đó $V_{S.BCNM} = V_{B.MSN} + V_{B.CSN} = a^3\sqrt{3}$ và $d(AB,SN) = \dfrac{\left|\left[\overline{AB},\overline{SN}\right].\overline{AS}\right|}{\left[\overline{AB},\overline{SN}\right]} = \dfrac{a\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$

Dạng 5: Bài toán với hình lăng trụ

Việc thiết lập hệ trục tọa độ cho hình lăng trụ (đặc biệt là lăng trụ đứng) cũng giống như hình chóp mà có một cạnh bên vuông góc với mặt đáy, khi đó ta xem đáy là hình gì để thiết lập hệ trục tọa độ cho đúng

ài tập giải mẫu:

ài 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Biết $A(a;0;0)$, $B(-a;0:0)$; $C(0;1;0)$; $B_1(-a;0;b)$, $a > 0$, $b > 0$

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.

Cho a, b thay đổi nhưng luôn thỏa mãn a + b = 4 . Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất .

Giải:

Dựa vào các tọa độ cho trước của giả thiết ta chọn hệ trục tọa độ như sau

Gọi $I \equiv O(0;0;0)$ là trung điểm của AB và cũng là gốc tọa độ

$A(a;0;0) \in Ox$, $B(-a;0:0) \in Ox$, $C(0;1;0) \in Oy, B_1(-a;0;b) \in Oxz$.

Ta sẽ tìm được tọa độ điểm $C_1(0;1;b) \in Oyz$.

Tính khoảng cách

Ta có

$$\begin{cases} \overline{B_1C} = (a;1;-b) \\ \overline{AC_1} = (-a;1;b) \\ \overline{B_1A} = (2a;0;-b) \\ \left[\overline{B_1C},\overline{AC_1}\right] = (2b;0;2a) \\ \left[\overline{B_1C},\overline{AC_1}\right].\overline{B_1A} = 2ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(B_1C,AC_1) = \frac{\left|\left[\overline{B_1C},\overline{AC_1}\right].\overline{B_1A}\right|}{\left|\left[\overline{B_1C},\overline{AC_1}\right]\right|} = \frac{|2ab|}{\sqrt{4(a^2+b^2)}} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \quad (*)$$

b. Tìm max khoảng cách

Ta có $a+b=4 \Leftrightarrow a^2+b^2=16-2ab$. Thay vào (*) ta được $d=\dfrac{ab}{\sqrt{16-2ab}}$

Đặt $0<t=ab\overset{cosi}{\le}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=4$ ta được $d^2=f(t)=\dfrac{t^2}{16-2t}$ với $t\in(0;4]$

$f'(t)=\dfrac{16}{(16-2t)^2}>0$ với $\forall t\in(0;4]$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;4]$

$\Rightarrow \underset{(0;4]}{\operatorname{Max}} f(t)=f(4)=2\Rightarrow d_{max}=\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t=ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Hoặc: $d(B_1C, AC_1)=\dfrac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\overset{cosi}{\le}\dfrac{ab}{\sqrt{2}.\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{ab}}{2}$.

Mặt khác $ab\overset{cosi}{\le}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=4$

$\Rightarrow d_{max}=\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Bài 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C$ với $A(0;-3;0), B(4;0;0), C(0;3;0), B_1(4;0;4)$

1. Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xú với mặt phẳng (BCC_1B_1).
2. Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điể A, M và song song với BC_1. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm Tính độ dài đoạn MN.

Giải:

Dựa vào các tọa độ cho trước của giả thiết ta chọn hệ trục tọa độ như sau

Gọi $I\equiv O(0;0;0)$ là trung điểm của AC và cũng là gốc tọa độ

$A(0;-3;0)\in Oy, B(4;0;0)\in Ox, C(0;3;0)\in Oy, B_1(4;0;4)\in Oxz$.

Ta sẽ tìm được tọa độ điểm $A_1(0;-3;4)\in Oyz, C_1(0;3;4)\in Oyz$.

a. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC}=(-4;3;0) \\ \overrightarrow{BC_1}=(-4;3;4) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC_1}\right]=(12;16;0)=4(3;4;0)$

Mặt phẳng (BCC_1B_1) đi qua điểm C và có vptp $\vec{n}=(3;4;0)$ có phương trình

$3(x-0)+4(y-3)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-12=0$

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1)

$\Leftrightarrow d(A,(BCC_1B_1))=\dfrac{|4.(-3)-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{24}{5}=R$

Vậy phương trình mặt cầu tâm A, bán kính $R=\dfrac{24}{5}$ có phương trình là

$x^2+(y+3)^2+z^2=\dfrac{576}{25}$

Gọi M là trung điểm của A_1B_1

$\Rightarrow M\left(2;-\dfrac{3}{2};4\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(2;\dfrac{3}{2};4\right)$ và $\overrightarrow{BC_1}=(-4;3;4)$

Mặt phẳng (P) đi qua A, M và song song với BC_1 nên (P) đi qua A và có vtpt $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}\right]=(-6;-24;12)=-6(1;4;-2)$ nên có phương trình

$1(x-0)+4(y+3)-2(z-0)=0 \Leftrightarrow x+4y-2z+12=0$

Đường thẳng A_1C_1 đi điểm A_1 và có vtcp $\overrightarrow{A_1C_1}=(0;6;0)=6(0;1;0)$ có phương trình $A_1C_1: \begin{cases} x=0 \\ y=-3+t \\ z=4 \end{cases}$

Tọa độ điểm $N=(P)\cap A_1C_1$ là nghiệm của phương trình

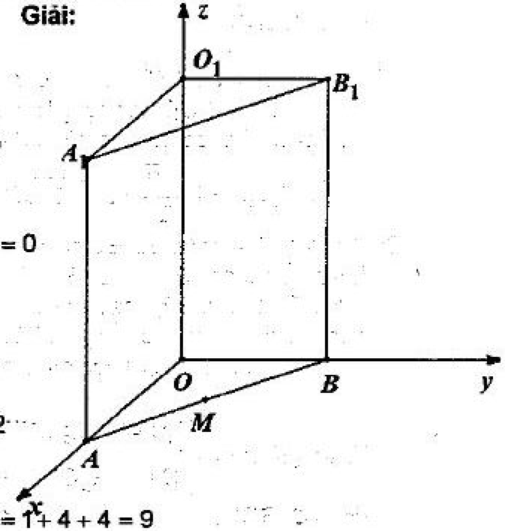
$4(-3+t)-2.4+12=0\Rightarrow t=2\Rightarrow N(0;-1;4)\Rightarrow MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

ài 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho lăng trụ đứng $OAB.O_1A_1B_1$ với $O(0;0;0)$, $A(2;0;0), B(0;4;0), O_1(0;0;4)$.

Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, A_1, B_1, O_1.

Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với O_1A và cắt OA, A_1A lần lượt tại K, N. Tính độ dài đoạn KN.

Giải:



Vì $AA_1\perp(Oxy)\Rightarrow A_1(2,0,4)$;

$BB_1\perp(Oxy)\Rightarrow B_1(0,4,4)$

Viết phương trình mặt cầu (S) qua O, A, B, O_1

Giả sử phương trình mặt cầu (S):

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Vì $O\in(S)\Rightarrow d=0$

Vì $A\in(S)\Rightarrow 4-4a=0\Rightarrow a=1$

Vì $B\in(S)\Rightarrow 16-8b=0\Rightarrow b=2$

Vì $O_1\in(S)\Rightarrow 16-8c=0\Rightarrow c=2$

Vậy (S) có tâm I(1,2,2).

Ta có $d=a^2+b^2+c^2-R^2\Rightarrow R^2=1+4+4=9$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$

b. Tính KN

Ta có $M(1,2,0)$, $\overrightarrow{O_1A}=(2,0,-4)=2(1;0;-2)$

Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với O_1A nên nhận $\overrightarrow{O_1A}$ làm PVT

$\Rightarrow$ phương trình (P): $1(x-1)+0(y-2)-2(z-0)=0 \Rightarrow x-2z-1=0$

Phương trình tham số OA là $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Thế vào phương trình (P): $t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow OA \cap (P) = N(1,0,0)$

Phương trình tham số O_1A là: $\begin{cases} x=t' \\ y=0 \\ z=2t' \end{cases}$

Thế vào phương trình (P): $t'-4t'-1=0 \Rightarrow t'=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow OA_1 \cap (P) = K\left(-\dfrac{1}{3},0,-\dfrac{2}{3}\right.$

Vậy $KN=\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2+(0-0)^2+\left(0+\dfrac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{20}{9}}=\dfrac{\sqrt{20}}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tí của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Giải:

Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

$B \equiv O(0;0;0)$, $A(a;0;0) \in Ox$, $C(0;a;0) \in Oy$,

$B'(0;0;a\sqrt{2}) \in Oz$, $A'(a;0;a\sqrt{2}) \in Oxz$, $C'(0;a;a\sqrt{2}) \in Oyz$

Gọi M là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$

Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'

Cách 1: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.BB'=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|.BB'$

Với

$\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(a;0;0) \\ \overrightarrow{BC}=(0;a;0) \\ BB'=AA'=a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(0;0;-a^2)$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|.BB'=\dfrac{1}{2}\left|a^2\right|.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Hoặc: Vì tam giác ABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}a^2$

Cách 2: Vì lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân nên

$V_{ABC.A'B'C'}=3V_{BACC'}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BC'}\right|$

Với $\begin{cases} \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(0;0;-a^2) \\ \overrightarrow{BC'}=(0;a;a\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BC'}=-a^3\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BC'}\right|=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

$\begin{cases} \overrightarrow{AM}=\left(-a;\dfrac{a}{2};0\right) \\ \overrightarrow{B'C}=(0;a;-a\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{AB'}=(-a;0;a\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(-\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\sqrt{2};-a^2\right) \\ \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}=-\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2} \\ \left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|=\sqrt{\dfrac{a^4}{2}+2a^4+a^4}=a^2\sqrt{\dfrac{7}{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow d(AM,B'C)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}}{a^2\sqrt{\dfrac{7}{2}}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

5: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, AC' = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn A'C'. I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (IBC).

Giải:

Trong tam giác vuông A'AC có $AC=\sqrt{A'C^2-AA'^2}=a\sqrt{5}$

Trong tam giác vuông BAC có $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a$

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

$B \equiv O(0;0;0)$, $A(a;0;0) \in Ox$, $C(0;2a;0) \in Oy$,

$B'(0;0;2a) \in Oz$, $A'(a;0;2a) \in Oxz$, $C'(0;2a;2a) \in Oyz$

Gọi M là trung điểm của đoạn A'C' $\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};a;2a\right)$

Đường thẳng AM đi qua điểm A và có vtcp $\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{a}{2};a;2a\right)=-\dfrac{a}{2}(1;-2;-4)$ có

Phương trình AM: $\begin{cases} x=a+t \\ y=-2t \\ z=-4t \end{cases}$

Đường thẳng A'C đi qua điểm C và có vtcp $\overrightarrow{A'C} = (-a;2a;-2a) = -a(1;-2;2)$

phương trình $A'C: \begin{cases} x = t' \\ y = 2a - 2t' \\ z = 2t' \end{cases}$

Tọa độ điểm $I = AM \cap A'C$ là nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} a + t = t' \\ -2t = 2a - 2t' \\ -4t = 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{a}{3} \\ t' = \dfrac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)$$

Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (0;2a;0) \\ \overrightarrow{BI} = \left(\dfrac{2a}{3};\dfrac{2a}{3};\dfrac{4a}{3}\right) \\ \overrightarrow{BA} = (a;0;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right] = \left(\dfrac{8a^2}{3};0;\dfrac{4a^2}{3}\right) \\ \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right]\overrightarrow{BA} = \dfrac{8a^3}{3} \end{cases} \Rightarrow V_{IABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right]\overrightarrow{BA}\right| = \frac{4a^3}{9}$$

Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (IBC)

Mặt phẳng (IBC) đi qua điểm B và có vtpt

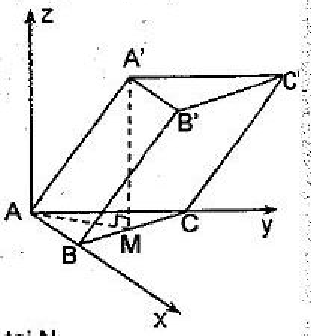
$$\bar{n} = \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right] = \left(\frac{8a^2}{3};0;\frac{4a^2}{3}\right) = \frac{4a^2}{3}(2;0;1)$$ có phương trình là

$$2(x-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + z = 0$$

$$\Rightarrow d(A(IBC)) = \frac{|2a|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 6: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam g vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên m phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.AB và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

Giải:



Gọi M là trung điểm BC.

Δ vuông ABC có $\dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = a$

Δ vuông AMA': $A'M^2 = AA'^2 - AM^2$

$\Rightarrow A'M^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow A'M = a\sqrt{3}$

$$V_{A'ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.A'M = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.A'M$$

$$= \frac{1}{6}.a.a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}$$

Từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại N

$\Rightarrow$ N là trung điểm của AC $\Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$

Từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại P

$\Rightarrow$ P là trung điểm của AC $\Rightarrow MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Dựng $Az // A'M$.

$A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0) \in Ox, C(0;a\sqrt{3};0) \in Oy$

$A'\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oxy$

Đường thẳng AA' có vtcp là $\bar{a} = (1;\sqrt{3};2\sqrt{3})$

Đường thẳng B'C' có vtcp là $\bar{b} = (-1;\sqrt{3};0)$ (do B'C'//BC)

Gọi φ là góc giữa 2 đường thẳng AA' và B'C' có $\cos\varphi = \left|\cos(\bar{a},\bar{b})\right| = \dfrac{|\bar{a}.\bar{b}|}{|\bar{a}|.|\bar{b}|} = \dfrac{1}{4}$

Hoặc: $V_{A'ABC} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AA'}\right|$ **hoặc:** $AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2+AC^2}}{2} = a$

Bài 7: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

Giải:

Theo giả thiết ABCD là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^0$ nên tam giác ABD đều. Đặt $AA' = h$. Gọi O là giao điểm của AC và BD

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ.

$O(0;0;0), B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right) \in Ox, C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy,$

$D\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right) \in Ox, A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \in Oy$

$D'\left(-\dfrac{a}{2};0;h\right) \in Oxz, C'\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};h\right) \in Oyz, A'\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};h\right) \in Oyz$

M là trung điểm của AA' $\Rightarrow M\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{h}{2}\right)$

N là trung điểm của CC' $\Rightarrow N\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{h}{2}\right)$

Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng

Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{h}{2}\right)\\ \overrightarrow{DN}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{h}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right]=\left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\\ \overrightarrow{DB'}=(a;0;h)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right]\overrightarrow{DB'}=0$$

$\Rightarrow$ 4 điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

Hãy tính độ dài cạnh AA'

Ta có $B'N=ND=DM=MB'=\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}\Rightarrow B'MDN$ là hình thoi. Để $B'MDN$ hình vuông thì

$$\Leftrightarrow DM\perp DN\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}=0\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}+\frac{h^2}{4}=0\Leftrightarrow h=a\sqrt{2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{2}$$

Bài tập tự giải:

Bài 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $A'(0;0;2)$.

1. Chứng minh A'C vuông góc với BC'. Viết phương trình mặt phẳng (ABC')
2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B'C' trên mặt phẳ (ABC').

Đáp số:

1. $(ABC'): y-z=0$ 2. $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân với AB = AC = a góc $\widehat{BAC}=120^0$, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm của CC'. Chứng mi rằng tam giác ABI' vuông ở A. Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) (AB'I).

Đáp số: $\cos\varphi=\frac{\sqrt{30}}{10}$

Bài 4: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có A'.ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh AB = a, cạnh bên A'A = b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) (A'BC). Tính $\tan\alpha$ và thể tích của khối chóp A'.BB'C'C.

Đáp số: $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a}$ và $V_{A'.BB'C'C.}=\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{6}$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có AB = a, AC = 2a, $AA_1=2a\sqrt{5}$ và g $\widehat{BAC}=120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh $MB\perp MA_1$ tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (A_1BM).

Hướng dẫn:

Chọn hệ trục Axyz sao cho: A ≡ O, C(-2a; 0; 0), A1(0; 0; $2a\sqrt{5}$)

$\Rightarrow$ A (0; 0; 0), B $\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ và M (-2a; 0 ; $a\sqrt{5}$)

$$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=a\left(-\frac{5}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{5}\right),\ \overrightarrow{MA_1}=a\left(2;0;\sqrt{5}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MA_1}=a^2(-5+5)=0\Rightarrow BM\perp MA_1$

Ta có thể tích khối tứ diện AA_1BM là:

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AA_1}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\right|=\frac{a^3\sqrt{15}}{3};\ S_{\Delta BMA_1}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA_1}\right]\right|=3a^2\sqrt{3}$$

Suy ra khoảng cách từ A đến mp(BMA_1) bằng: $d=\frac{3V}{S}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

ch khác:

Ta có:

$$A_1M^2=A_1C_1^2+C_1M^2=9a^2$$
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos120^0=7a^2.$$
$$BM^2=BC^2+CM^2=12a^2$$
$$A_1B^2=A_1A^2+AB^2=21a^2=A_1M^2+MB^2.$$

MB vuông góc với MA_1.

Hình chóp $MABA_1$ và $CABA_1$ có chung đáy là tam giác ABA_1 và đường cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.

$$\Rightarrow V=V_{MABA_1}=V_{CABA_1}=\frac{1}{3}AA_1.S_{ABC}=\frac{1}{3}a^3\sqrt{15d}$$

$$\Rightarrow d(a,(MBA_1))=\frac{3V}{S_{MBA_1}}=\frac{6V}{MB.MA_1}=\frac{a\sqrt{5}}{3}\ \text{(đvđd)}$$

số: $d(A,(A_1BM))=\frac{a\sqrt{5}}{3}$

6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của đoạn AA_1. Chứng minh $BM\perp B_1C$ và tính $d(BM,B_1C)$.

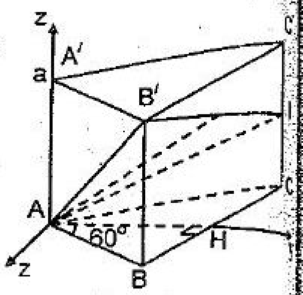
số: $d(BM,B_1C)=\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông, AB = AC = a, $A_1=a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AA_1 và BC_1. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AA_1 và BC_1. Tính thể tích hình chóp MA_1BC_1.

số: $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 8: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB = AC, góc $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên BB' = a. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh giác AB'I vuông tại A và tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB

Hướng dẫn:



Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow AH \perp BC$

Tam giác ABH là nửa tam giác đều cạnh AB = a

$\Rightarrow AH = \frac{a}{2}$ và $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

Dựng hệ trục Axyz, với Ax, Ay, Az đôi một vuông góc, A(0; 0; 0),

$B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $A'(0; 0; a)$,

$B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\right)$, $C'\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\right)$, $I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\right)$, $\overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + a.\frac{a}{2} = -\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{AI}$$

Vậy, tam giác AB'I vuông tại A.

Phương trình mp(ABC): z = 0 có pháp vectơ $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$

Mặt phẳng (AB'I) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AI}$, nên có pháp vectơ

$$[\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AI}] = \left(-\frac{a^2}{4}; -\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{a^2}{4}(1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}) = -\frac{a^2}{4}\vec{n}_2$$

với $\vec{n}_2 = (1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$.

Gọi α là góc giữa (ABC) và (AB'I), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|0 + 0 - 2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0+0+1}.\sqrt{1+27+12}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Bài 9: Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có các mặt bên là hình vuông cạnh a. D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, A'C', C'B'. Tính kho cách giữa DE và A'F.

Hướng dẫn:

Xét hệ trục Đề –các vuông góc A'xyz với tọa độ các điểm là :

$A'(0;0;0), F\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), E\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{ED} = \left(-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right); \overrightarrow{A'F} = \left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \overrightarrow{A'E} = \left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{ED},\overrightarrow{A'F}\right] = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)$

Ta có : $d(DE, A'F) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{ED},\overrightarrow{A'F}\right].\overrightarrow{A'E}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{ED},\overrightarrow{A'F}\right]\right|} = \frac{\left|\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right|}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+0+\frac{3a^2}{64}}} = \frac{a}{\sqrt{17}}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và A'F là $\frac{a\sqrt{17}}{17}$

Dạng 6: Bài toán hình không mẫu mực

Với hình không mẫu thì tùy từng trường hợp cụ thể mà ta thiết lập hệ trục tọa độ, chú ý các yếu tố vuông góc, song song

Bài tập giải mẫu:

Bài 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là đường thẳng d. Trên d lấy hai điểm A và B với AB = a. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC; BD cùng vuông góc với d và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho

$A \equiv O(0;0;0), B(a;0;0) \in Ox, C(0;0;a) \in Oz, D(a;a;0) \in Oxy$, $a > 0$

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, $I(x;y;z)$ là tâm của mặt cầu. Ta có

$$IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IB^2 = IA^2 \\ IC^2 = IA^2 \\ ID^2 = IA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + (a-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ (a-x)^2 + (a-y)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ z = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right) \Rightarrow R = IA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khoảng cách từ đỉnh A đến (BCD) theo a.

$$\begin{cases}\overline{BC}=(-a;0;a)\\ \overline{BD}=(0;a;0)\end{cases}\Rightarrow \overline{n}=\left(-a^2;0;a^2\right)=-a^2\,(1;0;-1)$$

Mặt phẳng (BCD) đi qua B và có vtpt $\overline{n}=(1;0;-1)$ có phương trình

$$1(x-a)+0(y-0)-1(z-0)=0\Leftrightarrow x-z-a=0$$

$$\Rightarrow d\left(A,(BCD)\right)=\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

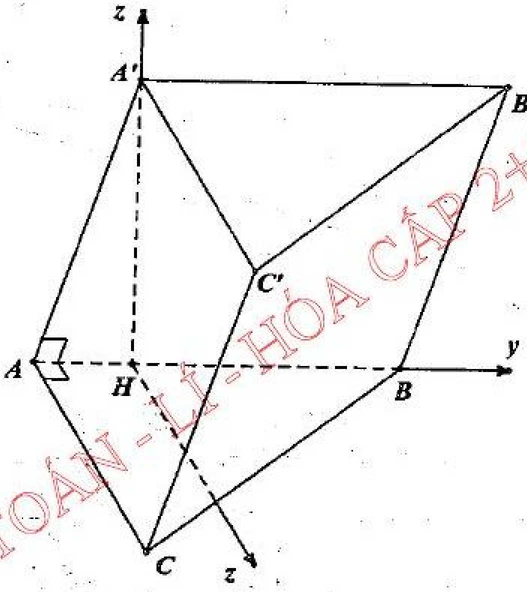
Bài 2: Cho hình lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân A. Mặt bên ABA'B' là hình thoi cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt đáy. Mặt bên ACC'A' hợp với đáy góc nhọn α.

a. Tính diện tích xung quanh lăng trụ và thể tích khối trụ

b. Gọi β là góc nhọn mà mp(BCC'B') hợp với mặt đáy.

Chứng minh rằng: $\tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$

Giải:



a. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Theo giả thiết ta có góc $\widehat{A'AB}=\alpha$, $AH=a\cos\alpha$; $A'H=a\sin\alpha$;

Suy ra $H(0;0;0)$; $A(0;-a\cos\alpha;0)$; $B\left(0;a(1-\cos\alpha);0\right)$; $A'(0;0;a\sin\alpha)$

$C(0;a\cos\alpha;0)$; $C'(a;0;a\sin\alpha)$; $B'(0;a;a\sin\alpha)$

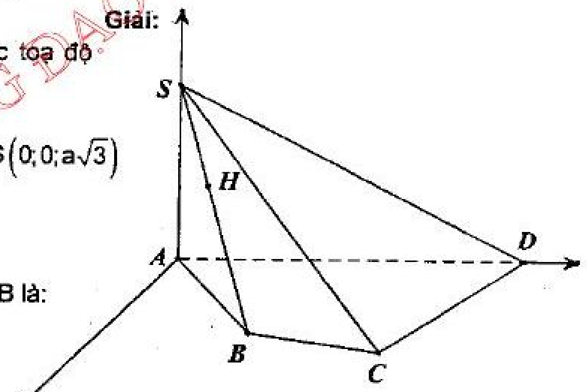
Từ đó tính được $S_{xq}=a^2\left(1+\sin\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}\right)$; $V=\frac{1}{2}a^3\sin\alpha$

Ta có: $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}\Rightarrow\sin\beta=\sin\alpha\sqrt{\frac{2}{1+\sin^2\alpha}}$

Suy ra $\tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$ (đpcm)

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều với cạnh a $(a>0)$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B trên SB sao cho $AM\perp MD$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SB}$.

Giải:



Đặt hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Suy ra ta có:

$A\equiv O(0;0;0)$, $D(2a;0;0)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$

và $B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Suy ra phương trình của SB là:

$$\frac{2x}{a}=\frac{2y}{a\sqrt{3}}=\frac{z-a\sqrt{3}}{-a\sqrt{3}}$$

Gọi $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ thuộc cạnh SB, ta có: $\begin{cases}y_0=\sqrt{3}x_0\\ z_0=a\sqrt{3}-2\sqrt{3}x_0\end{cases}$

Mặt khác $AM\perp DN\Leftrightarrow\overline{AM}\overline{DM}=0\Leftrightarrow x_0^2-2ax_0+y_0^2+z_0^2=0\Leftrightarrow x_0=\frac{3a}{8}$

$\Leftrightarrow M\left(\frac{3a}{8};\frac{3a\sqrt{3}}{8};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)\Rightarrow\overline{SM}=\frac{3}{4}\overline{SB}$ hay $\frac{SM}{SB}=\frac{3}{4}$.

TẬP TỔNG HỢP

1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AC cắt BD tại gốc tọa độ O.

Biết $A(-\sqrt{2};-1;0)$, $B(\sqrt{2};-1;0)$, $S(0;0;3)$

Viết phương trình mặt phẳng qua trung điểm M của cạnh AB, song song với hai đường thẳng AD, SC.

Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm B và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (P).

2: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật: $SA\perp(ABCD)$; $AB=SA=1$; $AD=\sqrt{2}$. Gọi M;N là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện ANIB.

Hướng dẫn:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(\sqrt{2};1;0)$; $D(\sqrt{2};0;0)$; $S(0;0;1$

Vì M;N là trung điểm của AD và SC $\Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)\ N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ta có I là trọng tâm của $\Delta ABD \Rightarrow I\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3};0\right)$

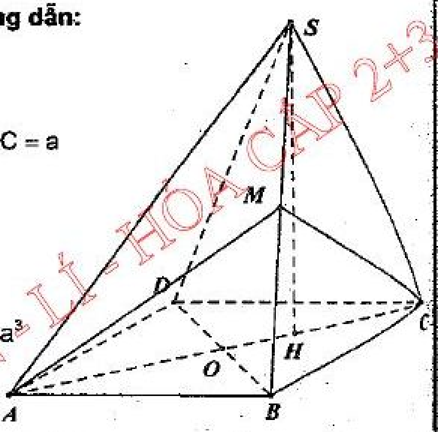
$\vec{AN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\vec{AB}=(0;1;0)$; $\vec{AI}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3};0\right)$

$\Rightarrow \left[\vec{AN};\vec{AB}\right]=\left(-\frac{1}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\vec{AN};\vec{AB}\right].\vec{AI}=-\frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{ANIB}=\frac{\sqrt{2}}{36}$

Bài 3: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB=a, AD=2\sqrt{2}$ Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (*ABCD*) trùng với trọng tâm tam giác *BCD*. Đường thẳng *SA* tạo với mặt phẳng (*ABCD*) một góc 45^0. Tính thể tích của khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và *SD* theo *a*.

Hướng dẫn:



Gọi H là trọng tâm tam giác BCD.

Theo gt $SH \perp (ABCD)$

Gọi $O=AC\cap BD \Rightarrow CH=\frac{2}{3}CO=\frac{1}{3}AC=a$

$\Rightarrow AH=AC-HC=2a$

SA tạo với đáy góc 45^0 suy ra

$SAH=45^0 \Rightarrow SH=AH=2a$

$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}a.2\sqrt{2}a.2a=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

Gọi M là trung điểm của SB.

Mặt phẳng (ACM) chứa AC và // SD

Do đó $d(SD;AC)=d(SD;(ACM))=d(D;(ACM))$

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2\sqrt{2}a;0$

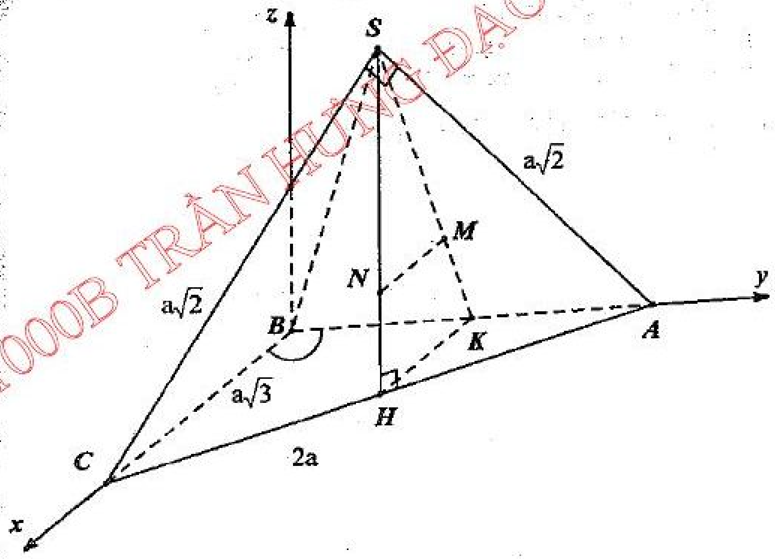
$S\left(\frac{2a}{3};\frac{4\sqrt{2}a}{3};2a\right)$, $C(a;2\sqrt{2}a;0)$ $M\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right)$. $\overline{AC}=(a;2\sqrt{2}a;0)$

$\overline{AM}=\left(\frac{5a}{6};\frac{2\sqrt{2}a}{3};a\right) \Rightarrow \overline{AC}\wedge\overline{AM}=(2\sqrt{2}a^2;-a^2;-\sqrt{2}a^2)$

Mặt phẳng (*ACM*) đi qua điểm A và có vtpt $\vec{n}=(2\sqrt{2};-1;-\sqrt{2})$ nên có phương trình là $2\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}z=0 \Rightarrow d(D;(ACM))=\frac{\left|-2\sqrt{2}a\right|}{\sqrt{8+1+2}}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{11}}$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC, có tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, mp(SAC) vuông góc mp(ABC), $SA=SC=a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SAC. Tính thể tích của khối chóp S.AMN và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB theo a.

Hướng dẫn:



Tính V_{SAMN}:

Ta có $AC=2a \Rightarrow SA^2+SC^2=AC^2 \Rightarrow SA\perp SC$

Hạ $SH\perp AC$, do $(SAC)\perp(ABC) \Rightarrow SH\perp(ABC), SH=a$

Gọi K là trung điểm của AB. Ta có $\frac{V_{SAMN}}{V_{SAKH}}=\frac{SM}{SK}.\frac{SN}{SH}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{4}{9}V_{SAKH}=\frac{4}{9}.\frac{1}{3}.S_{AKH}.SH=\frac{4}{9}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{54}$

Tính $d(SC,AB)$:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz hình vẽ sao cho

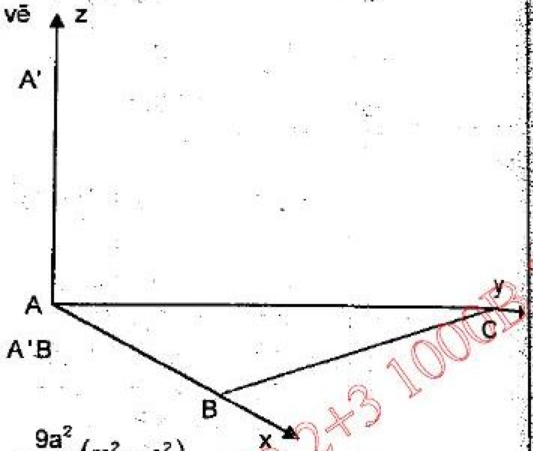
$B(0;0;0)$, $A(0;a;0)$, $C(a\sqrt{3};0;0)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\right)$

Ta có $\overline{SC}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-a\right)$, $\overline{AB}=(0;-a;0)$, $\overline{CA}=(-a\sqrt{3};a;0)$

$$d(SC,AB)=\frac{\left|\left[\overline{SC},\overline{AB}\right].\overline{CA}\right|}{\left|\left[\overline{SC},\overline{AB}\right]\right|}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $BC=3a$, $AA'=a$ và góc giữa $A'B$ với mặt phẳng trung trực đoạn BC bằn 30^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa đường thẳng $A'B$ với AC.

Hướng dẫn:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có $A(0;0;0)$; $A'(0;0;a)$

$B(m;0;0)$; $C(0;n;0)$

Trong đó $m=AB, n=AC$

Tam giác ABC vuông tại A,

$BC=3a\Rightarrow m^2+n^2=9a^2$

$\overline{BC}=(-m;n;0)$ là VTPT

của mp trung trực đoạn BC

$\overline{A'B}=(m;0;-a)$ là VTCP của $A'B$

Ta lập được phương trình sau

$$\frac{\left|-m^2\right|}{\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{m^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m^4=\frac{9a^2}{4}\left(m^2+a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4m^4-9a^2m^2-9a^4=0\Leftrightarrow m=a\sqrt{3}\Rightarrow n=a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{2}a.a\sqrt{6}.a\sqrt{3}=\frac{3a^2\sqrt{2}}{2}\ (\text{đvtt})$$

- Tính $d(A'B,AC)$

VTCP của AC là $\vec{j}=(0;1;0)$;

VTCP của $A'B$ là $\vec{n}=\left(\sqrt{3};0;-1\right)$; $\overline{AA'}=(0;0;a)$

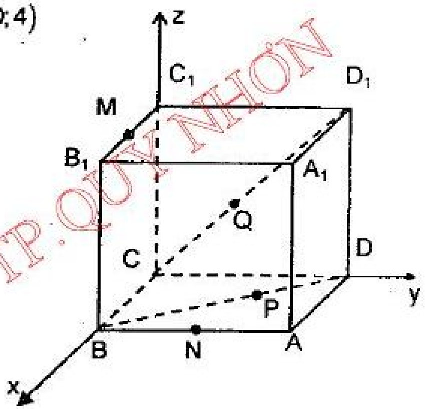
$$\left[\vec{n};\vec{j}\right]=\left(1;0;\sqrt{3}\right)\ ;\ \left[\vec{n};\vec{j}\right].\overline{AA'}=a\sqrt{3};\left|\left[\vec{n};\vec{j}\right]\right|=2$$

Khi đó $d(A'B,AC)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 6: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $C(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $D(0;4;0)$, $C_1(0;0;4)$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của B_1C_1 và AB; P, Q là các điểm thuộc các đường thẳng BD và CD_1 sao cho PQ song song với MN. Lập phương trình mặt phẳng (R) chứa hai đường thẳng MN và PQ.

Hướng dẫn:

Chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ



Do $C(0;0;0),B(4;0;0),D(0;4;0),C_1(0;0;4)$

$\Rightarrow B_1(4;0;4),A(4;4;0),D_1(0;4;4)$

M là trung điểm $B_1C_1\Rightarrow M(2;0;4)$;

N là trung điểm $AB\Rightarrow N(4;2;0)$

Ta có: $\overline{MN}=(2;2;-4)$

$\Rightarrow$ VTCP của (MN) là $\vec{u}=(1;1;-2)$

$\overline{BD}=(-4;4;0)\Rightarrow$ VTCP của (BD) là

$$\vec{u}_1=(1;-1;0)\Rightarrow(BD):\begin{cases}x=4+t_1\\y=-t_1\\z=0\end{cases}$$

$$\overline{CD_1}=(0;4;4)\Rightarrow \text{VTCP }(CD_1)\text{ là }\vec{u}_2=(0;1;1)\Rightarrow(CD_1):\begin{cases}x=0\\y=t_2\\z=t_2\end{cases}$$

Điểm $P\in BD\Rightarrow P(4+t_1;-t_1;0)$, $Q\in(CD_1)$

$\Rightarrow Q(0;t_2;t_2)\Rightarrow\overline{PQ}=(-4-t_1;t_2+t_1;t_2)$

$$PQ\,//\,MN\Rightarrow\frac{-4-t_1}{1}=\frac{t_2+t_1}{1}=\frac{t_2}{-2}\Leftrightarrow t_1=-3,t_2=2\Rightarrow P(1;3;0),Q(0;2;2)$$

$\overline{MN}=(2;2;-4)$, $\overline{MP}=(-1;3;-4)\Rightarrow$ VTPT (R) là $\vec{n}=(4;12;8)$

Nên có phương trình là

$(R):1(x-1)+3(y-3)+2(z-0)=0\Leftrightarrow x+3y+2z-10=0$

7: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có thể tích bằng 1. Gọi I, J, K lần lượt là trung điển của các đoạn thẳng AA', CD và A'D'.

Tính thể tích khối tứ diện BIJK.

Biết BK vuông góc với mặt phẳng (A'C'D). Tính độ dài các cạnh của hình hộp.

Tính giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa hai đường thẳng CI và A'J.

Hướng dẫn:

Gọi a, b, c là 3 kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có a.b.c = 1.

Xét hệ trục Đề –các vuông góc Axyz với tọa độ các điểm là :

$A(0;0;0),B(a;0;0),C(a;b;0),D(0;b;0),A'(0;0;c),B'(a;0;c),C'(a;b;c),$

$D'(0;b;c),I\left(0;0;\dfrac{c}{2}\right),J\left(\dfrac{a}{2};b;0\right),K\left(0;\dfrac{b}{2};c\right)$

Gọi V là thể tích của tứ diện BIJK ta có:

$$\overline{BI}=\left(-a;0;\frac{c}{2}\right),\overline{BJ}=\left(-\frac{a}{2};b;0\right)\Rightarrow\left[\overline{BI},\overline{BJ}\right]=\left(-\frac{bc}{2};-\frac{ac}{4};-ab\right)$$

$$\overline{BK}=\left(-a;\frac{b}{2};c\right)$$

$\Rightarrow 6V = \left|\left[\overline{BI},\overline{BJ}\right].\overline{BK}\right| \Leftrightarrow 6V = \left|\frac{abc}{2} - \frac{abc}{8} - abc\right| = \frac{5abc}{8}$

Vậy $V = \frac{5}{48}$ (vì a.b.c =1)

b. Ta có $BK \perp mp(A'C'D)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{BK} \perp \overline{A'C'} \\ \overline{BK} \perp \overline{A'D}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{BK}.\overline{A'C'} = 0 \\ \overline{BK}.\overline{A'D} = 0\end{cases}$ (1)

Với $\overline{BK} = \left(-a;\frac{b}{2};c\right)$,

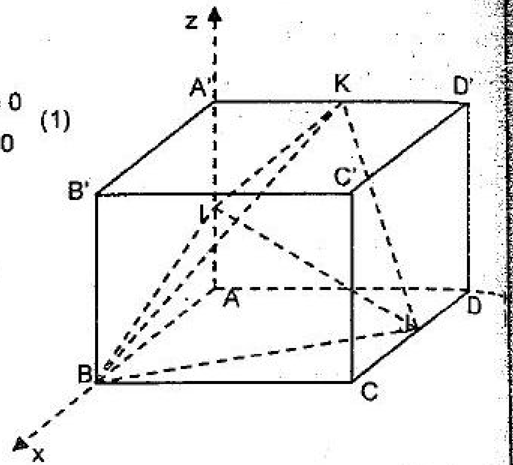
$\overline{A'C'} = (a;b;0), \overline{A'D} = (0;b;-c)$

Thế vào hệ (1) ta được

$\begin{cases}-a^2 + \frac{b^2}{2} = 0 \\ \frac{b^2}{2} - c^2 = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow a = c = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

từ đó suy ra độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật.



c. Gọi khoảng cách giữa hai đường thẳng CI và A'J là h , ta có;

$$h = \frac{\left|\left[\overline{CI},\overline{A'J}\right].\overline{A'I}\right|}{\left|\left[\overline{CI},\overline{A'J}\right]\right|} = \frac{abc}{\sqrt{4b^2c^2 + 4b^2a^2 + 9a^2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{4}{c^2} + \frac{9}{b^2}}}$$

Áp dụng BĐT Cô si với a.b.c = 1 ta có: $h_{max} = \frac{1}{\sqrt{3.\sqrt[3]{144}}}$ đạt được khi

$\frac{a}{2} = \frac{c}{2} = \frac{b}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{12}}$

Bài 8: Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. G M, N lần lượt là trung điểm cạnh AA', CC'.

a. Chứng minh B', M, D, N cùng ∈ một mặt phẳng .

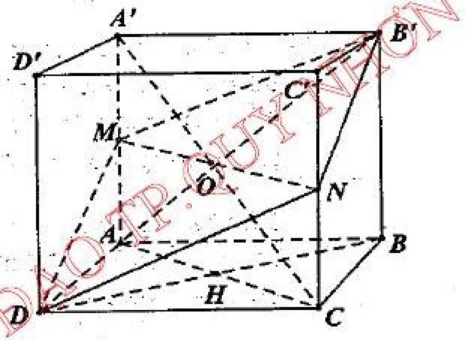
b. Tính AA' theo a để BMDN là hình vuông.

Hướng dẫn:

Cách 1: Phương pháp hình học

a. Ta có A'M // CN; A'M // CN ⇒ A'MCN là hình bình hành ⇒ A'C ∩ MN tại O là trung điểm của mỗi đường là I nên B'MDN là hình bình hành.

Do đó B', M, D, N cùng ∈ 1 mặt phẳng.



Ta có: $DM^2 = AD^2 + AM^2$ (1); $DN^2 = CD^2 + CN^2$

Vì $\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta$ BAD đều ⇒ AD = CD (2)

Từ (1), (2) ⇒ $DM^2 = DN^2 \Rightarrow DM = DN$

⇒ B'DMN là hình thoi.

Để B'DMN là hình vuông thì MN = B'D ⇒ $AC^2 = B'D^2$ (1')

Gọi H = AC ∩ BD

⇒ H là trung điểm của AC và BD

Δ BAD đều ⇒ H là đường cao

$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$ (2')

Trong Δ vuông BB'D ta có

$B'D^2 = BB'^2 + BD^2$(3')

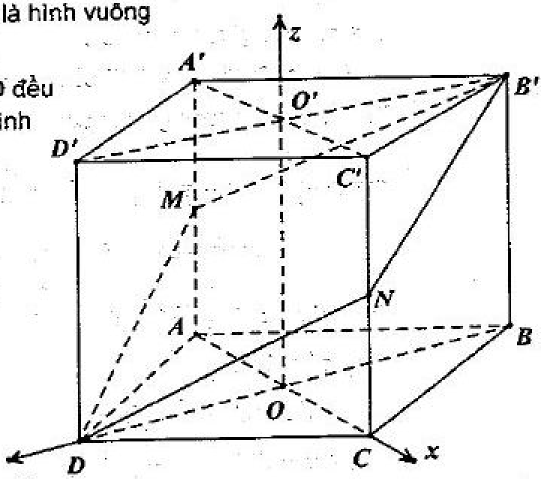
Từ (1'), (2'), (3')

$\Rightarrow 3a^2 = BB'^2 + BD^2 \Rightarrow BB'^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow BB = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$

Vậy nếu $AA' = a\sqrt{2}$ thì B'MDN là hình vuông

Cách 2: Phương pháp tọa độ



a. Δ BAD có $\widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \Delta$ BAD đều

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành ABCD và A'B'C'D'

Ta có : $AO = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$

Giả sử : AA' = b.

Chọn hệ trục tọa độ Ozyz sao cho O là gốc tọa độ, C ∈ Ox , D ∈ Oy , O' ∈ Oz.

Khi đó O(0;0;0), $A(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0)$,

$B(0;-\frac{a}{2};0)$, $C(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0)$, $D(0;\frac{a}{2};0)$; $A'(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;b)$; $B'(0;-\frac{a}{2};b)$, $C'(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;b)$;

$D'(0;\frac{a}{2};b)$, $M(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{b}{2})$; $N(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{b}{2})$

Ta có $\overline{DM} = (\frac{-a\sqrt{3}}{2};\frac{-a}{2};\frac{b}{2})$; $\overline{NB'} = (\frac{-a\sqrt{3}}{2};\frac{-a}{2};\frac{b}{2})$

$\Rightarrow \overline{DM} = \overline{NB'}$ ⇒ DM = B'N ⇒ DM // B'N ⇒ B'DMN là hình bình hành

Vậy 4 điểm M, N, B', D cùng ∈ 1 mặt phẳng

b. Ta có : $\overrightarrow{MB'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{-a}{2}; \frac{b}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{DM'}\right| = \left|\overrightarrow{NB'}\right| = \left|\overrightarrow{MB'}\right|$

Hay B'MDN là hình thoi. để B'MDN là hình vuông thì $\overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MN} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{-3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}$$

Vậy nếu $AA' = a\sqrt{2}$ thì B'MDN là hình vuông.

Bài 9: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D', biết bán kính cầu nội tiếp trong diện ACB'D' bằng r.

a. Tính diện tích toàn phần của tứ diện ACB'D' theo r.

b. Tính thể tích hình lập phương ABCD.A'B'C'D' theo r.

Hướng dẫn:

a. Tính diện tích toàn phần của tứ diện ACB'D' theo r.

Gọi a là cạnh hình lập phương và I là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện

⇒ I là giao điểm của 2 đường chéo A'C và B'D.

Chọn hệ trục Oxyz như sau:

Gốc O ≡ A, trục Ox đi qua AB, trục Oy đi qua AD, trục Oz đi qua AA'.

Khi đó: A (0; 0; 0); B(a; 0; 0); C(a; a; 0); D(0; a; 0); A'(0; 0; a); B'(a; 0; a); D(0; a; a

Mặt phẳng (ACD') có cặp vectơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{AC} = (a; a; 0)$ hay $(1; 1; 0)$; $\overrightarrow{AD'} = (0; a; a)$ hay $(0; 1; 1)$

⇒ Pháp vectơ $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD'}\right] = (1; -1; 1)$

⇒ Phương trình tổng quát của mặt phẳng (ACD'): $x - y + z = 0$

I là trung điểm A'C $\Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Bán kính r là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ACD')

$$\Rightarrow r = d(I, ACD') = \frac{\left|\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}.r$$

Các mặt của tứ diện là 4 tam giác đều bằng nhau có cạnh bằng $a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_{tp} = 4\,S_{ACB'} = \frac{4.(a\sqrt{2})^2.\sqrt{3}}{4} = (2\sqrt{6}.r)^2.\sqrt{3} = 24r^2\sqrt{3} \text{ (đvdt)}$$

b. Thể tích khối lập phương: $V = a^3 = (2\sqrt{3}r)^3 = 24r^3\sqrt{3}$ (đvtt)

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, SC. Tính thể tích tứ diện BDM và khoảng cách từ D đến mp(BMN).

Hướng dẫn:

Chọn hệ trục toạ độ sao cho: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), C(a; a; 0), S(0; 0; a),

$M\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$, $N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(-\frac{a^2}{4}; -\frac{a^2}{2}; \frac{a^2}{4}\right)$

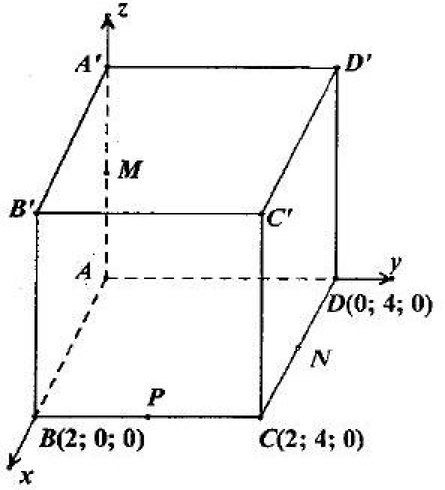
$$\Rightarrow V_{BMND} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM}\right]\overrightarrow{BD}\right| = \frac{a^3}{24}$$

Mặt khác, $V_{BMND} = \frac{1}{3}S_{BMN}.d(D,(BMN))$, $S_{BMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow d(D,(BMN)) = \frac{3V_{BMND}}{S_{BMN}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Bài 11: Trong không gian với hệ tọa độ 0xyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 4; 0) và D'(0; 4; 6). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', CD, BC và Q là một điểm thuộc đường thẳng BB' sao cho thể tích tứ diện MNPQ bằng 3. Tính tỉ số $\frac{BQ}{B'Q}$.

Hướng dẫn:



Ta có A'(0; 0; 6); C(2; 4; 0); B'(2; 0; 6);

M(0; 0; 3); N(1; 4; 0); P(2; 2; 0). Khi đó

$\overrightarrow{MN} = (1; 4; -3)$; $\overrightarrow{MP} = (2; 2; -3)$. Suy ra

$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-6; -3; -6)$

Phương trình BB' đi qua B và có

VTCP □ = (0; 0; 1).

do đó (BB'): $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

Gọi $Q(2; 0; t) \in BB' \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = (2; 0; t - 3)$

$V_{MNPQ} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = 3$

$\Leftrightarrow |t - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases}$

Với t = 4 ⇒ Q(2; 0; 4) ⇒ $\frac{BQ}{B'Q} = \frac{4}{2} = 2$.

Với t = - 2 ⇒ Q(2; 0; -2) ⇒ $\frac{BQ}{B'Q} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

CHUYÊN ĐỀ 10: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

PHẦN 1: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

§ 1: ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa về vectơ chỉ phương (vtcp) và vectơ pháp tuyến (vtpt)

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng Δ nếu giá của song song hoặc trùng với Δ.

- Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là một VTCP của Δ (nói c khác một đường thẳng có vô số vtcp, các vectơ này sai khác nhau bởi hằng số $k \neq 0$)
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTCP.

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng Δ nếu giá của vuông góc với Δ.

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là một VTPT của Δ.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm và một VTPT.
- Nếu $\vec{u}$ là một VTCP và $\vec{n}$ là một VTPT của Δ thì $\vec{u} \perp \vec{n}$.

2. Phương trình đường thẳng

a. Phương trình tham số của đường thẳng

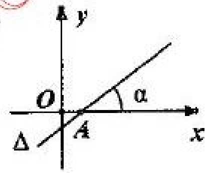
Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (u_1;u_2)$ có phương trìn

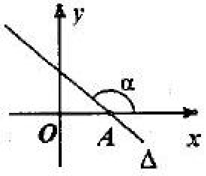
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (1) \quad \text{(t là tham số thực).}$$

Điểm $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists\, t \in R: \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

Gọi k là hệ số góc của Δ: $k = \tan\alpha$, với $\alpha = \widehat{xAv}$, $\alpha \neq 90^0$

Với $k = \dfrac{u_2}{u_1}$, với $u_1 \neq 0$.





b. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (u_1;u_2)$ có phương trình là $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ (2) $(u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0)$.

Trong trường hợp $u_1 = 0$ hoặc $u_2 = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

c. Phương trình tổng quát của đường thẳng $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Nếu Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ thì Δ có vtpt là $\vec{n} = (a;b)$ và vtcp $\vec{u} = (-b;a)$ hoặc $\vec{u} = (b;-a)$.

Nếu Δ đi qua $M_0(x_0;y_0)$ và có vtpt $\vec{n} = (a;b)$ thì phương trình của Δ là: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Trường hợp đặc biệt

Hệ số	Phương trình đường thẳng Δ	Tính chất đường thẳng Δ
$c = 0$	$ax + by = 0$	Δ đi qua gốc toạ độ O
$a = 0$	$by + c = 0$	Δ // Ox hoặc Δ ≡ Ox
$b = 0$	$ax + c = 0$	Δ // Oy hoặc Δ ≡ Oy

Nếu Δ qua hai điểm A(a;0), B(0;b) (a, b ≠ 0) thì phương trình của Δ: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ **(gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn)**.

Nếu Δ qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k thì phương trình của Δ: $y - y_0 = k(x - x_0)$ **(gọi là phương trình đường thẳng theo hệ số góc)**

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

<table>
<tr><td colspan="3">Hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:
$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} (1)$</td></tr>
<tr><td>Δ_1 cắt Δ_2</td><td>Hệ (1) có một nghiệm</td><td>$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$
(nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)</td></tr>
<tr><td>Δ_1 // Δ_2</td><td>Hệ (1) vô nghiệm</td><td>$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$
(nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)</td></tr>
<tr><td>$\Delta_1 \equiv \Delta_2$</td><td>Hệ (1) có vô số nghiệm</td><td>$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$
(nếu $a_2, b_2, c_2 \neq 0$)</td></tr>
</table>

4. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có vtpt $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ và

$\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có vtpt $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & \text{khi } (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \le 90^0 \\ 180^0 - (\vec{n}_1, \vec{n}_2) & \text{khi } (\vec{n}_1, \vec{n}_2) > 90^0 \end{cases}$$

$$\cos\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \cos\widehat{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)} = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Đặc biệt:

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Cho hai đường thẳng Δ_1: $y = k_1x + m_1$, Δ_2: $y = k_2x + m_2$:

+ Nếu $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$
+ Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1.\, k_2 = -1$.

5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và một điểm $M_0(x_0; y_0)$ thì khoảng cách M_0 đến Δ là $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

6. Vị trí tương đối của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N) \notin \Delta$

– Hai điểm M, N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$

– Hai điểm M, N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$

7. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp:

1. Để lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ
cần xác định:

Một điểm $M_0(x_0; y_0) \in \Delta$ và một vtcp $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Khi đó phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ: $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ $(u_1 \ne 0,\ u_2 \ne 0)$.

Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định:

Một điểm $M_0(x_0; y_0) \in \Delta$ và một vtpt $\vec{n} = (a; b)$.

Khi đó phương trình của Δ: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ (với $x_A \ne x_B$, $y_A \ne y_B$) có phương trình là $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A(a;0), B(0;b) (a, b ≠ 0) có phương trình là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k có phương trình là $y - y_0 = k(x - x_0)$

Loại 1: Sử dụng phương trình đoạn chắn

DỤ MINH HỌA

dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình đường thẳng qua $M(2;1)$ và tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Giải:

Gọi d là đường thẳng cần tìm và $A(a;0), B(0;b)$ là giao điểm của d với Ox, Oy, suy ra: $d: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Theo giả thiết, ta có: $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} = 1, |ab| = 8$.

Khi $ab = 8$ thì $2b + a = 8$. Nên: $b = 2; a = 4 \Rightarrow d_1: x + 2y - 4 = 0$.

Khi $ab = -8$ thì $2b + a = -8$. Ta có: $b^2 + 4b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Với $b = -2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow d_2: \left(1 - \sqrt{2}x\right) + 2\left(1 + \sqrt{2}\right)y - 4 = 0$

Với $b = -2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow d_3: \left(1 + \sqrt{2}x\right) + 2\left(1 - \sqrt{2}\right)y + 4 = 0$.

dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(3;1)$ và $I(2;-2)$. Viết ương trình đường thẳng d đi qua M và cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao o tam giác IAB cân tại I.

Giải:

ả sử đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A(a;0), B(0;b), (a, b ≠ 0)

ương trình đường thẳng d có dạng: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

d qua M(3;1) nên $\dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ (1)

ng thời, ΔIAB cân tại I nên

$IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+(0+2)^2} = \sqrt{(0-2)^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow |a-2| = |b+2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=b \end{array}\right.$

Với $a=-b$, thay vào (1) ta được $a=2; b=-2$ nên phương trình đường thẳ
là $x-y-2=0$

Với $a=b+4$, thay vào (1) ta được $(a;b)=(6;2)$ hoặc $(a;b)=(2;-2)$

Từ đó, phương trình đường thẳng d là $x+3y-6=0$ hoặc $x-y-2=0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là $d: x+3y-6=0$
$d: x-y-2=0$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(3;1). Lập phương trình đư thẳng d qua A và cắt chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy thứ tự tại P, Q cho diện tích tam giác OPQ nhỏ nhất.

Giải:

Từ giả thiết ta có $P(a;0); Q(0;b), a>0, b>0$.

Đường thẳng d có phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Đường thẳng d qua A(3; 1) nên $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow 1 \geq 2.\sqrt{\frac{3}{ab}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq 2.\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{a}=\frac{1}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$.

Ta có $S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}.a.b \geq \sqrt{3}$. Nên $S_{\Delta OPQ}$ nhỏ nhất $(=\sqrt{3})$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$

Vậy đường thẳng d có phương trình: $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm M(3;1). Viết phương đường thẳng d đi qua M cắt các tia Ox, Oy tại A và B sao cho $(OA+3OB)$ nhỏ nh

Giải:

PT đường thẳng d cắt tia Ox tại A(a;0), tia Oy tại B(0;b): $d: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (a,b>

Điểm $M(3;1) \in d$ nên $1=\frac{3}{a}+\frac{1}{b} \overset{\text{Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{\frac{3}{a}.\frac{1}{b}} \Rightarrow ab \geq 12$.

Mà

$OA+3OB=a+3b \geq 2\sqrt{3ab}=12 \Rightarrow (OA+3OB)_{min}=12 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ \frac{3}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a= \\ b= \end{cases}$

Phương trình đường thẳng d là: $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1 \Leftrightarrow x+3y-6=0$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M(3;1). Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt 2 trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Với $A(a;0)$ và $B(0;b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{a}+\frac{1}{b}=1 \\ OA+OB=|a|+|b| \geq |a+b| = \left|(a+b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)\right| \geq (\sqrt{3}+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Min}(OA+OB)=(\sqrt{3}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{3}=b^2 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a=b\sqrt{3} \Rightarrow b=1+\sqrt{3} \Rightarrow a=3+\sqrt{3}$$

Phương trình $\frac{x}{3+\sqrt{3}}+\frac{y}{1+\sqrt{3}}=1$

Thí dụ 6: Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng: $d_1: x-2y+2=0$; $d_2: 2x+3y-17=0$. Đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2 cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B. Viết phương trình đường thẳng d sao cho: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Giải:

Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 thì $M(4;3)$.

Xét tam giác OAB vuông tại O ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}$ (trong đó H là chân đường cao hạ từ O xuống cạnh AB của tam giác OAB).

Để $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất thì $\frac{1}{OH^2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OH lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv M$.

Khi đó d nhận véc tơ $\overrightarrow{OM}$ làm véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OM}=(4;3)$.

Phương trình đường thẳng $d: 4x+3y-25=0$

Loại 2: Sử dụng phương trình tổng quát

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết phương trình cạnh BC là $(d): x+7y-31=0$, điểm $N(7;7)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải:

Đường thẳng AB đi qua M nên có phương trình

$$a(x-2)+b(y+3)=0\ \left(a^2+b^2\neq 0\right)$$

$\left(\widehat{AB;BC}\right)=45^0$ nên $\cos 45^0=\dfrac{|a+7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a=4b\\4a=-3b\end{array}\right.$

Nếu $3a=4b$, chọn $a=4$, $b=3$ ta được $(AB): 4x+3y+1=$ $(AC): 3x-4y+7=0$.

Từ đó $A(-1;1)$ và $B(-4;5)$. Kiểm tra $\overline{MB}=2\overline{MA}$ nên M nằm ngoài đoạn A (thỏa mãn)

Từ đó tìm được C(3; 4)

Nếu $4a=-3b$, chọn $a=3$, $b=-4$ được

$(AB): 3x-4y-18=0$, $(AC): 4x+3y-49=0$

Từ đó A(10;3) và B(10;3) (loại)

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C) có phươn trình: $x^2+y^2-2x+2y-8=0$ và đường thẳng Δ: $4x+2y-11=0$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với Δ một góc bằng 45^0

Giải:

Theo bài (C) có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.

Giả sử tiếp tuyến có phương trình $\Delta': ax+by+c=0, (a^2+b^2\neq 0)$

Theo bài ta có: $\cos 45^0=\dfrac{|4a+2b|}{\sqrt{20(a^2+b^2)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 3a^2-3b^2+8ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3b\\b=3a\end{array}\right.$

TH1. $a=-3b$. Ta có $\Delta': -3x+y+c=0$.

Ta có $d(I,\Delta')=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=14\\c=-6\end{array}\right.$ $\Rightarrow\Delta': -3x+y-6=0$ và $\Delta': -3x+y+14=0$

TH2. $b=3a$. Ta có $\Delta': x+3y+c=0$.

Ta có $d(I,\Delta')=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=12\\c=-8\end{array}\right.$ $\Rightarrow\Delta': x+3y+12=0$ và $\Delta': x+3y-8=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn: $-3x+y-6=0$; $-3x+y+14=0$; $x+3y+12=0$; $x+3y-8=0$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A, phương trìn đường thẳng AB, BC lần lượt là: $x+2y-5=0$ và $3x-y+7=0$. Viết phươn trình đường thẳng AC, biết rằng AC đi qua F(1;–3).

Giải :

Gọi BC: $x+2y-5=0$ và AB: $3x-y+7=0$

$\Rightarrow$ VTPT của AB là $\vec{n}_1=(1;2)$, của BC là $\vec{n}_2=(3;-1)$.

Gọi VTPT của AC là $\vec{n}_3=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$.

Do ΔABC cân tại A nên các góc B và C đều nhọn và bằng nhau.

Suy ra: $\cos B=\cos C\Rightarrow\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{|\vec{n}_3.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_3|.|\vec{n}_2|}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{|3a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow 22a^2+2b^2-15ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a=b\\11a=2b\end{array}\right.$

Với 2a = b, ta có thể chọn $a=1, b=2\Rightarrow\vec{n}_3=(1;2)\Rightarrow AC\ //\ AB\Rightarrow$ không thoả mãn.

Với 11a = 2b, ta có thể chọn $a=2, b=11\Rightarrow\vec{n}_3=(2;11)$

Khi đó phương trình AC là: $2(x-1)+11(y+3)=0\Leftrightarrow 2x+11y+31=0$.

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh AB, BC lần lượt là 4x + 3y – 4 = 0; x – y – 1 = 0. Phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng x + 2y – 6 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải:

Tọa độ của A nghiệm đúng hệ phương trình: $|(1-b)(2-b)|$

Tọa độ của B nghiệm đúng hệ phương trình $\dfrac{4}{|a-b|}\sqrt{a^2+b^2}\,\dfrac{2}{|2a-b|}\sqrt{a^2+b^2}=8$

Đường thẳng AC đi qua điểm $\dfrac{2}{2a-b}$ nên phương trình có dạng: $M(at_2;\ bt_2)$

Gọi $\begin{cases}x=at\\y=bt\end{cases}$

Từ giả thiết suy ra $\left(\widehat{\Delta_2;\Delta_3}\right)=\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)$. Do đó

$\cos\left(\widehat{\Delta_2;\Delta_3}\right)=\cos\left(\widehat{\Delta_1;\Delta_2}\right)\Leftrightarrow\dfrac{|1.a+2.b|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|4.1+2.3|}{\sqrt{25}.\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow|a+2b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a(3a-4b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\3a-4b=0\end{array}\right.$

Với $a=0\Rightarrow b\neq 0$. Do đó $\Delta_3: y-4=0$

Với 3a – 4b = 0: Có thể cho a = 4 thì b = 3. Suy ra $\Delta_3: 4x+3y-4=0$ (trùng với Δ_1).

Do vậy, phương trình của đường thẳng AC là y - 4 = 0.

Tọa độ của C nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases}y-4=0\\x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}\Rightarrow C(5;4)$

ch khác:

Sau khi tìm được tọa độ điểm A và B. Tìm tọa điểm B' đối xứng với B qua đường thẳng AD.

Đường thẳng AC là đường thẳng đi qua A và B'

Tọa độ điểm $C=AC\cap BC\Rightarrow$ Tọa độ điểm C

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho hai đường thả $d_1: 2x-y+5=0$. $d_2: 3x+6y-7=0$. Lập phương trình đường thẳng đi q điểm $P(2;-1)$ sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra m tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải:

Cách 1: Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}=(2;-1)$; d_2 có vectơ c phương $\overrightarrow{a_2}=(3;6)$

Ta có: $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2}=2.3-1.6=0$ nên $d_1\perp d_2$ và d_1 cắt d_2 tại một điểm I khác P.

Gọi d là đường thẳng đi qua $P(2;-1)$ có phương trình:

$d: A(x-2)+B(y+1)=0 \Leftrightarrow Ax+By-2A+B=0$

d cắt d_1, d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh I khi và chỉ khi d tạo với d_1 (hoặ d_2) một góc 45^0

$$\Leftrightarrow \frac{|2A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\cos 45^0 \Leftrightarrow 3A^2-8AB-3B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=3B\\B=-3A\end{array}\right.$$

+ Nếu $A=3B$ ta có đường thẳng $d: 3x+y-5=0$

+ Nếu $B=-3A$ ta có đường thẳng $d: x-3y-5=0$

Vậy qua P có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán. $d: 3x+y-5$= hoặc $d: x-3y-5=0$

Cách 2: Gọi d là đường thẳng cần tìm, khi đó d song song với đường phân gi ngoài của đỉnh là giao điểm của d_1, d_2 của tam giác đã cho.

Các đường phân giác của góc tạo bởi d_1, d_2 có phương trình

$$\frac{|2x-y+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3x+6y-7|}{\sqrt{3^2+6^2}} \Leftrightarrow 3|2x-y+5|=|3x+6y-7| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-9y+22=0 \quad \Delta_1\\9x+3y+8=0 \quad \Delta_2\end{array}\right.$$

+ Nếu $d \,//\, \Delta_1$ thì d có phương trình $3x-9y+c=0$.

Do $P\in d$ nên $6+9+c=0 \Leftrightarrow c=-15 \Rightarrow d: x-3y-5=0$

+ Nếu $d \,//\, \Delta_2$ thì d có phương trình $9x+3y+c=0$.

Do $P\in d$ nên $18-3+c=0 \Leftrightarrow c=-15 \Rightarrow d: 3x+y-5=0$

Vậy qua P có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán. $d: 3x+y-5$= hoặc $d: x-3y-5=0$

Thí dụ 6: Cho ΔABC đều, biết điểm $A(2;6)$ và đường thẳng $(BC): \sqrt{3}x-3y+6$= Viết phương trình các cạnh còn lại.

Giải:

Giả sử AB qua $A(2;6)$ và có véc tơ pháp tuyến là: $\overline{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$(

Khi đó phương trình $AB: a(x-2)+b(y-6)=0 \Rightarrow ax+by-2a-6b=0$

Giả sử AC qua $A(2;6)$ và có véc tơ pháp tuyến là: $\overline{n}=(c;d)$ với $c^2+d^2\neq 0$(

phương trình $AC: cx+dy-2c-6b=0$

$$\widehat{(AB,BC)}=60^0 \Leftrightarrow \cos 60^0=\frac{|a\sqrt{3}-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|a\sqrt{3}-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{12}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12(a^2+b^2)}=2.|a\sqrt{3}-3b| \quad (1)$$

$$\widehat{(AC,BC)}=60^0 \Leftrightarrow \cos 60^0=\frac{|c\sqrt{3}-3d|}{\sqrt{c^2+d^2}.\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|c\sqrt{3}-3d|}{\sqrt{c^2+d^2}.\sqrt{12}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{12(c^2+d^2)}=2.|c\sqrt{3}-3d| \quad (2)$$

$$(AB.AC)=60^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}=2.|ac+bd| \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) có hệ phương trình:

$$\begin{cases}12(a^2+b^2)=4.(a\sqrt{3}-3b)^2\\12(c^2+d^2)=4.(c\sqrt{3}-3d)^2\\(a^2+b^2).(c^2+d^2)=4(ac+bd)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b(b-\sqrt{3}a)=0;(1')\\d(d-\sqrt{3}c)=0;(2')\\(a^2+b^2).(c^2+d^2)=4(a^2c^2+2abcd+b^2d^2);(3')\end{cases}$$

Từ hệ trên, ta tìm a, b thoả mãn (*). Tìm c, d thoả mãn (**).

Từ phương trình (1') chọn $b=0$ suy ra $a=1$.

Thế vào phương trình (3') ta được $3c^2-d^2=0$. Từ phương trình này chọn $d=\sqrt{3} \Rightarrow c^2=1$

Thế d vào phương trình (2') suy ra $c=1$

Vậy có $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=\sqrt{3}$

Vậy $AB: x-2=0$ và $AC: x+\sqrt{3}y-2-6\sqrt{3}=0$

Thí dụ 7: Cho ΔABC cân đỉnh A. Biết đường thẳng $(AB): x+y+1=0$; đường thẳng $(BC): 2x-3y-5=0$. Viết phương trình cạnh AC biết nó đi qua $M(1;1)$.

Giải:

Giả sử AC qua $M(1;1)$ và có véc tơ pháp tuyến là: $\overline{n}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$ (*).

Khi đó phương trình $AC: a(x-1)+b(y-1)=0 \Rightarrow ax+by-a-b=0$

Theo bài, tam giác ABC cân đỉnh A nên ta có góc B = C hay:

$$\widehat{(AB,BC)}=\widehat{(AC,BC)} \Leftrightarrow \frac{|1.2+1.(-3)|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|2.a+(-3).b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}.|2a-3b| \Leftrightarrow a^2+b^2=2.(2a-3b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=8a^2-24ab+18b^2$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 - 24ab + 17b^2 = 0 \quad \text{chọn } a = 1 \text{ suy ra } \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = \dfrac{7}{17} \end{array}\right.$$

Với a = 1, b = 1 ta có $AC: x + y - 2 = 0$ (loại vì AC //AB)

Với $a = 1, b = \dfrac{7}{17}$ ta có: $AC: x + \dfrac{7}{17}y - \dfrac{24}{17} = 0$ thoả mãn.

Loại 3: Sử dụng phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có hệ s góc k

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho đường thẳng d có phư trình: $2x + 3y + 1 = 0$ và điểm M(1;1). Viết phương trình đường thẳng đi qu tạo với d một góc 45^0

Giải:

Xét đường thẳng cần tìm song song với trục tung là:

$$\Delta: x - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (1;0) \Rightarrow d(\Delta; d) = \frac{2}{\sqrt{13}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\Delta': y = k(x - 1) + 1 \Rightarrow kx - y + 1 - k = 0 \Rightarrow \vec{n}_{\Delta'} = (k; -1)$$

$$\Rightarrow \cos(\Delta'; d) = \frac{|2k - 3|}{\sqrt{14}.\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1}{5} \\ k = -5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5y + 4 = 0 \\ 5x + y - 6 = 0 \end{array}\right.$$

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm M(1;4) và N(6;2). Lập phương t đường thẳng qua N sao cho khoảng cách từ M tới đó bằng 2.

Giải:

Xét trường hợp đường thẳng cần tìm song song với trục tung là:

$\Delta: x - 6 = 0 \Rightarrow d(M, \Delta) = 5 \neq 2$ (loại)

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm có dạng: $\Delta': y = k(x - 6) + 2$

$$\Rightarrow kx - y + 2 - 6k = 0 \Rightarrow d(M \to \Delta') = \frac{|kx - y + 2 - 6k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = -\dfrac{20}{21} \end{array}\right. \Rightarrow \Delta': \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ 20x + 21y - 162 = 0 \end{array}\right.$$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(0;2) và Δ là đường thẳng qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đư thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

Giải:

Cách 1:

Xét các trường hợp

1: $\Delta \equiv Oy \Rightarrow H \equiv A$: không thoả AH = d(H, Ox)

2: $\Delta \equiv Ox \Rightarrow H \equiv O$: không thoả AH = d(H, Ox)

phương trình đường thẳng $\Delta: y = kx \; (k \neq 0)$

đường thẳng $AH \perp \Delta$ và đi qua A có phương trình $y = -\dfrac{1}{k}x + 2$

Toạ độ $H = \Delta \cap AH$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = kx \\ y = -\dfrac{1}{k}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k}{k^2 + 1} \\ y = \dfrac{2k^2}{k^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2k}{k^2 + 1}; \frac{2k^2}{k^2 + 1}\right)$$

Ta có $AH = d(H; Ox) \Leftrightarrow \sqrt{\left(\dfrac{2k}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{2k^2}{k^2 + 1} - 2\right)^2} = \left|\dfrac{2k^2}{k^2 + 1}\right| \Leftrightarrow k^4 - k^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ k^2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

Vậy $\Delta: \; y = \pm\dfrac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2}x$

ch 2:

Gọi $H(x_0; y_0)$ là hình chiếu của A xuống Δ

Ta có: $\overline{AH} = (x_0; y_0 - 2)$, $\overline{OH} = (x_0; y_0)$

Do giả thiết: $\begin{cases} \overline{AH}.\overline{OH} = 0 \\ AH = d(H, Ox) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0(y_0 - 2) = 0 \\ \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 2)^2} = |y_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 = 0 \\ x_0^2 - 4y_0 + 4 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0^2 + 2y_0 - 4 = 0 \\ x_0^2 - 4y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -1 \pm \sqrt{5} \\ x_0^2 = 4y_0 - 4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_0 = -1 + \sqrt{5} \\ x_0^2 = -8 + 4\sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} y_0 = -1 - \sqrt{5} \\ x_0^2 = -8 - 4\sqrt{5} < 0 \text{(loại)} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm\sqrt{4\sqrt{5} - 8} \\ y_0 = -1 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\pm\sqrt{4\sqrt{5} - 8}; -1 + \sqrt{5}\right).$$

Phương trình: $(\sqrt{5} - 1)x \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 8}y = 0$

Dạng 2: Bài toán viết phương trình đường thẳng và tìm điểm liên quan tớ tam giác

Phương pháp chung: Để làm tốt các bài toán liên quan tới tam giác chúng ta phả

Nhớ được định nghĩa, tính chất của tam giác như tam giác cân, tam giác đ tam giác vuông, tam giác vuông cân

Nhớ tính chất các đường trong tam giác như đường cao, đường trung tuy đường trung trực, phân giác trong, phân giác ngoài

Nhớ tính chất các điểm đặc biệt trong tam giác như trọng tâm, trực tâm, đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp

Nhớ công thức tính diện tích tam giác, công thức tính bán kính đường tròn tiếp, ngoại tiếp

Trong dạng bài toán này chỉ giới thiệu về các đường và các điểm, có rất nh cách giải, nhưng cách giải chung nhất là *"đường cao – vuông góc, phân gi đối xứng; trung tuyến – trung điểm"* thường sử dụng phương trình tham chính tắc…

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm M(2;0 trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần l có phương trình $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$ .Viết phương trình cạnh AC

Giải:

Điểm A có tọa độ là nghiệm của hệ $\begin{cases}7x-2y-3=0\\6x-y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases} \Rightarrow A(1,2)$

Điểm M(2,0) là trung điểm của AB, vậy suy ra $B(3;-2)$

Phương trình đường thẳng BC có dạng $x+6y+m=0$ vì BC đi qua B và vu góc với đường thẳng $6x-y-4=0$ suy ra $m=9$.

Suy ra phương trình BC có dạng: $x+6y+9=0$

Gọi trung điểm của BC là N, suy ra tọa độ N là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases}7x-2y-3=0\\x+6y+9=0\end{cases} \Rightarrow N\left(0,-\frac{3}{2}\right)$$

Suy ra tọa độ điểm $C(-3;-1)$

Vậy phương trình $AC: -3x+4y-5=0$

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có $C(-4;1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phư trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có ho độ dương.

Giải:

Cách 1:

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua đường phân giác trong góc A nên C'(4 (bạn đọc tự tìm)

Đường tròn (T) có tâm $I(0;5)$ và bán kính $R=IC=\sqrt{32}$ nên có phương trình

$(T): x^2+(y-5)^2=32$

Vì ΔABC vuông tại A nên tọa độ điểm $A=(T)\cap d$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+(y-5)^2=32\\x+y-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=4\\y=1\\x>0\end{cases} \Rightarrow A(4;1) \Rightarrow AC=8$$

Đường thẳng AB là đường thẳng đi qua A và C' nên có phương trình $x-4=0$.

Điểm $B\in AB \Rightarrow B(4;b)$

ΔABC vuông tại A nên

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=24 \Rightarrow AB=6 \Leftrightarrow \sqrt{(b-1)^2}=6 \Rightarrow b=7 \Rightarrow B(4;7)$

Vậy phương trình của BC là: $3x+4y-16=0$

Cách 2:

Vì $C(-4;1)$, $\widehat{A}$ vuông và phân giác trong góc A là $d: x+y-5=0$ song song với đường phân giác của góc phần tư thứ II và thứ IV nên AC // Ox

$\Rightarrow y_A=y_C=1 \Rightarrow x_a=4$ vì $A\in d$ và $x_A>0$ nên $A(4;1)$

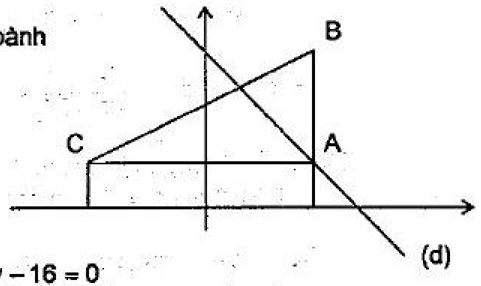
$\Rightarrow AC=8$

Mặt khác, AB vuông góc với trục hoành nên $B(4;b), b>1$

ΔABC vuông tại A nên

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=24 \Rightarrow AB=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(b-1)^2}=6 \Rightarrow b=7 \Rightarrow B(4;7)$



Vậy phương trình của BC là: $3x+4y-16=0$

Vậy điểm và đường thẳng cần tìm là: $B(4;7)$ và $BC: 3x-4y-16=0$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $C(-1;-2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x+y-9=0$ và $x+3y-5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B

Giải:

Giả sử $AM: 5x+y-9=0$, $BH: x+3y-5=0$.

Đường thẳng AC đi qua C và vuông góc với BH nên AC đi qua C và nhận $\overline{u_{BH}}=(3;-1)$ làm vtpt có phương trình

$AC: 3(x+1)-1(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0$.

Tọa độ điểm $A=AC\cap AM$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-y+1=0\\5x+y-9=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=4\end{cases} \Rightarrow A(1;4)$$

- Tọa độ điểm $B \in BH \Leftrightarrow B(5-3m;m)$

  M là trung điểm BC $\Leftrightarrow M\left(\dfrac{4-3m}{2};\dfrac{m-2}{2}\right)$.

  Mặt khác điểm $M \in AM \Leftrightarrow 5.\dfrac{4-3m}{2}+\dfrac{m-2}{2}-9=0 \Leftrightarrow m=0 \Rightarrow B(5;0)$.

  Vậy tọa độ hai điểm cần tìm là $A(1;4)$ và $B(5;0)$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của ta giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điể $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ v đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Giải:

Phương trình d qua H(−1; −1) và vuông góc với Δ: x − y + 2 = 0 có phương trì $1(x+1)+1(y+1)=0 \Leftrightarrow x+y+2=0$

Giao điểm I của d và Δ là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+2=0\\x-y+2=0\end{cases} \Rightarrow I(-2;0)$

Gọi K là điểm đối xứng của H qua Δ thì I là trung điểm của H và K nên $K(-3;1$

- Đường thẳng AC qua K và vuông góc đường cao: $4x+3y-1=0$ nên c phương trình $AC: 3(x+3)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+13=0$

  Tọa độ $A = AD \cap \Delta$ là nghiệm hệ: $\begin{cases}3x-4y+13=0\\x-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=7\end{cases} \Rightarrow A(5;7)$

- Đường thẳng CH qua H và vuông góc với HA nên có vtpt $\overrightarrow{HA}=2(3;4)$

  Phương trình $CH: 3(x+1)+4(y+1)=0$

  Tọa độ $C = CH \cap AC$ là nghiệm hệ: $\begin{cases}3x+4y+7=0\\3x-4y+13=0\end{cases} \Rightarrow C\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{3}{4}\right)$

Hoặc giải hệ: $\begin{cases}C \in AC\\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}=0\end{cases}$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với đường cao k từ đỉnh B và đường phân giác trong của góc A lần lượt có phương trình là $3x+4y+10=0$ và $x-y+1=0$, điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồn thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Giải:

Đặt $d_1: 3x+4y+10=0$; $d_2: x-y+1=0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với d_2, Δ cắt d_2 tại I và c AC tại N có phương trình $\Delta: x+y-2=0$

Điểm $I = \Delta \cap d_2$. Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình :

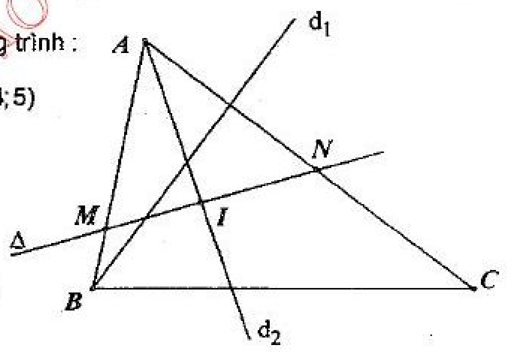
$\begin{cases}x+y-2=0\\x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Tam giác AMN có d_2 vừa là đường cao, vừa là phân giác nên là tam giác cân tại $A \Rightarrow I$ là trung điểm của $MN \Rightarrow N(1;1)$

AC là đường thẳng đi qua điểm N(1;1) và vuông góc với d_1 nên AC:

$4(x-1)-3(y-1)=0$ hay AC: $4x-3y-1=0$

Điểm $A = AC \cap d_2$.



Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases}4x-3y-1=0\\x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=5\end{cases} \Leftrightarrow A(4;5)$

AB là đường thẳng đi qua điểm M(0;2) nhận $\overrightarrow{MA}=(4;3)$ làm vec tơ chỉ phương

AB: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x-4y+8=0$

Điểm $B = AB \cap d_1$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases}3x-4y+8=0\\3x+4y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=\dfrac{-1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow B\left(-3;-\dfrac{1}{4}\right)$

C cách M một khoảng bằng $\sqrt{2}$ nên C thuộc đường tròn (S) có tâm M bán kính bằng $\sqrt{2}$

$(S): x^2+(y-2)^2=2$

Điểm $C = AC \cap (S)$. Tọa độ C là nghiệm hệ phương trình :

$\begin{cases}4x-3y-1=0\\x^2+(y-2)^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{4x-1}{3}\\x^2+\left(\dfrac{4x-7}{3}\right)^2=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{4x-1}{3}\\25x^2-56x+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \quad \Rightarrow y=1\\x=\dfrac{31}{25} \Rightarrow y=\dfrac{33}{25}\end{array}\right.$

$\Rightarrow C(1;1)$ hoặc $C\left(\dfrac{31}{25};\dfrac{33}{25}\right)$

Vì d_2 là phân giác trong của góc A nên B và C nằm khác phía bờ là d_2

$\Leftrightarrow (x_B-y_B+1).(x_C-y_C+1)<0 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{4}.(x_C-y_C+1)<0$

Cả hai điểm C trên đều thỏa mãn

Vậy $A(4;5);B\left(-3;-\frac{1}{4}\right);C(1;1)$ hoặc $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$

Thí dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại đỉnh A, trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x-2y-4=0$ phương trình đường thẳng BG là $7x-4y-8=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

Giải:

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y-4=0\\7x-4y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}\Rightarrow B(0;-2)$

Vì ΔABC cân tại A nên AG là đường cao của ΔABC

Vì $GA\perp BC\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng

GA: $2\left(x-\frac{4}{3}\right)+1\left(y-\frac{1}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0\Leftrightarrow 2x+y-3=0$

$\Rightarrow GA\cap BC=H$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y-3=0\\x-2y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}\Rightarrow H(2;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GH}$ với $A(x;y)$

$$\overrightarrow{AG}=\left(\frac{4}{3}-x;\frac{1}{3}-y\right);\overrightarrow{GH}=\left(2-\frac{4}{3};-1-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\\frac{1}{3}-y=-\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow A(0;3)$$

Ta có: $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Rightarrow C(4;0)$

Vậy tọa độ các đỉnh cần tìm là $A(0;3),C(4;0),B(0;-2)$

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $AB=\sqrt{}$ C(–1;–1), đường thẳng AB có phương trình $x+2y-3=0$ và trọng tâm t giác ABC thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh A và B.

Giải:

Gọi trung điểm I của AB có tọa độ $I(a;b)$

Ta có $a+2b-3=0$ (1)

$$3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow\begin{cases}3(x_G+1)=2(a+1)\\3(y_G+1)=2(b+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{2a-1}{3}\\y_G=\dfrac{2b-1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow G\left(\frac{2a-1}{3};\frac{2b-1}{3}\right)$$

Điểm $G\in x+y-2=0\Leftrightarrow\frac{2a-1}{3}+\frac{2b-1}{3}-2=0\Leftrightarrow a+b-4=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=-1\end{cases}\Rightarrow I(5;-1)$

A, B thuộc đường tròn (C) tâm I bán kính $\frac{\sqrt{5}}{2}$ nên (C) có phương trình:

$(C):(x-5)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$

Tọa độ A và B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+2y-3=0\\(x-5)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\(-2-2y)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\(y+1)^2=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4;y=-\frac{1}{2}\\x=6;y=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy $A\left(4;-\frac{1}{2}\right);B\left(6;-\frac{3}{2}\right)$ hoặc $A\left(6;-\frac{3}{2}\right);B\left(4;-\frac{1}{2}\right)$

Thí dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G(–2,0), biết phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là $4x+y+14=0$; $2x+5y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Giải:

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x+y+14=0\\2x+5y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}\Rightarrow A(-4;2)$

Vì G(–2, 0) là trọng tâm của ΔABC nên

$\begin{cases}3x_G=x_A+x_B+x_C\\3y_G=y_A+y_B+y_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B+x_C=-2\\y_B+y_C=-2\end{cases}$ (1)

Vì $B(x_B,y_B)\in AB\Rightarrow y_B=-4x_B-14$ (2)

Điểm $C(x_C,y_C)\in AC\Rightarrow y_C=-\frac{2x_C}{5}+\frac{2}{5}$ (3)

Thế (2) và (3) vào (1) ta có

$$\begin{cases}x_B+x_C=-2\\-4x_B-14-\frac{2x_C}{5}+\frac{2}{5}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=-3\Rightarrow y_B=-2\\x_C=1\Rightarrow y_C=0\end{cases}$$

Vậy $A(-4,2),B(-3,-2),C(1,0)$

dụ 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

Giải:

Gọi M là trung điểm của AC, ta có $\overline{BM} = \frac{3}{2}\overline{BG} \Leftrightarrow M\left(\frac{7}{2};1\right)$

Gọi N là điểm đối xứng của B qua phân giác trong Δ của góc A và H là g
điểm của Δ với đường thẳng BN.

Đường thẳng BN có phương trình : $x + y + 3 = 0$

Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-1;-2)$

H là trung điểm của BN $\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2x_H - x_B = 2 \\ y_N = 2y_H - y_B = -5 \end{cases} \Rightarrow N(2;-5)$

Đường thẳng AC qua 2 điểm M, N nên có phương trình: $4x - y - 13 = 0$

Điểm A là giao điểm của đường thẳng Δ và đường thẳng AC nên tọa độ A
nghiệm của hệ : $\begin{cases} 4x - y - 13 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;3)$

Điểm M là trung điểm của AC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_M - x_A = 3 \\ y_C = 2y_M - y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow C(3;-1)$

Dạng 3: Bài toán liên quan tới các hình

Phương pháp chung: Để làm tốt các bài toán liên quan tới tam giác chúng ta phải:

Nhớ được định nghĩa, tính chất của các hình như hình bình hành, hình tha
hình thang cân, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông

Nhớ tính chất các đường chéo của các hình, tâm đối xứng, trục đối xứng

Nhớ công thức tính diện tích các hình

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: **(ĐH – A 2012)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuô
ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN
2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 =$
Tìm tọa độ điểm A.

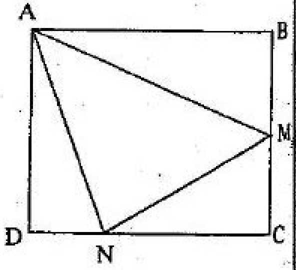
Giải:

Cách 1:

Gọi cạnh hình vuông là a tức là

AB = BC = CD = DA = a

Trong tam giác vuông ADN



Ta có : $\begin{cases} AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} \\ DN = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}a \end{cases}$

$\Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$

Trong tam giác vuông ABM

Ta có : $\begin{cases} AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} \\ BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tương tự trong tam giác vuông CMN ta tính được $MN = \frac{5a}{6}$

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác MAN ta có

$$\cos A = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MAN} = 45^\circ$$

Phương trình đường thẳng AM : $ax + by - \frac{11}{2}a - \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow \overline{n_{AM}} = (a;b)$

$$\cos\widehat{MAN} = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5(a^2 + b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \quad (\text{với } t = \frac{a}{b})$$

Với $t = 3 \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;5)$

Với $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;-1)$

Vậy có hai điểm A thỏa mãn là $A(4;5)$ hoặc $A(1;-1)$

ú ý: Để tính góc $\widehat{MAN} = 45^\circ$ ta còn có thể làm như sau

hận xét:

$$\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{NAM} \Rightarrow \tan\widehat{NAM} = \cot(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{1}{\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})}$$

$$= \frac{1 - \tan\widehat{BAM}.\tan\widehat{DAN}}{\tan\widehat{BAM} + \tan\widehat{DAN}} = \frac{1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{NAM} = 45^0$$

Với $\tan\widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}; \tan\widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$

ặc: $\tan\widehat{MAN} = \tan(\widehat{DAM} - \widehat{DAN}) = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2.\frac{1}{3}} = 1$

ch 2:

Sau khi tính được $\widehat{MAN} = 45^\circ$

Giả sử điểm $A(a;2a-3) \in AN$

$$d(M,AN)=\frac{\left|11-\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{15}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Trong tam giác vuông AHM ta có $MA=\dfrac{MH}{\sin 45^0}=MH\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

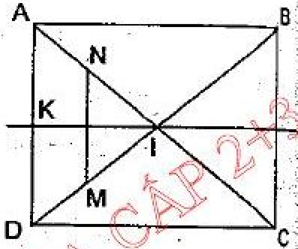
$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{11}{2}\right)^2+\left(2a-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{45}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5a^2-25a+20=0\Leftrightarrow a^2-5a+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(1;-1)\\A(4;5).\end{array}\right.$$

***Thí dụ 2:* (ĐH – D 2012)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nh ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh c hình chữ nhật ABCD.

Giải:

Cách 1:



Nhận xét: $M\notin AC, M\notin AD$

AC cắt AD tại A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+3y=0\\x-y+4=0\end{cases}\Rightarrow A(-3;1)$$

Vẽ MN // AD ($N\in AC$)

Đường thẳng MN đi qua M và song song với AN có phương trình là $MN: 3x-3y+4=0$

Trung điểm của MN : $K\left(-\frac{4}{6};\frac{4}{6}\right)$

Vẽ $KE\perp AD$ ($E\in AD$) $\Rightarrow KE:\left(x+\frac{4}{6}\right)+\left(y-\frac{4}{6}\right)=0\Rightarrow E(-2;2)$

E là trung điểm AD $\Rightarrow D(-1;3)$. Giao điểm của AC và EK : $I(0;0)$

I là trung điểm BD $\Rightarrow B(1;-3)$. I là trung điểm AC $\Rightarrow C(3;-1)$

Cách 2:

Đường thẳng BD đi qua điểm M và có vtpt $\vec{n}=(a;b)$ có phương trình là

$$a\left(x+\frac{1}{3}\right)+b(y-1)=0\Leftrightarrow 3ax+3by+a-3b=0$$

Do

$$\widehat{DAC}=\widehat{BDA}\Leftrightarrow\cos\widehat{DAC}=\cos\widehat{BDA}\Leftrightarrow\frac{|1.1+3.(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-3b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}.\sqrt{(3a)^2-(3b)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-10ab+3b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3b\\b=3a\end{array}\right.$$

Đến đây chia làm hai trường hợp tìm được đường thẳng BD, ta sẽ tìm được tọa độ điểm $D=AD\cap BD$ và tìm tọa độ điểm C.

Loại trường hợp $b=3a$ vì $BD: x+3y-8=0 // AC$

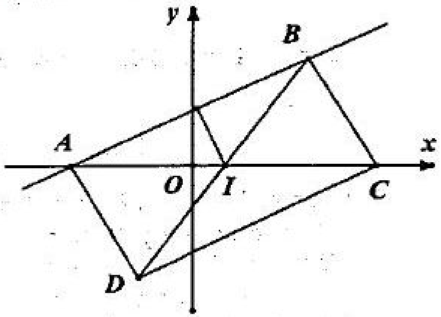
***dụ 3:* (ĐH – B 2002)** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng A có hoành độ âm

Giải:

$$d(I,AB)=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow AD=\sqrt{5}\Rightarrow AB=2\sqrt{5}\Rightarrow BD=5.$$

Phương trình đường tròn đường kính BD:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$$



Tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}\\x-2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(-2;0), B(2;2)$

vì $x_A<0$

$\Rightarrow C(3;0), D(-1;-2)$

Vậy bốn đỉnh của hình chữ nhật là $A(-2;0)$, $B(2;2)$, $C(3;0)$, $D(-1;-2)$

ách 2:

Phương trình đường thẳng qua I vuông góc với AB là $d: 2x+y-1=0$

Tọa độ giao điểm M của d và AB là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\x-2y+2=0\end{cases}\Rightarrow M(0;1)\Rightarrow MI=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow AD=2MI=\sqrt{5}=AM$$

Gọi $A(a;b)$ với $a<0$ ta có: $AM=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{5}$

Do A thuộc AB nên $a-2b+2=0\Rightarrow a=2(b-1)$

$$5(b-1)^2=5\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\Rightarrow a=-2\\b=2\Rightarrow a=2\ (\text{loại})\end{array}\right.\Rightarrow A(-2;2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B(2;2)\\C(3;0)\\D(-1;-2)\end{cases}$$

Chú ý:

Có thể tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của I trên đường thẳng AB, sau đó A, B là giao điểm của đường tròn tâm H bán kính HA với đường thẳng AB.

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phư trình cạnh AB: $x-2y-1=0$, đường chéo BD: $x-7y+14=0$ và đư chéo AC đi qua điểm $E(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Giải:

Cách 1:

Điểm $B=AB\cap BD\Rightarrow$ toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x-2y-1=0\\x-7y+14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}\Rightarrow B=(7;\ 3)$$

Giả sử: $A=(2a+1;\ a)\in AB: 2-2y-1=0;\ D=(7d-14;\ d)\in BD: x-7y+14$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(6-2a;\ 3-a),\ \overrightarrow{BD}=(7d-21;\ d-3);\ \overrightarrow{AD}=(7d-2a-15;\ d-a)$

Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow(3-a)(15d-5a-30)=0\Leftrightarrow a=3$ (không th hoặc $3d-a-6=0$

$\Rightarrow a=3d-6\Rightarrow\overrightarrow{AD}=(d-3;6-2d)$. Hơn nữa: $\overrightarrow{BC}=(x_C-7;\ y_C-3)$

ABCD là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\begin{cases}d-3=x_C-7\\6-2d=y_C-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=d+4\\y_C=9-2d\end{cases}\Rightarrow C=(d+4;\ 9-2d)$$

$\Rightarrow\overrightarrow{EA}=(6d-13;\ 3d-7),\ \overrightarrow{EC}=(d+2;\ 8-2d)$ và $d\neq3$

Lại có: $E(2;1)\in AC\Rightarrow\overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC}$ cùng phương

$\Leftrightarrow(6d-13)(8-2d)=(d+2)(3d-7)\Leftrightarrow d^2-5d+6=0$

$\Leftrightarrow d=2\Rightarrow a=0\Rightarrow A=(1;\ 0),\ B=(7;\ 3),\ C=(6;\ 5),\ D=(0;\ 0)$

Vậy, $A(1;0),B(7;3),C(6;5),D(0;0)$ là các đỉnh của hình chữ nhật cần tìm.

Cách 2:

Ta có $BD\cap AB=B(7;3)$, phương trình đường thẳng BC: $2x+y-17=0$

Điểm $A\in AB\Rightarrow A(2a+1;a), C\in BC\Rightarrow C(c;17-2c), a\neq3, c\neq7$,

$I\left(\dfrac{2a+c+1}{2};\dfrac{a-2c+17}{2}\right)$ là trung điểm của AC, BD.

Điểm $I\in BD\Leftrightarrow 3c-a-18=0\Leftrightarrow a=3c-18\Rightarrow A(6c-35;3c-18)$

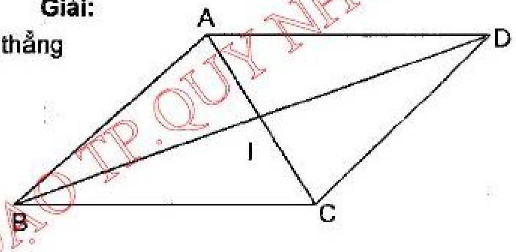
Ba điểm E, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}$ cùng phương

$$\Rightarrow c^2-13c+42=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&c=7\ (\text{loại})\\&c=6\end{aligned}\right.$$

Với $c=6\Rightarrow A(1;0), C(6;5), D(0;2), B(7;3)$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD biết phương trình của một đường chéo là: $3x+y-7=0$, điểm $B(0;-3)$, diện tích hình thoi bằng 20. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Giải:



Vì $B(0;-3)$ không thuộc đường thẳng $3x+y-7=0$ nên

phương trình AC:

$3x+y-7=0$, $B(0;-3)$

phương trình BD $x-3y-9=0$

Tọa độ $I=AC\cap BD\Rightarrow I(3;-2)$

Do I là trung điểm BD nên $D(6;-1)$

Gọi $A(a;7-3a)\in AC$ ta có $BD=2\sqrt{10}$

$$S_{ABCD}=2.S_{ABD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{|a-3(7-3a)-9|}{\sqrt{1^2+3^2}}.2\sqrt{10}=10$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=2\\&a=4\end{aligned}\right.\text{ do vậy }\left[\begin{aligned}&A_1(2;1);C_1(4;-5)\\&A_2(4;-5);C_2(2;1)\end{aligned}\right.$$

ch khác:

Sau khi tìm được tọa độ điểm D.

Ta có $A(a;7-3a)\in AC$, vì C đối xứng với A qua I nên $C(6-a;-11+3a)$

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AD.BD=10\Leftrightarrow$ một phương trình theo *a*, từ đó ta được tọa độ điểm A và C

dụ 6: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình bình hành ABCD với A(1;1) ; B(4;5) .Tâm I của hình bình hành thuộc đường thẳng d: $x+y+3=0$. Tìm toạ độ các đỉnh C, D biết rằng diện tích hình bình hành ABCD bằng 9 .

Giải:

Giả sử $C(a;b)\Rightarrow I\left(\dfrac{1+a}{2};\dfrac{1+b}{2}\right)$. Do $I\in d\Rightarrow a+b+8=0$ (1)

Phương trình đường thẳng AB $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{4}\Leftrightarrow 4x-3y-1=0$

Lại có $d(C;AB)=h=\dfrac{|4a-3b-1|}{5}$

Theo giả thiết

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}\frac{|4a-3b-1|}{5}.5=\frac{9}{2}\Leftrightarrow|4a-3b-1|=9\Leftrightarrow 4a-3b-1=\pm9\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases}a=-2\\b=-6\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-\dfrac{32}{7}\\b=-\dfrac{24}{7}\end{cases}$

Do đó $\left[\begin{array}{l} C_1=(-2;-6)\Rightarrow D_1(-5;-10) \\ C_2\left(\frac{-32}{7};\frac{-24}{7}\right)\Rightarrow D_2\left(-\frac{53}{7};-\frac{52}{7}\right)\end{array}\right.$

Thí dụ 7: Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có đáy lớn là CD, đư thẳng AD có phương trình $3x-y=0$, đường thẳng BD có phương t $x-2y=0$, góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB bằng 45^0. Viết phương t đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành dương.

Giải:

Tọa độ điểm D là: $\begin{cases}3x-y=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow D(0;0)\equiv O$

Vecto pháp tuyến của đường thẳng AD và BD lần lượt là

$\overline{n_1}=(3;-1),\ \overline{n_2}=(1;-2)$

$\Rightarrow\ \cos\widehat{ADB}=\frac{1}{\sqrt2}\ \Rightarrow\ \widehat{ADB}=45^0\Rightarrow AD=AB\ (1)$

Vì góc giữa đường thẳng BC và AB bằng $45^0\Rightarrow\ \widehat{BCD}=45^0\Rightarrow\Delta BCD$ vu cân tại B $\Rightarrow$ DC = 2AB. Theo bài ra ta có:

$$S_{ABCD}=\frac12(AB+CD)AD=\frac{3.AB^2}{2}=24\Rightarrow AB=4\Rightarrow BD=4\sqrt2$$

Gọi tọa độ điểm $B\left(x_B;\frac{x_B}{2}\right)$, điều kiện $x_B>0$

$$\Rightarrow\left|\overline{BD}\right|=\sqrt{x_B^2+\left(\frac{x_B}{2}\right)^2}=4\sqrt2\Leftrightarrow x_B=\frac{8\sqrt{10}}{5}$$

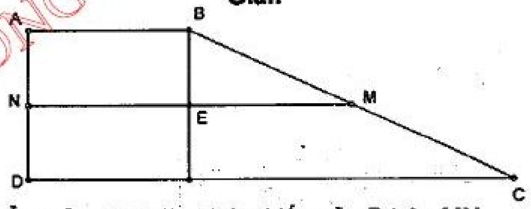
hoặc $x_B=-\frac{8\sqrt{10}}{5}\Rightarrow B\left(\frac{8\sqrt{10}}{5};\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Vecto pháp tuyến của BC là $\overline{n_{BC}}=(2;1)$

Vậy phương trình đường thẳng BC là: $2x+y-4\sqrt{10}=0$

Thí dụ 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ABCD là hình thang vuông tại A v có BC = 2AB = 2AD. Trung điểm của BC là điểm M(1; 0), đường thẳng AD phương trình $x-\sqrt3y+3=0$. Tìm tọa độ điểm A biết DC > AB.

Giải:



Gọi N là trung điểm của AD, E là hình chiếu của B trên MN.

Theo giả thiết $AB=AD=BM=a, BE=\frac a2\Rightarrow EM=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt3}{2}$

Do $AB<CD$ và $MN=2$ nên $NE+EM=2\Leftrightarrow a+\frac{a\sqrt3}{2}=2\Leftrightarrow a=8-4\sqrt3$

$A\in x-\sqrt3y+3=0\Rightarrow A(\sqrt3m-3;m)$. MN: $\sqrt3x+y-\sqrt3=0$

$$\Rightarrow d(A;MN)=\frac{\left|\sqrt3(\sqrt3m-3)+m-\sqrt3\right|}{2}=2\left|m-\sqrt3\right|$$

$$\Rightarrow d(A;MN)=4-2\sqrt3\Leftrightarrow2\left|m-\sqrt3\right|=4-2\sqrt3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=2\sqrt3-2\end{array}\right.$$

Với $m=2\Rightarrow A\left(2\sqrt3-3;2\right)$

Với $m=2\sqrt3-2\Rightarrow A\left(3-2\sqrt3;2\sqrt3-2\right)$

ạng 4: Bài toán tìm điểm thuộc đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước

hương pháp: Để tìm được tọa độ của điểm ta làm như sau

Nếu đường thẳng cho ở dạng tham số (chính tắc chuyển về tham số) có dạng

$\Delta\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$

Giả sử điểm $M(x;y)\in\Delta\Leftrightarrow M(x_0+at;y_0+bt)$. Từ điều kiện cho trước dẫn tới một phương trình theo tham số t, giải phương trình này tìm t từ đó tìm được điểm M

Nếu đường thẳng cho ở dạng tổng quát $\Delta: Ax+By+C=0$

Giả sử điểm $M(x_M;y_M)\in\Delta\Leftrightarrow Ax_M+By_M+C=0$ (1). Từ điều kiện cho trước ta được phương trình (2)

Từ (1) và (2) giải ra ta được tọa độ điểm M

ú ý: Thường sử dụng phương trình tham số cho dễ tính toán vì có một ẩn t, đương nhiên nếu cho dạng tổng quát thì vẫn chuyển được về tham số và ngược lại

DỤ MINH HỌA

dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-6y-12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x-y+3=0$ sao cho MI = 2R, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C).

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$, $R=5$.

Giả sử $M(x_M,y_M)\in(d)\Leftrightarrow2x_M-y_M+3=0\Leftrightarrow y_M=2x_M+3$

Theo giả thiết $IM = \sqrt{(x_M - 2)^2 + (y_M - 3)^2} = 10$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_M - 2)^2 + (2x_M + 3 - 3)^2} = 10 \Leftrightarrow 5x_M^2 - 4x_M - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = -4 \Rightarrow y_M = -5 \Rightarrow M(-4,-5) \\ x_M = \dfrac{24}{5} \Rightarrow y_M = \dfrac{63}{5} \Rightarrow M\left(\dfrac{24}{5},\dfrac{63}{5}\right) \end{array}\right.$$

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(2; 1), lấy điểm B thuộc trục Ox hoành độ $x \ge 0$ và điểm C thuộc trục Oy có tung độ $y \ge 0$ sao cho ΔABC vuô tại A. Tìm B, C sao cho diện tích ΔABC lớn nhất.

Giải:

Ta có $A(2;1), B(b;0), C(0;c)$ với $b,\ c \ge 0$

Ta có ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{AC} = 0$ với $\overline{AB} = (b-2,-1)$, $\overline{AC} = (-2, c-1)$;

Do ΔABC vuông tại A

$\Rightarrow \overline{AB}.\overline{AC} = -2(b-2) - (c-1) = 0 \Leftrightarrow c - 1 = -2(b-2)$

$\Rightarrow c = -2b + 5 \ge 0 \Rightarrow 0 \le b \le \dfrac{5}{2}$

Ta lại có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{(b-1)^2 + 1}\sqrt{4 + (c-1)^2}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2 + 1}\sqrt{4 + 4(b-2)^2} = (b-2)^2 + 1$ vì $0 \le b \le \dfrac{5}{2}$ nên

$S_{ABC} = (b-2)^2 + 1$ lớn nhất $\Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow c = 5$.

Vậy các điểm cần tìm là $B(0,0)$ và $C(0,5)$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho 4 điể $A(1;0), B(-2;4), C(-1;4), D(3;5)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳ $\Delta: 3x - y - 5 = 0$ sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Giải:

Viết phương trình đường AB: $4x + 3y - 4 = 0$ và $AB = 5$

Viết phương trình đường CD: $x - 4y + 17 = 0$ và $CD = \sqrt{17}$

Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3t - 5 \end{cases}$. $M \in \Delta \Rightarrow M(t;\ 3t - 5)$

Theo giả thiết $S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow d(M,AB).AB = d(M,CD).CD$

$\Leftrightarrow t = -9 \vee t = \dfrac{7}{3} \Rightarrow M(-9;-32),\ M\left(\dfrac{7}{3};2\right)$

Vậy có hai điểm cần tìm là $M(-9;-32) \vee M\left(\dfrac{7}{3};2\right)$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$. Xác định các điểm B và C biết diện tích tam giác ABC bằng 18

Giải:

Cách 1:

Gọi H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng Δ, suy ra H là trung điểm của BC: $AH = d(A,\Delta) = \dfrac{|-1-4-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$

Diện tích ΔABC là $S = \dfrac{1}{2}AH.BC = 18 \Leftrightarrow BC = \dfrac{36}{AH} = \dfrac{36}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2}$

Đường thẳng AH đi qua A và vuông góc với đường thẳng Δ có phương trình là

$1(x+1) + 1(y-4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$

Tọa độ $H = AH \cap \Delta$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Giả sử $B(m;m-4) \in \Delta$, vì tam giác ΔABC cân tại A nên

$$\Rightarrow HB^2 = \frac{BC^2}{4} = 8 = \left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(m - 4 + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{7}{2} + 2 = \dfrac{11}{2} \\ m = \dfrac{7}{2} - 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $B_1\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $C_1\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ hoặc $B_2\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ và $C_2\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Hoặc $B(m;m-4) \in \Delta$ vì C đối xứng với H qua B nên $C(7-m;3-m)$

$$\text{Từ } BC = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow (7-2m)^2 + (7-2m)^2 = 32 \Leftrightarrow 7 - 2m = \pm 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{11}{2} \\ m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Cách 2:

Gọi H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng Δ, suy ra H là trung điểm của BC

$AH = d(A,\Delta) = \dfrac{|-1-4-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}}$

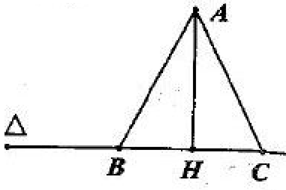
Diện tích ΔABC là $S = \dfrac{1}{2}AH.BC = 18 \Leftrightarrow BC = \dfrac{36}{AH} = \dfrac{36}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2}$

$AB = AC = \sqrt{AH^2 + \dfrac{BC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{97}{2}}$

Đường tròn tâm A bán kính $R = AB = AC$ đi qua B và C

Có phương trình $(C):(x+1)^2+(y-4)^2=\frac{97}{2}$

Tọa độ B và C là giao điểm của (C) và Δ là nghiệm của hệ



$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-4)^2=\frac{97}{2}\\ x-y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11}{2}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

Cách 3:

Khoảng cách từ A đến $BC=\frac{|-1-4-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$

Giả sử $\begin{cases}B(x_B;x_B-4)\\ C(x_C;x_C-4)\end{cases}\in\Delta\Rightarrow BC^2=(x_B-x_C)^2+(x_B-x_C)^2\Rightarrow BC=\sqrt{2}|x_B-x_C|$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{9}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}|x_B-x_C|}{2}=18\Rightarrow|x_B-x_C|=4$

Mặt khác ΔABC cân tại A

$\Rightarrow AB=AC\Rightarrow AB^2=AC^2\Leftrightarrow(x_B+1)^2+(x_B-8)^2=(x_C+1)^2+(x_C-8)^2$

Ta có hệ

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_B+1)^2+(x_B-8)^2=(x_C+1)^2+(x_C-8)^2\\ |x_B-x_C|=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_B=\frac{11}{2}\Rightarrow y_B=\frac{3}{2}\\ x_C=\frac{3}{2}\Rightarrow y_C=\frac{-5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x_C=\frac{11}{2}\Rightarrow y_C=\frac{3}{2}\\ x_B=\frac{3}{2}\Rightarrow y_B=\frac{-5}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm thoả mãn

$B_1\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $C_1\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ hoặc $B_2\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ và $C_2\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm A(2;2) và các đường thẳng $d_1: x+y-2=0; d_2: x+y-8=0$. Tìm các điểm B và C lần lượt thuộc d và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A

Giải:

Vì $B\in d_1$, $C\in d_2$ nên B (b;2 – b), C(c;8 – c). Từ giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\ AB=AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc-4b-c+2=0\\ b^2-2b=c^2-8c+18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-1)(c-4)=2\\ (b-1)^2-(c-4)^2=3\end{cases}$$

Đặt $x=b-1$; $y=c-4$. Giải hệ ta có: $x=-2$, $y=-1$ hoặc $x=2$, $y=1$.

$\Rightarrow B(-1;3), C(3;5)$ hoặc $B(3;-1), C(5;3)$

---

dụ 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, biết $\widehat{BAC}=120^0$, $M(1;2)$ là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng BC có phương trình: $x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm A biết điểm C có hoành độ dương.

Giải:

Gọi H là hình chiếu của M lên BC; ta có : $MH=d(M;BC)=\frac{|1-2+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Vì ΔABC cân tại A và $\hat{BAC}=120^0\Rightarrow\hat{HMC}=60^0$. Ta có : $\cos\hat{HMC}=\frac{MH}{MC}$

$\Leftrightarrow\cos 60^0=\frac{\sqrt{2}}{MC}\Leftrightarrow MC=2\sqrt{2}$, do $C\in BC: x-y+3=0\Rightarrow C(a;a+3)$ với $a>0$

Vì $MC=2\sqrt{2}\Leftrightarrow MC^2=8\Leftrightarrow(a-1)^2+(a+1)^2=8\Leftrightarrow a^2=3\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$

$\Rightarrow C(\sqrt{3};3+\sqrt{3})$.

dụ 7: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

Giải:

ch 1:

Nối dài AH cắt đường tròn (C) tâm I tại điểm H'

$\Rightarrow$ BC đi qua trung điểm HH'. Phương trình AH : $x=3$

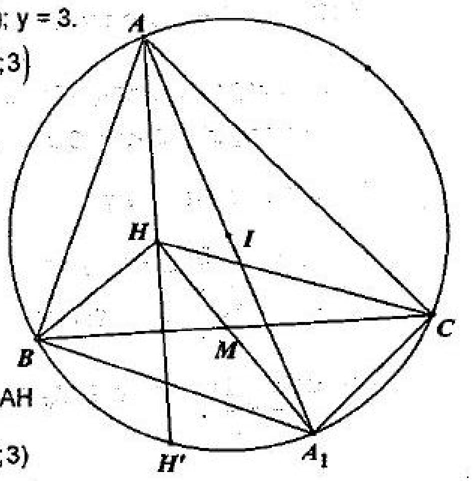
Đường tròn (C) có phương trình: $(x+2)^2+y^2=74$

H' là giao điểm của AH và đường tròn (C) $\Rightarrow$ H' (3; 7)

Đường thẳng BC có phương trình: $y=3$ cắt đường tròn (C) tại điểm C có hoành độ là nghiệm phương trình : $(x+2)^2+3^2=74$

$\Rightarrow x=\sqrt{65}-2$ (lấy hoành độ dương); $y=3$.

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $C\left(\sqrt{65}-2;3\right)$



h 2:

Gọi (C) là đường tròn tâm I(–2;0),

bán kính $R=IA=\sqrt{74}$

Phương trình đường tròn (C) :

$(x+2)^2+y^2=74$

Gọi AA_1 là đường kính

$\Rightarrow BHCA_1$ là hình bình hành

$\Rightarrow HA_1$ qua M trung điểm BC

Ta có IM là đường trung bình của ΔA_1AH

Nên : $\overline{IM}=\frac{1}{2}\overline{AH}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=-2\\ y_M=3\end{cases}\Leftrightarrow M(-2;3)$

Phương trình BC qua M và vuông góc AH : $y-3=0$

Toạ độ C thoả hệ phương trình : $\begin{cases}(x+2)^2+y^2=74\\ y-3=0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+\sqrt{65}\\ y=3\end{cases}$.

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $C\left(\sqrt{65}-2;3\right)$

Thí dụ 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta : x-y-4=0$ và $2x-y-2=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho đường th ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn OM.ON = 8.

Giải:

Cách 1:

Phương trình ON có dạng $\begin{cases}x=at\\ y=bt\end{cases}$ $(a^2+b^2\neq 0)$, $N(at_1;\ bt_1)$ và $M(at_2;\ bt_2)$

Điểm $N = ON \cap \Delta : at_1-bt_1-4=0 \Leftrightarrow t_1=\dfrac{4}{a-b}$ $(a\neq b)$

Điểm $M = ON \cap d : 2at_2-bt_2-2=0 \Leftrightarrow t_2=\dfrac{2}{2a-b}$ $(2a\neq b)$

Suy ra : $N\left(\dfrac{4a}{a-b};\dfrac{4b}{a-b}\right)$, $M\left(\dfrac{2a}{2a-b};\dfrac{2b}{2a-b}\right)$

Ta có: $OM.ON=8 \Leftrightarrow \dfrac{4}{|a-b|}\sqrt{a^2+b^2}\,\dfrac{2}{|2a-b|}\sqrt{a^2+b^2}=8$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=|a-b||2a-b|$

TH1: $a=0$ ta có : $b^2=b^2$, chọn $b=1 \Rightarrow N(0;-4), M(0;-2)$

TH2: $a\neq 0$, chọn $a=1$ ta được: $1+b^2=|(1-b)(2-b)| \Leftrightarrow 1+b^2=|b^2-3b+2|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b^2-3b+2=1+b^2\\ b^2-3b+2=-1-b^2\end{array}\right. \Leftrightarrow b=\dfrac{1}{3}$

Vậy hai điểm cần tìm là $M(6;2)$; $N\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

Cách 2: Điểm $N\in d \Rightarrow N(n;\ 2n-2) \Rightarrow \overline{ON}=(n;2n-2)$

Điểm $M\in\Delta \Rightarrow M(m;\ m-4) \Rightarrow \overline{OM}=(m;m-4)$

Nhận xét : 2 đường thẳng d và Δ nằm cùng phía đối với điểm O nên OM.ON = 8

$\Leftrightarrow \overline{OM}\,\overline{ON}=8 \Leftrightarrow m=5n$ (1)

Ta có $\overline{OM}$ cùng phương với $\overline{ON} \Leftrightarrow m.n+4n-2m=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5n^2-6n=0 \Leftrightarrow n=0$ hay $n=\dfrac{6}{5}$

Với $n=0$ thì $m=0$, ta có điểm $M(0;-4); N(0;-2)$

Với $n=\dfrac{6}{5}$ thì $m=6$, ta có điểm $M(6;2)$; $N\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{2}{5}\right)$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho điểm $M(1;1)$ và hai đường thẳng $d_1 : 3x-y-5=0$, $d_2 : x+y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và cắt d_1, d_2 tương ứng tại A, B sao cho $2MA-3MB=0$

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 : x-y-2=0$; $d_2 : 2x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O cắt d_1, d_2 lần lượt tại A , B sao cho OA.OB = 10 .

Bài 3: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng $\Delta : 3x-5y+2=0$ và hai điểm *A*(-1; 2), *B*(4; -3). Viết phương trình đường thẳng Δ_1 vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời khoảng cách từ *B* đến đường thẳng Δ_1 bằng ba lần khoảng cách từ *A* đến đường thẳng Δ_1 .

Bài 4: Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hai đường thẳng d_1: $3x+y+5=0$, d_2: $3x+y+1=0$ và điểm $I(1;-2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua *I* và cắt d_1, d_2 lần lượt tại *A* và *B* sao cho $AB=2\sqrt{2}$.

Bài 5: Trong mặt phẳng *Oxy*, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của cạnh BC, phương trình đường thẳng DM: $x-y-2=0$ và $C(3;-3)$. Biết đỉnh A thuộc đường thẳng $d : 3x+y-2=0$, xác định toạ độ các đỉnh A, B, D.

Bài 6: Trong hệ toạ độ vuông góc Oxy của mặt phẳng, hãy xác định toạ độ các đỉnh của tam giác nhọn ABC biết chân đường cao lần lượt hạ từ đỉnh A, B, C là $H_1(4;-1)$, $H_2(1;5)$, $H_3(-4;-5)$

Bài 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình 2 cạnh AB, AC lần lượt là: $x+2y-2=0$ và $2x+y+1=0$, điểm M(1;2) thuộc đoạn BC. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overline{DB}.\overline{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng AB, BD lần lượt là: $x-2y+1=0$ và $x-7y+14=0$, đường thẳng AC đi qua M(2;1). Tìm toạ độ điểm N thuộc BD sao cho NA + NC nhỏ nhất.

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$, hai điểm A,B lần lượt nằm trên đường thẳng $x+y-3=0$ và đường thẳng $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Bài 10: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường cao BH có phương trình $3x+4y+10=0$, đường phân giác trong góc A là AD có phương trình là $x-y+1=0$, điểm M(0;2) thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng AB,AC lần lượt là $2x+y-3=0$ và $x+2y-3=0$, đường thẳng BC đi qua điểm $I(0;-1)$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh A, B, C.

Bài 12: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD v tại A và D, điểm A, B thuộc trục Ox, đường thẳng BC có ph trình $x + y - 5 = 0$, độ dài đoạn thẳng AD = 2. Tìm tọa độ các đỉnh của thang biết diện tích hình thang bằng 12 và tung độ các điểm C, D dương.

Bài 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm AB là $M(-1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(2;-1)$. Đường cao tam giác kẻ từ A có phương trình: $2x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(-12;1)$, đường p giác trong góc A có phương trình: $x + 2y - 5 = 0$. Trọng tâm tam giác AB $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Bài 15: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường thẳng Δ sao cho Δ tạo hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{15}{2}$ và chu vi bằng 15.

Bài 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông OABC có đỉnh A(3;4 điểm B có hoành độ âm.

a. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của hình vuông OABC.

b. Gọi E và F theo thứ tự là các giao điểm của đường tròn (C) ngoại tiếp O với trục hoành và trục tung (E và F khác gốc tọa độ O). Tìm tọa độ điểm M (C) sao cho tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

Bài 17: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

a. Cho A(1;2) và B(4;3). Tìm $M \in Ox$ sao cho $\widehat{AMB} = 45^0$.

b. Cho hình vuông ABCD, có cạnh AB nằm trên đường thẳng d: $x - y + 8 = 0$ đỉnh C, D nằm trên parabol $y = x^2$. Viết phương trình tổng quát của CD.

Bài 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;4), B(3$ $C\left(-\frac{7}{3};0\right)$, và điểm $M(1;0)$ trên cạnh BC. Hãy xác định tọa độ điểm N trên và điểm P trên AC sao cho chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Bài 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(1;1) và điểm B(3;2). Tìm điểm trên trục Ox sao cho:

a. Tam giác ABC vuông tại A. Tính độ dài đường cao AH khi đó

b. Chu vi của tam giác ABC đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy

1. Cho tam giác ABC cân tại C cạnh $AB: 2x - 3y + 11 = 0$, ca $AC: x + 5y - 14 = 0$. Cạnh BC đi qua điểm $M(3;-3)$. Hãy viết phương tr cạnh BC.

2. Cho ba điểm $A(-1;-2), B(4;-1), C(3;2)$ và đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0$. T M thuộc d sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các điểm $A(1;3)$, $B(-5;-3)$. Xác định tọa độ điểm M trên đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$ sao cho $\left|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

22: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho điểm A(3;4) và hai điểm B, C lần lượt thuộc hai tia Ox và Oy sao cho A, B, C thẳng hàng. Xác định toạ độ điểm B và C sao cho diện tích tam giác OBC nhỏ nhất.

23: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-2;3)$. Đường cao CH nằm trên đường thẳng: $2x + y - 7 = 0$ và đường trung tuyến BM nằm trên đường thẳng: $2x - y + 1 = 0$.

Viết phương trình các cạnh và tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Tìm vị trí của điểm H trên trục Ox sao cho $\left|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right|$ nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó?

24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là điểm $I(4;0)$ và phương trình hai đường thẳng lần lượt chứa đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác là $d_1: x + y - 2 = 0$ và $d_2: x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa cạnh của tam giác ABC.

25: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết đường cao hạ từ đỉnh A có phương trình $x - y = 0$, điểm $I\left(\frac{9}{4};\frac{9}{4}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp và khoảng cách từ I đến đường thẳng BC bằng $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, đường thẳng đi qua đỉnh B có phương trình $x + 5y - 14 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết tung độ của A và B đều không lớn hơn 2

26: Trong hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC, biết phương trình cạnh: $(BC): x - y + 1 = 0$. Hai đường phân giác trong của góc B vàC lần lượt có phương trình $d_1: 2x + y - 1 = 0; d_2: x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình cạnh AB của tam giác ABC.

27: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc (Oxy) cho tam giác ABC và đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: x - 3y - 1 = 0$. Giả sử $D(4;2), E(1;1), N(3;3)$ theo thứ tự là chân đường cao kẻ từ A, chân đường cao kẻ từ B và trung điểm cạnh AB. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng Δ và điểm M có hoành độ lớn hơn 2.

28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(1; 1); B(−2; −4); C(5; −1) và đường thẳng $\Delta: 2x - 3y + 12 = 0$. Tìm điểm $M \in \Delta$ sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 29: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A, BC nằm trên đường thẳng có phương trình $x+2y-2=0$. Đường cao kẻ có phương trình $x-y+4=0$, điểm $M(-1;0)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉ Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 30: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho tam giác ABC, phân giác AD có phương trình $x+y-2=0$, đường cao CH có phương $x-2y+5=0$. Điểm $M(3;0)$ thuộc cạnh AC thoả mãn $AB=2AM$. Xác toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài 31: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC* có phương đường thẳng $AB: 2x+y-1=0$, phương trình đường thẳng $AC: 3x+4y+$ và điểm $M(1;-3)$ nằm trên đường thẳng *BC* thỏa mãn $3MB=2MC$. Tìm độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

Bài 32: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: x-3y-$ và điểm $N(3;4)$. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc đường thẳng d sao cho tam *OMN* (*O* là gốc tọa độ) có diện tích bằng $\frac{15}{2}$.

Bài 33: Cho $(P): y^2=x$ và đường thẳng d: $x-y-2=0$ cắt (P) tại hai điểm B. Tìm điểm C thuộc cung AB sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất

Bài 34: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật *ABCD* có diện bằng 12. Tâm *I* là giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x-y-3=0$ và đư thẳng $d_2: x+y-6=0$. Trung điểm của cạnh AD là giao điểm của d_1 với hoành. Xác định tọa độ bốn đỉnh của hình chữ nhật.

Bài 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm M(0; 2), N(5; –3), P(–2; Q(2; –4) lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD. diện tích hình vuông đó.

Bài 36: Cho tam giác nhọn *ABC*, đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ đỉnh đường thẳng *BC* lần lượt có phương trình: $3x+5y-8=0$, $x-y-4=0$. Qu kẻ đường thẳng vuông góc với *BC* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng *AB*, *AC*, hoành độ điểm *B* không lớn hơn 3.

Bài 37: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện bằng 6, phương trình BD là $2x+y-12=0$, AB đi qua $M(5;1)$, BC đi $N(9;3)$. Viết phương trình các cạnh hình chữ nhật biết hoành độ của điể lớn hơn 5.

Bài 38: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD biết phương trình một đường chéo là: $3x+y-7=0$, điểm $B(0;-3)$. Tìm tọa độ các đỉnh cò của hình thoi biết diện tích hình thoi bằng 20.

Bài 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $3x-y=0$, đường th BD có phương trình $x-2y=0$, góc tạo bởi hai đường thẳng BC và AB b 45°. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

40: Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC biết $B(2;-1)$, đường cao và đường phân giác trong qua đỉnh A, C lần lượt là $3x-4y+27=0$ và $x+2y-5=0$

41: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , tìm điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: 2x-y+3=0$.

42: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(3;4), trọng tâm $G\left(\frac{11}{3};2\right)$, trực tâm H(3;3). Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác.

43: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, đường thẳng AB có phương trình $x+2y-3=0$ và trọng tâm của tam giác ABC thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.

44: Cho tam giác nhọn *ABC*. Đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ đỉnh *A* và đường thẳng *BC* lần lượt có phương trình là $3x+5y-8=0$, $x-y-4=0$. Đường thẳng qua *A* vuông góc với đường thẳng *BC* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại điểm thứ hai là $D(4;-2)$. Viết phương trình các đường thẳng *AB*, *AC*; biết rằng hoành độ của điểm *B* không lớn hơn 3.

45: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 6 và hai đỉnh $A(1;-2)$, $B(2;-3)$. Tìm tọa độ 2 đỉnh còn lại, biết giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành nằm trên trục Ox và có hoành độ dương.

46: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{15}{2}$, hai đỉnh $A(1;-2)$, $B(-2;2)$. Tìm tọa độ đỉnh C, biết trọng tâm tam giác thuộc đường thẳng: $x+y=0$ và có hoành độ dương.

47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 2x-y-1=0$; $d_2: x+2y+2=0$ và điểm $I(3;1)$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt d_1, d_2 lần lượt tại B, C sao cho $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

48: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 4, đường thẳng AB có phương trình: $x-y=0$, trung điểm đoạn thẳng BC là M(1;2). Tìm tọa độ trung điểm N của AC, biết N có hoành độ dương.

49: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đỉnh *A*(2;1), trực tâm *H*(14; –7), đường trung tuyến kẻ từ đỉnh *B* có phương trình: $9x-5y-7=0$. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C*.

Bài 50: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* cân tại đỉnh *A*, phư trình *AB*: $x + 2y - 4 = 0$, *BC*: $3x + y - 7 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh *A* và C rằng diện tích tam giác *ABC* bằng $\frac{5}{2}$ và điểm *A* có hoành độ dương.

Bài 51: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho tam giác ABC vuông tại A B và C đối xứng nhau qua gốc tọa độ *O*. Đường phân giác trong góc B tam giác *ABC* là đường thẳng $(d): x + 2y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của giác ABC, biết đường thẳng AC đi qua điểm $K(6;2)$

Bài 52: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đỉnh A(3 Phương trình đường trung trực cạnh *BC*, đường trung tuyến xuất phát từ C lượt là $x + y - 1 = 0$ và $3x - y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam *ABC*.

Bài 53: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có AB = AC, đỉnh A(6 đường thẳng Δ đi qủa trung điểm của các cạnh *AB* và *AC* có phương t

$\begin{cases} x = m \\ y = 4 - m \end{cases}(m \in R)$, điểm $P(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh *C* của giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C*.

Bài 54: Trong mp tọa độ Oxy, cho ΔABC có A(2;5), B(–4;0), C(5;–1). Viết phư trình đường thẳng đi qua A và chia ΔABC thành 2 phần có tỉ số diện tích 2.

Bài 55: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác *ABC* có đường phân trong kẻ từ *A*, đường trung tuyến kẻ từ *B* và đường cao kẻ từ *C* lần lượt phương trình: $x + y - 3 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ các của tam giác *ABC*.

Bài 56: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD có *A*(1; 0), *B*(3; 2 $\widehat{ABC} = 120^0$. Xác định tọa độ hai đỉnh C và D.

Bài 57: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật *ABCD* có diện tích 16, các đường thẳng *AB*, *BC*, *CD*, *DA* lần lượt đi qua các điểm *M*(4;5), *N*(6 *P*(5;2), *Q*(2;1). Viết phương trình đường thẳng *AB*.

Bài 58: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có tích S = 4, biết A(1;0), B(2;0) và giao điểm I của hai đường chéo AC và BD trên đường thẳng y = x. Tìm tọa độ các đỉnh C, D.

Bài 59: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* $AB = \sqrt{5}$, C(–1;–1), đường thẳng AB có phương trình là $x + 2y - 3 = 0$ trọng tâm *G* của tam giác ABC thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$. Tìm độ các đỉnh A và B.

Bài 60: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* $AC: x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh *B*, *D* lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y - 8$ $d_2: x - 2y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi biết rằng diện tích hình thoi bằng 75 và đỉnh *A* có hoành độ âm.

61: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 // d_2$ lần lượt phương trình là: $d_1: x - y + 2 = 0$; $d_2: x - y - 2 = 0$

ết phương trình đường thẳng d_3 đi qua điểm $A(-2;0)$ và vuông góc với d_2

ết phương trình đường thẳng d_4 sao cho d_1, d_2, d_3, d_4 cắt nhau tạo thành một hình vuông.

62: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng d_1: $x + 2y - 7 = 0$, d_2: $5x + y - 8 = 0$ và điểm G(2;1). Tìm tọa độ điểm B thuộc d_1 điểm C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm biết A là giao điểm của d_1 và d_2

63: Trong mặt phẳng hệ toạ độ Oxy, cho ba đường d_1: $x - 2y + 1 = 0$; d_2: $3x - y - 2 = 0$; d_3: $2x + y + 1 = 0$. Tìm điểm M trên d_1, điểm N trên d_2 sao cho $MN = \sqrt{5}$ và MN song song với d_3

64: Trong mặt phẳng hệ toạ độ Oxy, viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết A(1;3) và hai trung tuyến có phương trình là: $d_1: x - 2y + 1 = 0$ và $d_2: y - 1 = 0$.

65: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC, biết phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là: $x + y + 3 = 0$; $2x - y - 2 = 0$. Biết trung điểm của cạnh BC là $M\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. Hãy viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

66: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $x + 3y + 1 = 0$ và $x - y + 1 = 0$. Biết $M(-1;2)$ là trung điểm AB. Tìm tọa độ điểm C.

67: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(1; 2), B(–5; –1), C(7; 0).

Viết phương trình cạnh AB và tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh C.

Tính góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC.

68: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC, có B(0;2); trung điểm I của đoạn thẳng AC nằm trên đường thẳng $x + y - 4 = 0$, và đường phân giác trong góc A có phương trình $x - 1 = 0$. Xác định tọa độ điểm C biết tam giác ABC có diện tích bằng 4.

69: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD đường thẳng AB có phương trình: $x - 2y + 1 = 0$, đường thẳng BD có phương trình: $x - 7y + 14 = 0$ đường thẳng AC đi qua M(2,1). Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

70: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD. Cạnh AB và đường chéo BD, theo thứ tự đó nằm trên các đường thẳng có phương trình: $d_1: x + 7y - 7 = 0$ và $d_2: x + 2y - 7 = 0$; một đỉnh có toạ độ là (0;1). Viết phương trình các cạnh còn lại.

71: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD, điểm $C(3;-3)$ và điểm A thuộc đường thẳng d: $3x + y - 2 = 0$. Gọi M là trung điểm của BC, đường thẳng DM phương trình: $x - y - 2 = 0$. Xác định tọa độ các điểm A, B, D.

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2-3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Bài 72: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác MNPQ $M(-1;-3), N\left(4;-\frac{4}{3}\right), P(4;1), Q(-3;1)$ và điểm $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D lần lượt nằm trên các đường thẳng MN, NP, PQ, QM sao cho ABCD hình bình hành nhận I làm tâm.

Bài 73: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $C(-2;3$ đường thẳng chứa cạnh CD đi qua điểm $M(2;1)$. Đường thẳng chứa BD phương trình: $2x + y - 11 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình nhật trên.

Bài 74: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành ABCD có $C(3;-1)$, đườn thẳng chứa BD và đường thẳng chứa đường phân giác của góc $\angle DAC$ lượt có phương trình là: $x - 2y - 1 = 0$ và $x - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉ còn lại của hình bình hành trên.

Bài 75: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có cạnh AC đi qu $M(0;-1)$. Biết AB = 2AM, đường phân giác trong AD và đường cao CH lần lư có phương trình là $x - y = 0$ và $2x + y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ta giác ABC.

Bài 76: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho điểm *A*(2;1). Lấy điểm *B* nằm tr trục hoành có hoành độ không âm sao cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Tìm tọ độ *B*, *C* để tam giác *ABC* có diện tích lớn nhất.

Bài 77: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* vuông ở *A*. Biế $A(-1;4), B(1;-4)$ và đường thẳng *BC* đi qua điểm $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$. Hãy tìm tọa đ đỉnh *C*.

Bài 78: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD*. Điể $M\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ là trung điểm của *AB*; Điểm *N* nằm trên đoạn *AC* sao cho AN = 3NC.

Tìm tọa độ điểm *A* biết phương trình đường thẳng *DN* là $2x - y = 9$.

Bài 79: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(−3; 1), B(1; 2), C(3;0)

a. Viết phương trình cạnh BC và tìm tọa độ chân đường cao hạ từ A của tam giá ABC

b. Viết phương trình đường thẳng qua A chia tam giác ABC thành hai tam giác biế rằng diện tích của tam giác đỉnh B gấp 3 lần diện tích tam giác đỉnh C.

Bài 80: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trọng tâm $G(0;3)$, trung điểm củ AB là $M(2;3)$, phương trình phân giác trong của A là $d: x + 2y - 7 = 0$. Tìm toạ độ của A, B, C.

Bài 81: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC* vuông cân tại A Biết *M*(3; −1) là trung điểm cạnh *BC*, $G\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác *ABC*. Tìm tọa độ các đỉnh *B*, *C*.

82: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có đường trung tuyến *BN* và đường cao *AH* lần lượt có phương trình: $3x + 5y + 1 = 0$ và $8x - y - 5 = 0$, và $M\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm cạnh *BC*. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác *ABC*.

83: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho điểm $C(2;-5)$, đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên đường thẳng Δ hai điểm *A* và *B* đối xứng nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ sao cho diện tích tam giác *ABC* bằng 15.

84: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 12, tâm I là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình: $x - y - 3 = 0$ và $x + y - 6 + 0$. Trung điểm M của cạnh AD là giao điểm của d_1 với trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

85: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$, $C(-1;-1)$, phương trình cạnh $AB: x - 2y - 3 = 0$, trọng tâm G thuộc đường thẳng: $x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.

86: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có $AD: 2x + y - 1 = 0$, điểm $I(-3;2)$ thuộc BD: $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{ID}$. Tìm tọa độ A, B, C, D biết điểm D có hoành độ dương và AD = 2AB.

87: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD trong đó A thuộc đường thẳng $x + y - 1 = 0$ và CD có phương trình $2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết hình vuông có diện tích bằng 5

88: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $D(-6;-6)$. Đường trung trực của đoạn DC có phương trình $d_1: 2x + 3y + 17 = 0$ và đường phân giác góc $\angle BAC$ có phương trình $d_2: 5x + y - 3 = 0$.

ác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

89: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có G là trọng tâm ΔBCD, phương trình đường thẳng DG: $2x - y + 1 = 0$, phương trình BD: $5x - 3y + 2 = 0$ và C(0;2). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D của hình bình hành.

90: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1: 2x - y - 1 = 0$, $d_2: 2x + y - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2; A là điểm thuộc d_1, A có hoành độ dương khác 1 ($0 < x_A \neq 1$). Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt d_2 tại B sao cho diện tích $\triangle IAB$ bằng 6 và IB = 3IA.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Ta có A ∈ d_1 nên $A(x_1;3x_1-5)$, B ∈ d_2 nên $B(x_2;4-x_2)$

Vì A, B, M thẳng hàng và 2MA = 3MB nên $\left[\begin{array}{ll}2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB} & (1)\\ 2\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB} & (2)\end{array}\right.$

Từ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}2(x_1-1)=3(x_2-1)\\2(3x_1-6)=3(3-x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{2}\\x_2=2\end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right), B(2;2)$

Suy ra d : x – y = 0

Từ (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}2(x_1-1)=-3(x_2-1)\\2(3x_1-6)=-3(3-x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=1\end{cases}\Rightarrow A(1;-2), B(1;3)$

Suy ra d : x – 1 = 0.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là d : x – y = 0 hoặc d : x – 1 = 0.

Bài 2:

Do Δ qua O, nên có phương trình dạng : x = 0 hoặc y = kx

Nếu phương trình Δ : x = 0 ; khi đó $A=\Delta\cap d_1: x-y-2=0\Rightarrow A(0;-2)$

$\Delta\cap d_2: 2x+y-5=0\Rightarrow B(0;5)\Rightarrow OA.OB=10$ (thỏa mãn)

Nếu phương trình Δ : y = kx

Do $A=\Delta\cap d_1$ nên tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases}x-y-2=0\\y=kx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{1-k}\\y=\dfrac{2k}{1-k}\end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{2}{1-k};\dfrac{2k}{1-k}\right)$$

Do $B=\Delta\cap d_2$ nên tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x+y-5=0\\y=kx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2+k}\\y=\dfrac{5k}{2+k}\end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{5}{2+k};\dfrac{5k}{2+k}\right)$$

Khi đó $OA.OB=10\Leftrightarrow OA^2.OB^2=100\Leftrightarrow\dfrac{4+4k^2}{(1-k)^2}.\dfrac{25+25k^2}{(2+k)^2}=100$

$$\Leftrightarrow(k^2+1)^2=(k^2+k-2)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k^2+1=k^2+k-2\\k^2+1=-k^2-k+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\\k=-1;k=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

⇒ Phương trình của đường thẳng Δ là: $y=3x; y=-x; y=\dfrac{1}{2}x$

Bài 3:

Đường thẳng Δ_1 vuông góc với đường thẳng Δ ⇒ Δ_1 có dạng: 5x + 3y + m=0

$$d(B,\Delta_1)=3d(A,\Delta_2)\Leftrightarrow\frac{|11+m|}{\sqrt{34}}=3\frac{|1+m|}{\sqrt{34}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\Rightarrow\Delta_1:5x+3y+4=0\\m=-\dfrac{7}{2}\Rightarrow\Delta_1:5x+3y-\dfrac{7}{2}=0\end{array}\right.$$

Bài 4:

$A\in d_1\Rightarrow A(a;-3a-5); B\in d_2\Rightarrow B(b;-3b-1)$

$\overrightarrow{IA}=(a-1;-3a-3)\neq\vec{0}; \overrightarrow{IB}=(b-1;-3b+1)$

I, A, B thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow\begin{cases}b-1=k(a-1)\\-3b+1=k(-3a-3)\end{cases}$

Nếu a = 1 ⇒ b = 1 ⇒ AB = 4 (loại)

Nếu $a\neq1\Rightarrow-3b+1=\dfrac{b-1}{a-1}(-3a-3)\Leftrightarrow a=3b-2$

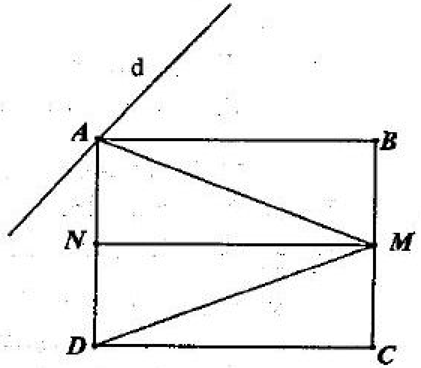
$AB=\sqrt{(b-a)^2+[3(a-b)+4]^2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow t^2+(3t+4)^2=8,\ t=a-b$

$$\Leftrightarrow5t^2+12t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$$

$t=-2\Rightarrow a-b=-2\Rightarrow b=0,a=-2\Rightarrow\Delta:x+y+1=0$

$t=\dfrac{-2}{5}\Rightarrow a-b=\dfrac{-2}{5}\Rightarrow b=\dfrac{4}{5},a=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\Delta:7x-y-9=0$

Bài 5:



Gọi $A(t;-3t+2)$. Ta có:

$d(A,DM)=2d(C,DM)$

$\Leftrightarrow\dfrac{|4t-4|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2.4}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A(3;-7)\\A(-1;5)\end{array}\right.$

Mặt khác A,C nằm về 2 phía của đường thẳng DM nên chỉ có A(–1;5) thoả mãn.

Gọi $D(m;m-2)\in DM$ thì

$\overrightarrow{AD}=(m+1;m-7),\overrightarrow{CD}=(m-3;m+1)$

Do ABCD là hình vuông

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0\\DA=DC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-1\end{array}\right.\\(m+1)^2+(m-7)^2=(m-3)^2+(m+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow m=5$$

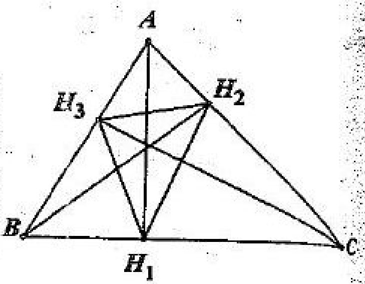
⇒ D(5;3)

Ta có $\overrightarrow{DC}=(-2;-6)$. Gọi $B(x_B;y_B)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(x_B+1;y_B-5)$

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + 1 = -2 \\ y_B - 5 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-$

Kết luận $A(-1;5), B(-3;-1), D(5;3)$

Bài 6:



Nhận thấy H_1A là phân giác trong của góc H_1 vì vậy BC là tia phân giác ngoài do đó để tìm phương trình các cạnh AB;AC ; BC ta chỉ cần tìm phương trình đường phân giác ngoài của các góc H_1 ; H_2 ;H_3 của tam giác $H_1H_2H_3$ thật vậy:

Ta có phương trình

H_1H_2 : $2x + y - 7 = 0$; H_1H_3 ; $x - 2y - 6 = 0$; H_2H_3 : $2x - y + 3 = 0$

Phương trình phân giác trong và ngoài của góc H_3 là: $x + y + 9 = 0$ (1)

$x - y - 1 = 0$

thay toạ độ H_1 và H_2 vào (1) ta suy ra phương trình AB : $x + y + 9 = 0$

Tương tự : Phương trình AC : $y - 5 = 0$

Phương trình BC : $3x - y - 13 = 0$

Toạ độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y + 9 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-14;5)$

Toạ độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y + 9 = 0 \\ 3x - y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1;-10)$

Toạ độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x - y - 13 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6;5)$

Bài 7:

Gọi vtpt AB, AC, BC lần lượt là: $\overline{n_1} = (1;2), \overline{n_2} = (2;1), \overline{n_3} = (a;b)$

Phương trình BC có dạng: $a(x-1) + b(y-2) = 0, a^2 + b^2 > 0$

Tam giác ABC cân tại A nên:

$\cos B = \cos C \Leftrightarrow \left|\cos(\overline{n_1}, \overline{n_3})\right| = \left|\cos(\overline{n_2}, \overline{n_3})\right|$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = b \end{array}\right.$$

Với $a = -b$ chọn $b = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow BC: x - y + 1 = 0 \Rightarrow B(0;1); C\left(\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Không thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Với $a = b$ chọn $a = b = 1 \Rightarrow BC : x + y - 3 = 0 \Rightarrow B(4;-1); C(-4;7)$. Thỏa mãn M thuộc đoạn BC.

Gọi trung điểm của BC là $I(0;3)$.

Ta có: $\overline{DB}.\overline{DC} = (\overline{DI} + \overline{IB}).(\overline{DI} + \overline{IC}) = DI^2 - \frac{BC^2}{4} \geq -\frac{BC^2}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi $D \equiv I$. Vậy $D(0;3)$

Bài 8:

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật nên góc giữa AC và AB bằng góc giữa AB và BD, kí hiệu $\overline{n_{AB}} = (1;-2)$; $\overline{n_{BD}} = (1;-7)$; $\overline{n_{AC}} = (a;b)$ (với $a^2 + b^2 > 0$) lần lượt là vtpt của các đường thẳng AB, BD, AC. Khi đó ta có:

$\left|\cos\left(\overline{n_{AB}}, \overline{n_{BD}}\right)\right| = \left|\cos\left(\overline{n_{AC}}, \overline{n_{AB}}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow |a-2b| = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = -\frac{b}{7} \end{array}\right.$$

Với $a = -b$. Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -1$. Khi đó phương trình AC: $x - y - 1 = 0$

Với $b = -7a$. Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -7$. Khi đó phương trình AC: $x - 7y + 5 = 0$ (loại vì AC không cắt BD)

Gọi I là tâm hình chữ nhật thì $I = AC \cap BD$ nên toạ độ I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 7y + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Ta có: A, C khác phía so với BD nên: $NA + NC \geq AC$

Dấu bằng xảy ra khi $N = AC \cap BD \Rightarrow N \equiv I$. Vậy $N\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Bài 9:

Từ giả thiết $\Rightarrow A(a;3-a)$

$B(b;4-b) \Rightarrow \overline{IA} = \left(a - \frac{5}{2}; \frac{1}{2} - a\right); \overline{IB} = \left(b - \frac{5}{2}; \frac{3}{2} - b\right)$

ABCD vuông tâm I nên $\begin{cases} IA = IB \\ \overline{IA}.\overline{IB} = 0 \end{cases}$

$$IA = IB \Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 = \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - b\right)^2 \qquad (1)$$

$$\overline{IA}.\overline{IB} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{5}{2}\right).\left(b - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - a\right).\left(\frac{3}{2} - b\right) = 0 \Leftrightarrow 2ab - 4a - 3b + 7 = 0$$

$\Leftrightarrow 2a\,(b-2) = 3b - 7 \Leftrightarrow a = \frac{3b-7}{2(b-2)}$ (do b = 2 không thỏa mãn) (2)

Thay (2) vào (1)

$$\left(\frac{-2b+3}{2b-4}\right)^2 + \left(\frac{5-2b}{2b-4}\right)^2 = 2b^2 - 8b + \frac{34}{4} \Leftrightarrow \frac{8b^2 - 32b + 34}{4(b-2)^2} = \frac{8b^2 - 32b + 34}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 8b^2-32b+34=0 & (3)\\ (b-2)^2=1 & (4)\end{array}\right.$$

Phương trình (3) vô nghiệm, (4) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1\\ b=3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\\ a=1\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $a=2,\ b=1 \Rightarrow A(2;1);B(1;3)$

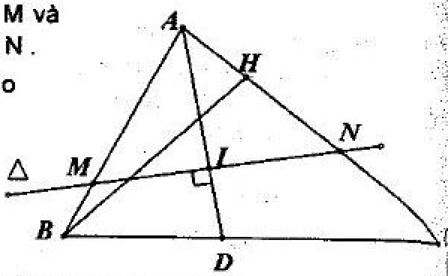
Do I là trung điểm của AC, BD nên $C(3;4);D(4;2)$

Trường hợp 2: $a=1,\ b=3 \Rightarrow A(1;2);B(3;1)$

Do I là trung điểm của AC, BD nên $C(4;3);D(2;4)$

Bài 10:

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm M và $\Delta \perp AD$, Δ cắt AD tại I và cắt AC tại N.



Ta có $\vec{n}=(1;-1)$ là vtpt của AD, do $\Delta \perp AD \Rightarrow \vec{n}=(1;-1)$ là vtcp của Δ

$\Rightarrow$ phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x=t\\ y=2-t\end{cases} \Leftrightarrow \Delta: x+y-2=0$

Do $I=\Delta \cap AD \Rightarrow$ tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-2=0\\ x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Tam giác AMN có AI vừa là đường cao, vừa là phân giác nên là tam giác c tại A $\Rightarrow$ I là trung điểm của MN $\Rightarrow N(1;1)$

Có $\overrightarrow{n_1}=(3;4)$ là VTPT của BH $\Rightarrow \overrightarrow{u_1}=(4;-3)$ là vtcp của BH, d

$BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{u_1}=(4;-3)$ là vtpt của AC, do AC đường thẳng đi qua điểm N(1;

nên $AC: 4(x-1)-3(y-1)=0 \Rightarrow AC: 4x-3y-1=0.$

Do $A=AC\cap AD \Rightarrow$ tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x-3y-1=0\\ x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\\ y=5\end{cases} \Leftrightarrow A(4;5)$$

AB là đường thẳng đi qua điểm M(0;2) nhận $\overrightarrow{MA}=(4;3)$ làm vec tơ chỉ phươ

$\Rightarrow$ phương trình tham số của AB $\begin{cases} x=4t\\ y=2+3t\end{cases} \Leftrightarrow AB: 3x-4y+8=0$

Do $B=AB\cap BH \Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hpt

$$\begin{cases} 3x-4y+8=0\\ 3x+4y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3\\ y=\frac{-1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow B\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$$

Gọi $C(a,b)\in AC \Rightarrow 4a-3b-1=0 \Rightarrow b=\frac{4a-1}{3} \Rightarrow C\left(a;\frac{4a-1}{3}\right)$, ta có

$\overrightarrow{MC}=\left(a;\frac{4a-7}{3}\right)$

Theo giả thiết

$$MC=\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2+\left(\frac{4a-7}{3}\right)^2=2 \Leftrightarrow 25a^2-56a+31=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1\\ x=\frac{31}{25}\Rightarrow y=\frac{33}{25}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow C(1;1)$ hoặc $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$.

Vì $AD: x-y+1=0$ là phân giác trong góc A của tam giác ABC, kiểm tra điều kiện $(x_B-y_B+1)(x_C-y_C+1)<0$ cả hai điểm C trên đều thỏa mãn

Bài 11:

Tọa độ của A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x+y-3=0\\ x+2y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases} \Rightarrow A(1;1)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là trung điểm của BC, từ giả thiết ta có: $\begin{cases} MI\perp MA\\ d(M,AC)=d(M,AB)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0(x_0-1)+(y_0+1)(y_0-1)=0\\ \frac{|2x_0+y_0-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_0+2y_0-3|}{\sqrt{5}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0=y_0\\ x_0+y_0=2\end{array}\right.\\ {x_0}^2+{y_0}^2-x_0-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=y_0\\ 2{x_0}^2-x_0-1=0\end{cases} \cup \begin{cases} y_0=2-x_0\\ 2{x_0}^2-5x_0+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_0=y_0=1 \cup x_0=y_0=\frac{-1}{2} \cup \begin{cases} x_0=\frac{3}{2}\\ y_0=\frac{1}{2}\end{cases}$$

+ Với $x_0=y_0=1$ ta có $M\equiv A$ (loại)

+ Với $x_0=y_0=\frac{-1}{2}$ ta có $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BC: x+y+1=0$ suy ra $B(4;-5);C(-5;4)$

+ Với $\begin{cases} x_0=\frac{3}{2}\\ y_0=\frac{1}{2}\end{cases}$ ta có $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BC: x-y-1=0$ suy ra $B\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$; $C\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$

Vậy $A(1;1),B(4;-5),C(-5;4)$ hoặc $A(1;1),B\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right),C\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$

Bài 12:

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5;0)$

Vì C, D có hoành độ dương, AD = 2, ABCD là hình thang vuông

Suy ra C và D thuộc đường thẳng có phương trình y = 2

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 2 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow C(3;2)$

Gọi tọa độ điểm $A(x_A;0) \Rightarrow$ tọa độ điểm $D(x_A;2)$

Diện tích hình thang ABCD là: $S = \frac{1}{2}(AB + CD).AD = 12 \Leftrightarrow AB + CD = 12$ (1)

Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |5 - x_A|;|\overrightarrow{CD}| = |3 - x_A|$ (2)

Thay (2) vào (1): $|5 - x_A| + |3 - x_A| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 10 \\ x_A = -2 \end{array}\right.$

Với $x_A = 10 \Rightarrow A(10;0),\ D(10;2)$

Với $x_A = -2 \Rightarrow A(-2;0),\ D(-2;2)$

Bài 13:

Đường thẳng AB đi qua M nhận $\overrightarrow{MI} = (3,-3)$ làm vtpt nên có phương trì

$x - y + 3 = 0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$

M(−1;2) là trung điểm của AB nên $B\left(\frac{-2}{3};\frac{7}{3}\right)$

BC nhận $\overline{n} = (2;1)$ làm vtcp nên ta có

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{3} + 2t \\ y = \frac{7}{3} + t \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-2}{3} + 2t;\frac{7}{3} + t\right)$$

$$IB = IC \Rightarrow IB^2 = IC^2 \Rightarrow \left(2t - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0,\ \text{loại (do } C \equiv B) \\ t = \frac{4}{5} \end{array}\right.$$

Vậy $C\left(\frac{14}{15};\frac{47}{15}\right)$

Bài 14:

Gọi H là hình chiếu của B trên $d: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow H(5 - 2t;t)$

$\overrightarrow{BH} = (17 - 2t;t - 1) \perp \overrightarrow{u_d} = (-2;1) \Rightarrow -2(17 - 2t) + t - 1 = 0 \Rightarrow t = 7 \Rightarrow H(-9;7)$

Gọi M là điểm đối xứng của B qua d

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BH} \Rightarrow M(-6;13) \in AC$

$A \in d \Rightarrow A(5 - 2a;a) \Rightarrow C(8 + 2a;1 - a)$

$\overrightarrow{MA} // \overrightarrow{MC} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow C(4;3)$

Vậy BC : $x - 8y + 20 = 0$

Bài 15:

Giả sử Δ cắt trục Ox tại $A(x_0;0)$, cắt trục tung Oy tại $B(0;y_0)$

Ta có : $OA = a = |x_0|$; $OB = b = |y_0|$; $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} S = \frac{1}{2}ab = \frac{15}{2} \\ P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 15 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta có $\left[\begin{array}{l} a = 6,\ b = \frac{5}{2} \\ a = \frac{5}{2},\ b = 6 \end{array}\right.$

Với $(a;b) = \left(6;\frac{5}{2}\right)$ thì $x_0 = \pm 6; y_0 = \pm\frac{5}{2}$ ta có 4 PT của Δ là :

$5x + 12y - 30 = 0$ (1); $5x - 12y + 30 = 0$ (2)

$5x - 12y - 30 = 0$ (3); $5x + 12y + 30 = 0$ (4)

Với $(a;b) = \left(\frac{5}{2};6\right)$ thì $x_0 = \pm\frac{5}{2}; y_0 = \pm 6$ ta có 4 phương trình của Δ là :

$12x + 5y - 30 = 0$ (5); $-12x + 5y + 30 = 0$ (6)

$-12x + 5y - 30 = 0$ (7); $12x + 5y + 30 = 0$ (8)

Vậy ta có 8 PT của Δ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Bài 16:

Gọi $B(x_B;y_B)$ và $x_B < 0$. Ta có OABC là hình vuông $\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \\ AB = AO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_B - 3) + 4(y_B - 4) = 0 \\ (x_B - 3)^2 + (y_B - 4)^2 = 25 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x_B;y_B) = (7;1)$ hoặc $(x_B;y_B) = (-1;7)$.

Đối chiếu với điều kiện $\Rightarrow B(-1;7)$.

Do C đối xứng với A qua trung điểm $I\left(\frac{-1}{2};\frac{7}{2}\right)$ của OB $\Rightarrow C(-4;3)$.

PT đường tròn ngoại tiếp hình vuông OABC là $(C): \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

$(C) \cap Ox = E(-1;0)$, $(C) \cap Oy = F(0;7)$.

EF là đường kính của (C) ⇒ ΔMEF vuông tại M.

Ta có: $S_{MEF}=\frac{1}{2}ME.MF\le\frac{ME^2+MF^2}{4}=\frac{EF^2}{4}=\frac{25}{2}$

$\Rightarrow S_{MEF}$ LN $=\frac{25}{2}$. Khi đó ΔMEF vuông cân

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_M+1)^2+y^2_M=25\\ \left(x_M+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y_M-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\end{cases}\Rightarrow M(3;3)\text{ hoặc }M(-4;4).$$

Bài 17:

a. Gọi $M(x;0)\Rightarrow\overline{MA}=(1-x;2);\ \overline{MB}=(4-x;3)$.

$\Rightarrow\overline{MA}.\overline{MB}=MA.MB.\cos45^0$

$\Leftrightarrow(1-x)(4-x)+6=\sqrt{(1-x)^2+4}.\sqrt{(4-x)^2+9}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow2(x^2-5x+10)^2=(x^2-2x+5)(x^2-8x+25)$ (do $x^2-5x+10>0$)

$\Leftrightarrow(x-1)(x-5)(x^2-4x+15)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$

$\Rightarrow M(1;0)$ hoặc $M(5;0)$.

b. Do $CD//AB\Rightarrow CD:y=x+m\ (m\ne8)$.

Do C, D $\in(P):y=x^2\Rightarrow$ hoành độ C, D là nghiệm của phương tr

$x^2-x-m=0$ (1).

(1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta=1+4m>0\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{-1}{4}\\m\ne8\end{cases}$

Gọi x_1,x_2 là 2 nghiệm của (1)

$\Rightarrow C(x_1;x_1+m),\ D(x_2;x_2+m)\Rightarrow CD^2=2(1+4m)$.

Gọi K là trung điểm của CD $\Rightarrow K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}+m\right)\Rightarrow d(k;d)=\left|\frac{m-8}{\sqrt{2}}\right|$

Do $CD^2=d^2\Leftrightarrow m^2-32m+60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=30\end{array}\right.$ thỏa mãn

$\Rightarrow CD:x-y+2=0;\quad CD:x-y+30=0$

Bài 18:

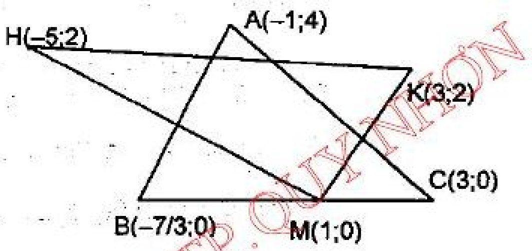
Gọi K là điểm đối xứng của M qua AC, H là điểm đối xứng của M qua AB.

Chu vi tam giác MNP = MN + NP + PM = KN + NP + PH ≥ HK không đổi.

Dấu bằng xảy ra khi H, N, P, K thẳng hàng.

Vậy chu vi tam giác MNP nhỏ nhất = HK khi H, N, P, K thẳng hàng.

Tìm N, P.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên AC

⇒ I(2;1) do đó K(3; 2).

Gọi J là hình chiếu vuông góc của M trên AB ⇒ J(-2;1) do đó H(-5; 2).

Phương trình các đường thẳng

AB: $3x-y+7=0$;

AC: $x+y-3=0$;

HK: $y-2=0$. N = HK ∩ AC, P = HK ∩AB.

Do đó tọa độ các điểm N, P cần tìm là: $N(1;2),\ P\left(-\frac{5}{3};2\right)$.

Bài 19:

Điểm C trên trục Ox có tọa độ C(c;0)

Ta có: $\overline{AB}=(2;1);\ \overline{AC}=(c-1;-1)$.

Tam giác ABC vuông tại A $\Leftrightarrow\overline{AB}.\overline{AC}=0\Leftrightarrow2c-3=0\Leftrightarrow c=\frac{3}{2}$

Vậy điểm C có tọa độ $C\left(\frac{3}{2};0\right)$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông: AH.BC = AB.AC

$\Rightarrow AH=\frac{AC.AB}{BC}=1$

Chu vi tam giác ABC: $2p=AB+AC+BC$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Ox, khi đó Ox là đường trung trực của AA' nên: $AC=A'C$.

Vì AB không đổi nên chu vi nhỏ nhất khi $A'C+CB$ nhỏ nhất ⇔ B, C, A' thẳng hàng.

Tọa độ $A'(1;-1)$. Phương trình đường thẳng $BA':3x-2y-5=0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3x-2y-5=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=0\end{cases}\Rightarrow C\left(\frac{5}{3};0\right)$

Bài 20:

Ta có góc A của tam giác ABC là góc tạo bởi hai đường thẳng (AB) và (AC), do đó

$$\cos A=\frac{|2.1+(-3)5|}{\sqrt{4+9}\sqrt{1+25}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A=45^0.$$

Gọi $\overline{n}=(a;b)$ với $(a^2+b^2\ne0)$ là một VTPT của đường thẳng (BC).

Vì (BC) đi qua $M(3;-3)$ nên phương trình (BC) có dạng:

$a(x-3)+b(y+3)=0\Leftrightarrow ax+by-3a+3b=0$.

ΔABC cân tại C nên $\cos A=\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2a-3b|}{\sqrt{4+9}\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sqrt{26(a^2+b^2)}=2|2a-3b|\Leftrightarrow 5a^2+24ab-5b$

Khi $a=0\Rightarrow b=0$ (loại)

Xét $b\neq 0\Rightarrow 5\left(\frac{a}{b}\right)^2+24\frac{a}{b}-5=0\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$ hoặc $\frac{a}{b}=-5$

Với $\frac{a}{b}=\frac{1}{5}$ thì phương trình $(BC): x+5y+12=0$.

Với $\frac{a}{b}=-5$ thì phương trình $(BC): 5x-y-18=0$.

Nhận thấy đường thẳng $x+5y+12=0$ song song với (AC) nên bị loại.

Do đó đường thẳng $(BC): 5x-y-18=0$

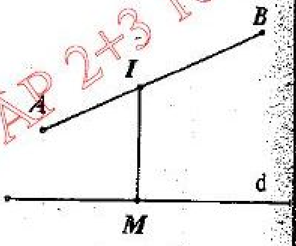
2. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $G\left(2;-\frac{1}{3}\right)$. M thuộc ($\Delta$) ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MG}\right|.$$

Từ đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $\left|\overrightarrow{MG}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vu góc của G trên Δ

Tìm được $M\left(\frac{28}{15};-\frac{1}{15}\right)$.

Bài 21:



Gọi $I(x_0;y_0)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}\Leftrightarrow\begin{cases}2(1-x_0)=x_0+5\\2(3-y_0)=y_0+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-1\\y_0=1\end{cases}$

Vậy $I(-1;1)$

Ta có: $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right|=\left|3\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right|=3\left|\overrightarrow{MI}\right|=3MI$

Như vậy $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất. Suy ra M là hình ch của I trên d

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=2t-1\\y=t\end{cases}$. Gọi tọa độ $M(2t_0-1;t_0)$

Suy ra $\overrightarrow{IM}=(2t_0;t_0-1)$. Ta có $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2.2t_0+t_0-1=0\Leftrightarrow t_0=\frac{1}{5}$

Vậy $M\left(\frac{-3}{5};\frac{1}{5}\right)$

Bài 22:

B, C lần lượt thuộc tia Ox và tia Oy nên gọi $B(a;0), C(0;b)(a,b>0)$.

Ta có $OB=a$; $OC=b$; $\overrightarrow{AB}=(a-3;-4)$; $\overrightarrow{BC}=(-a;b)$

Vì A, B ,C thẳng hàng nên $\frac{a-3}{-a}=\frac{-4}{b}\Rightarrow -1+\frac{3}{a}=\frac{-4}{b}\Rightarrow\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$

$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OB.OC=\frac{1}{2}ab$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $1=\frac{3}{a}+\frac{4}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}\Leftrightarrow ab\geq 48$

Do đó $S_{\Delta OBC}\geq 24$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\frac{3}{a}=\frac{4}{b}\\\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=8\end{cases}$

Vậy B(6;0);C(0;8).

i 23:

Phương trình cạnh AB qua $A(-2;3)$ và vuông góc với CH có phương trình :

$1(x+2)-2(y-3)=0\Leftrightarrow x-2y+8=0$

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ: $\begin{cases}2x-y+1=0\\x-2y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}\Rightarrow B(2;5)$

Điểm C thuộc CH nên $C(x;-2x+7)$. Suy ra $M\left(\frac{x-2}{2};-x+5\right)$

Thay tọa độ điểm M vào phương trình BM được x = 3 nên C(3;1)

Vậy phương trình cạnh AC : $4x+y-13=0$

Phương trình cạnh BC : $2x+5y-11=0$

Tọa độ trọng tâm G(1;3)

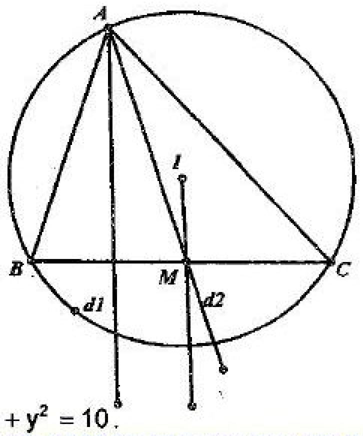
Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}$

Ta có : $\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|=3\left|\overrightarrow{HG}\right|$. Vậy : $\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|_{min}\Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{HG}\right|_{min}$

⇔H là hình chiếu vuông góc của G trên trục Ox.

Vậy H(1;0) và $\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|_{min}=9$

24:



Tìm được A(1;1)

Gọi Δ là đường thẳng qua I và song song với d_1. Tìm được $\Delta: x+y-4=0$

Gọi $M=\Delta\cap d_2\Rightarrow M(5;-1)$, M là trung điểm BC ⇒ đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với d_1.

Tìm được $(BC): x-y-6=0$.

Nhận xét B, C là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn tâm I, bán kính $R=IA=\sqrt{10}$ có phương trình $(x-4)^2+y^2=10$.

+ Giải hệ tìm được tọa độ $B(3;-3), C(7;1)$.
+ Phương trình $AB: 2x+y-3=0$.
  Phương trình $AC: y-1=0$.

Bài 25:

Đường thẳng BC có phương trình $x+y+m=0$

Theo giả thiết ta có $d(I,BC)=\dfrac{\left|\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+m\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\left|\frac{9}{2}+m\right|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-6\\m=-3\end{array}\right.$

Với $m=-3$, tọa độ đỉnh B thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+y=3\\x+5y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\y=\frac{11}{4}\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{1}{4};\frac{11}{4}\right.$

(không thỏa mãn)

Với $m=-6$, tọa độ đỉnh B thỏa mãn hệ $\begin{cases}x+y=6\\x+5y=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}\Rightarrow B(4;2)$ (th

mãn)

Khi đó phương trình BC là $x+y-6=0$.

Dễ thấy AI là đường cao của tam giác ABC nên chân đường cao cũng là tru điểm của BC có tọa độ là nghiệm của hệ

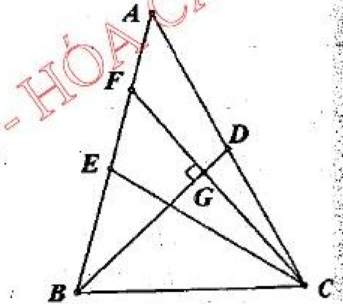
$\begin{cases}x-y=0\\x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}\Rightarrow H(3;3)\ \Rightarrow C(2;4).$

Gọi $A(x;x)$ ta có $IA=IB\Leftrightarrow 2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{50}{4}\Leftrightarrow\left|x-\frac{9}{2}\right|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}\Rightarrow A\left(\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right.$

(loại) hoặc $x=1\Rightarrow A(1;1)$

Vậy A(1;1), B(4;2), C(2;4).

Bài 26:



Toạ độ điểm B là nghiệm hệ :

$\begin{cases}x-y+1=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow B(0;1)$

Toạ độ điểm C là nghiệm hệ:

$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow C(1;2)$

Gọi F đối xứng C qua d_1; đường thẳng CF đi qua C nhận $\vec{v}=(1;-2)$ là VTCP của d_1 làm VTPT nên có phương trình là :

$(x-1)-2(y-2)=0\Leftrightarrow x-2y+3=0$

Tọa độ $G=d_1\cap CF$ là nghiệm hệ $\begin{cases}x-2y+3=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/5\\y=7/5\end{cases}$

G là trung điểm CF nên $F(-7/5;4/5)$

Đường thẳng AB đi qua F và B có phương trình: $6x-7y+14=0$

i 27:

Vì các điểm đối xứng với trực tâm của tam giác qua các đường thẳng chứa cạnh, qua trung điểm các cạnh nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác; nên D,E,M,N cùng nằm trên một đường tròn.

Gọi $(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0, \left(a^2+b^2-c>0\right)$, là đường tròn đi qua bốn điểm D,E,N,M. Khi đó ta có: $\begin{cases}8a+4b+c=-20\\2a+2b+c=-2\\6a+6b+c=-18\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{5}{2}, b=-\frac{3}{2}, c=6.$

Nên ta có $(C): x^2+y^2-5x-3y+6=0$.

Do $M\in d$ nên tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình

$\begin{cases}x^2+y^2-5x-3y+6=0\\x-3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4, y=1\\x=\frac{8}{5}, y=\frac{1}{5}\quad(\text{loại do } x>2)\end{array}\right.$

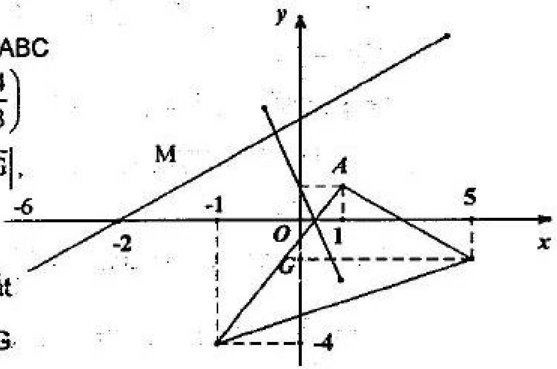
Suy ra $M(4;1)$.

Phương trình đường thẳng qua hai điểm B,C có pt: $x-4=0$. Giả sử $B(4;t)$ và M là trung điểm của đoạn BC nên $C(4;2-t)$; N là trung điểm của đoạn hằng AB nên $A(2;6-t)$.

Do BE vuông góc với AC nên $\overline{BE}\cdot\overline{AC}=0\Leftrightarrow -6-4(1-t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Do đó $A\left(2;\frac{7}{2}\right), B\left(4;\frac{5}{2}\right), C\left(4;-\frac{1}{2}\right)$.

ài 28:



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

ta có tọa độ của G là $G\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$

Khi đó: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|$,

G và Δ cố định

(G không nằm trên Δ)

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi $\left|3\overrightarrow{MG}\right|$ nhỏ nhất, tức MG nhỏ nhất hay MG vuông góc với Δ.

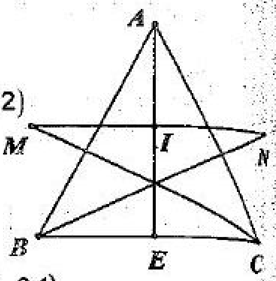
Do đó M là giao điểm của Δ và đường thẳng d qua G và vuông góc với Δ.

Một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(3;2)$ đó cũng là 1 vec tơ pháp tuyến của d, vậy phương trình của d là: $3x+2y-\frac{4}{3}=0$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-3y+12=0\\ 3x+2y-\frac{4}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{20}{13}\\ y=\frac{116}{39}\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{20}{13};\frac{116}{39}\right)$$

Bài 29:



Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y+4=0\\ x+2y-2=0\end{cases}\Rightarrow B(-2;2)$

Gọi d là đường thẳng qua M song song với BC

$\Rightarrow d: x+2y+1=0$

Gọi N là giao điểm của d với đường cao kẻ từ B.

Toạ độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y+4=0\\ x+2y+1=0\end{cases}$ Suy ra $N(-3;1)$

Gọi I là trung điểm MN $\Rightarrow I\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

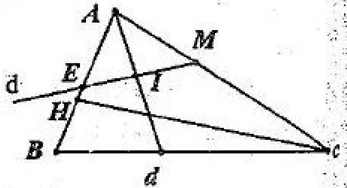
Gọi E là trung điểm BC. Do tam giác ABC cân nên IE là đường trung trực BC. IE đi qua I vuông góc với BC $\Rightarrow IE: 4x-2y+9=0$.

Toạ độ E là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y-2=0\\ 4x-2y+9=0\end{cases}\Rightarrow E\left(\frac{-7}{5};\frac{17}{10}\right)\Rightarrow C\left(\frac{-4}{5};\frac{7}{5}\right)$

CA đi qua C vuông góc với BN suy ra $CA: x+y-\frac{3}{5}=0$

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}4x-2y+9=0\\ x+y-\frac{3}{5}=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{-13}{10};\frac{19}{10}\right)$

Bài 30:



Đường thẳng d qua M vuông góc với AD có phương trình $x-y-3=0$

Gọi I, E là giao điểm của AD, AB với d.

Dễ thấy tam giác AME cân tại A

Toạ độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y-3=0\\ x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow E(2;-1)$

AB là đường thẳng qua E vuông góc với CH $AB: 2x+y-3=0$

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y-3=0\\ x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow A(1;1)$.

Do $AB=2AM\Rightarrow$ E là trung điểm AB suy ra $B(3;-3)$

Phương trình $AM: x+2y-3=0$

Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+2y-3=0\\ x-2y+5=0\end{cases}\Rightarrow C(-1;2)$

Bài 31:

Vì *B* thuộc đường thẳng (*AB*) nên $B(a;1-2a)$, C thuộc (AC) nên $C(-2-4b;3b)$

Ta có: $\overline{MB}=(a-1;4-2a)$, $\overline{MC}=(-3-4b;3b+3)$

Ta có $(AB)\cap(AC)=\{A\}\Rightarrow A(2;-3)$.

Vì *B, M, C* thẳng hàng, $3MB=2MC$ nên ta có: $3\overline{MB}=2\overline{MC}$ hoặc $3\overline{MB}=-2\overline{MC}$

TH1: $3\overline{MB}=2\overline{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}3(a-1)=2(-3-4b)\\ 3(4-2a)=2(3b+3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{11}{5}\\ b=\frac{-6}{5}\end{cases}$

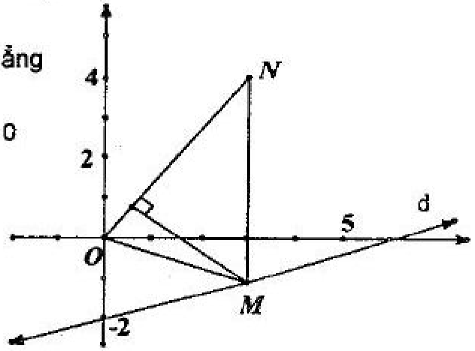
$\Rightarrow B\left(\frac{11}{5};-\frac{17}{5}\right)$, $C\left(\frac{14}{5};-\frac{18}{5}\right)\Rightarrow G\left(\frac{7}{3};-\frac{10}{3}\right)$

TH2: $3\overline{MB}=-2\overline{MC}\Leftrightarrow\begin{cases}3(a-1)=-2(-3-4b)\\ 3(4-2a)=-2(3b+3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=0\end{cases}$

$\Rightarrow B(3;-5), C(-2;0)\Rightarrow G\left(1;-\frac{8}{3}\right)$

Vậy có hai điểm $G\left(\frac{7}{3};-\frac{10}{3}\right)$ và $G\left(1;-\frac{8}{3}\right)$ thỏa mãn đề bài.

Bài 32:



Ta có $\overline{ON}=(3;4)$, $ON=5$, đường thẳng ON có phương trình

$4(x-3)-3(y-4)=0\Leftrightarrow 4x-3y=0$

do $M\in d\Rightarrow M(3m+6;m)$

Khi đó ta có

$S_{\Delta ONM}=\frac{1}{2}d(M,ON).ON$

$\Leftrightarrow d(M,ON)=\frac{2S_{\Delta ONM}}{ON}=3$

$\frac{|4.(3m+6)-3m|}{5}=3\Leftrightarrow|9m+24|=15\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\frac{-13}{3}\end{array}\right.$

Với $m=-1\Rightarrow M(3;-1)$

Với $m=\frac{-13}{3}\Rightarrow M\left(-7;\frac{-13}{3}\right)$.

Vậy các điểm M cần tìm là $M(3;-1)$ hoặc $M\left(-7;\frac{-13}{3}\right)$

Bài 33:

Tọa độ A; B là nghiệm hệ: $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;-1);\ B(4;2)$

Giả sử $C\left(y_o{}^2; y_o\right) \in (P)$ $h = d(C;d) = \dfrac{\left|y_o^2 - y_o - 2\right|}{\sqrt{2}}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} h.AB = \dfrac{3}{2}\left|y_o^2 - y_o - 2\right|$

Xét hàm số $f = \left|y_o^2 - y_o - 2\right|$, với $-1 \le y_o \le 2$

Suy ra Max $f = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow C\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 34:

Tọa độ I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Gọi M là trung điểm của AD

Tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3;0)$

Suy ra $AB = 2\,IM = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác $S_{ABCD} = AB.AD \Rightarrow AD = \dfrac{S_{ABCD}}{AB} = \dfrac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Vì M, I cùng thuộc d_1 suy ra $AD \perp d_1$.

Vậy AD đi qua điểm M và nhận $\vec{n} = (1;1)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình: $x - 3 + y = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

Lại có $MA = MD = \dfrac{AD}{2} = \sqrt{2}$.

Tọa độ điểm A, D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$

Chọn $A(2;1); D(4;-1)$

Các điểm C, B lần lượt đối xứng với A, B qua I.

Suy ra tọa độ điểm C(7; 2); B(5;4)

Bài 35:

Gọi AB,AD lần lượt là :$AB : ax + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2b = 0$;

$AD : b(x-2) + a(y-4) = 0 \Leftrightarrow bx - ay - 2b - 4a = 0; (a^2 + b^2 \ne 0)$

Theo giả thiết: $d(P;AP) = d(N;AD) \Leftrightarrow \dfrac{|-2a - 4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|3b - a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a + b = 0 \\ a + 7b = 0 \end{array}\right.$

với $3a + b = 0$, chọn $a = 1$, $b = -3$ thì diện tích hình vuông là $S = \left(\dfrac{|3b - a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 10$

với $a + 7b = 0$ chọn $a = 7, b = -1$ thì diện tích hình vuông là $S = \left(\dfrac{|3b - a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 2$

Bài 36:

Gọi M là trung điểm BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm BC và AD, E là giao điểm BH và AC

Toạ độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}} = \overrightarrow{u_{BC}} = (1;1)$, mà AD đi qua D nên phương trình AD: $1(x-4) + 1(y+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

Do A là giao điểm của AD và AM nên toạ độ A(1; 1), tương tự toạ độ $K(3;-1)$.

Tứ giác HKCE nội tiếp nên góc BHK bằng góc KCE, mà góc KCE bằng góc BDA (do tứ giác ABDC nội tiếp) suy ra góc BHK bằng góc BDK.

Vậy K là trung điểm $HD \Rightarrow H(2;4)$

Do $B \in BC \Rightarrow B(t;t-4)$ kết hợp M là trung điểm BC

$\Rightarrow C(7-t;3-t), \overline{HB}(t-2;t-8); \overline{AC}(6-t;2-t)$ do H là trực tâm tam giác ABC nên $\overline{HB}.\overline{AC} = 0 \Leftrightarrow (t-2)(6-t) + (t-8)(2-t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 7 \end{array}\right.$ nhưng do $t \le 3$ nên $t = 2 \Rightarrow B(2;-2); C(5;1)$

Vậy phương trình AB: $3x + y - 4 = 0, AC : y - 1 = 0$

Bài 37:

Gọi $B(a;12-2a)$. Ta có $\overline{BN} = (9-a;2a-9)$, $M(5;1) \Rightarrow \overline{BM} = (5-a;2a-11)$, do BM vuông góc với BN nên:

$(5-a)(9-a) + (2a-11)(2a-9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = \dfrac{24}{5} \end{array}\right. \Rightarrow B(6;0)$ do hoành độ điểm B lớn hơn 5

Vậy phương trình AB: $x + y - 6 = 0$ phương trình BC: $x - y - 6 = 0$

Gọi $D(b;12-2b)$ theo bài ra, ta có: DA.DC = 6 nên:

$\dfrac{|b + 12 - 2b - 6|}{\sqrt{2}}.\dfrac{|b - 12 + 2b - 6|}{\sqrt{2}} = 6$

$\Leftrightarrow 3|6 - b|.|b - 6| = 12 \Leftrightarrow (b-6)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = 8 \end{array}\right.$

+ Với $b=4$ thì $D(4;4)$ phương trình DA có dạng: $x-y=0$; phương
  DC: $x+y-8=0$.
+ Với $b=8$ thì $D(8;-4)$ phương trình DA có dạng: $x-y-12=0$, phương
  DC: $x+y-4=0$.

Bài 38:

Phương trình BD $x-3y-9=0$. Tọa độ $I=AC\cap BD \Rightarrow I(3;-2)$

Do I là trung điểm BD nên $D(6;-1)$.

Gọi $A(a;7-3a)\in AC$ ta có $BD=2\sqrt{10}$

$$dt(ABCD)=2.dt(ABD) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{|a-3(7-3a)-9|}{\sqrt{1^2+3^2}}.2\sqrt{10}=10$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right. \text{ do vậy } \left[\begin{array}{l} A_1(2;1);C_1(4;-5) \\ A_2(4;-5);C_2(2;1) \end{array}\right.$$

Bài 39:

Tọa độ điểm D là: $\begin{cases}3x-y=0\\x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} \Rightarrow D(0;0)\equiv O$

Vecto pháp tuyến của đường thẳng AD và BD lần lượt là $\overrightarrow{n_1}=(3;-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;-2$

$\Rightarrow \cos ADB=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ADB=45^0 \Rightarrow AD=AB$ (1)

Vì góc giữa đường thẳng BC và AB bằng $45^0 \Rightarrow BCD=45^0 \Rightarrow \Delta BCD$ vu
cân tại B $\Rightarrow DC=2AB$.

Theo bài ra ta có:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)AD=\frac{3.AB^2}{2}=24 \Rightarrow AB=4 \Rightarrow BD=4\sqrt{2}$$

Gọi tọa độ điểm $B\left(x_B;\frac{x_B}{2}\right)$, điều kiện $x_B>0$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{x_B^2+\left(\frac{x_B}{2}\right)^2}=4\sqrt{2} \Leftrightarrow x_B=\frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ hoặc } x_B=-\frac{8\sqrt{10}}{5}$$

Tọa độ điểm $B\left(\frac{8\sqrt{10}}{5};\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

Vecto pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{n_{BC}}=(2;1)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng BC là: $2x+y-4\sqrt{10}=0$

Bài 40:

Đặt $d_1: 3x-4y+27=0$ và $d_2: x+2y-5=0$

Phương trình đường thẳng chứa cạnh BC:

$\begin{cases}(BC) \text{ qua } B\\ BC\perp d_1\end{cases} \Leftrightarrow (BC): 4x+3y-5=0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x+3y-5=0\\x+2y-5=0\end{cases} \Rightarrow C(-1;3)$

Gọi K_{AC}, K_{BC}, K_2 theo thứ tự là hệ số góc của các đường thẳng AC, BC, d_2

Ta có: $\left|\frac{K_{BC}-K_{d2}}{1+K_{BC}.K_{d2}}\right|=\left|\frac{K_{d2}-K_{AC}}{1+K_{d2}.K_{AC}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{2}-K_{AC}}{1-\frac{1}{2}K_{AC}}\right|$

$\Leftrightarrow K_{AC}=0$ hoặc $K_{AC}=-\frac{1}{3}$ (loại)

Vậy phương trình đường thẳng AC đi qua C và có hệ số góc $k=0$ là: $y=3$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}3x-4y+27=0\\y-3=0\end{cases} \Rightarrow A(-5;3)$

$\Rightarrow$ Phương trình cạnh AB là: $\frac{x+5}{2+5}=\frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow 4x+7y-1=0$

Vậy phương trình các cạnh là

AB: $4x+7y-1=0$; AC: $y=3$; BC: $4x+3y-5=0$

ài 41:

$A\in Ox, B\in Oy \Rightarrow A(a;0), B(0;b), \overrightarrow{AB}=(-a;b)$

Vecto chỉ phương của d là $\vec{u}=(1;2)$

Tọa độ trung điểm I của AB là $\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$

A và B đối xứng với nhau qua d khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\ I\in d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b=0\\ a-\frac{b}{2}+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-4\\b=-2\end{cases}$$

Vậy $A(-4;0)$, $B(0;-2)$

i 42:

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow M(4;1)$; $\overrightarrow{AH}=(0;-1)$

Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua M và nhận $\overrightarrow{AH}$ làm VTPT nên có phương trình là: $y=1$.

Giả sử $B(b;1)$, vì M là trung điểm BC nên $C(8-b;1)$.

Ta có $\overrightarrow{BH}=(3-b;2)$; $\overrightarrow{AC}=(5-b;-3)$

Do H là trực tâm của tam giác nên

$\overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (3-b)(5-b)-2.3=0 \Leftrightarrow b^2-8b+9=0 \Leftrightarrow b=4\pm\sqrt{7}$

Vậy $B(4-\sqrt{7};1)$; $C(b=4\pm\sqrt{7})$ hoặc $B(4+\sqrt{7};1)$; $C(b=4-\sqrt{7})$

Bài 43:

Do phương trình đường thẳng AB là $x+2y-3=0$

nên gọi $A\left(x_1;\frac{3-x_1}{2}\right);B\left(x_2;\frac{3-x_2}{2}\right)$

Khi đó tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{x_1+x_2-1}{3};\frac{4-x_1-x_2}{6}\right)$

Lại do G thuộc đường $x+y-2=0$ nên thay vào ta có $x_1+x_2=10$.

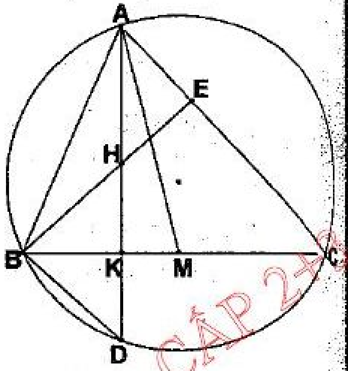
Mặt khác theo giả thiết $AB=\sqrt{5}$

Nên $(x_1-x_2)^2+\left(\frac{3-x_1}{2}-\frac{3-x_2}{2}\right)^2=5$ thay $x_2=10-x_1$ vào, giải ra ta c

$x_1=6$ hay $x_1=4$

Suy ra $A\left(6;\frac{-3}{2}\right);B\left(4;\frac{-1}{2}\right)$ hay ngược lại.

Bài 44:



Gọi M là trung điểm của BC, H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của BH và AC. Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_d},\overrightarrow{u_d}$ lần lượt là vtpt, vtcp của đường thẳng d. Tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-y-4=0\\3x+5y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

AD vuông góc với BC nên $\overrightarrow{n_{AD}}=\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)$, mà AD đi qua điểm D suy phương trình của $AD:1(x-4)+1(y+2)=0\Leftrightarrow x+y-2=0$. Do A là gi điểm của AD và AM nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}3x+5y-8=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow A(1;1)$$

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y-4=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\Rightarrow K(3;-1)$$

Tứ giác HKCE nội tiếp nên $\widehat{BHK}=\widehat{KCE}$,

mà $\widehat{KCE}=\widehat{BDA}$ (nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

Suy ra $\widehat{BHK}=\widehat{BDK}$, vậy K là trung điểm của HD nên $H(2;4)$.

Do $B\in BC\Rightarrow B(t;t-4)$, kết hợp với M là trung điểm BC suy ra $C(7-t;3-t)$

$\overrightarrow{HB}(t-2;t-8);\overrightarrow{AC}(6-t;2-t)$. Do H là trực tâm của tam giác ABC nên

$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(t-2)(6-t)+(t-8)(2-t)=0\Leftrightarrow(t-2)(14-2t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=7\end{array}\right.$

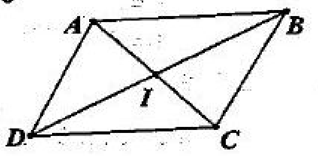
Do $t\le3\Rightarrow t=2\Rightarrow B(2;-2),C(5;1)$. Ta có

$\overrightarrow{AB}=(1;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0)\Rightarrow\overrightarrow{n_{AB}}=(3;1),\overrightarrow{n_{AC}}=(0;1)$

Suy ra $AB:3x+y-4=0$; $AC:y-1=0$.

Bài 45:

Ta có $S_{ABCD}=6\Rightarrow S_{ABC}=3\Rightarrow S_{IAB}=\frac{3}{2}$



Gọi giao điểm 2 đường chéo là I(x;0) thuộc Ox

$d(I;AB)=\frac{|x+1|}{\sqrt{2}}$ vì đường thẳng AB có phương trình $x+y+1=0$

Mà $d(I;AB)=\frac{2S_{IAB}}{AB}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, hay $|x+1|=3$

Suy ra x = 2, x = −4 (loại). Vậy I(2;0)

Theo công thức trung điểm suy ra C(3; 2), D(2;3).

Bài 46:

Ta có $S_{GAB}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{5}{2}$. Gọi $G(a;-a)$ thuộc đường thẳng: $x+y=0$

$d(G;AB)=\frac{|a+2|}{5}$ vì AB có phương trình: $4x+3y+2=0$

mà $d(G;AB)=\frac{2S_{GAB}}{AB}=\frac{5}{5}=1$, suy ra |a+2| = 5, hay a = 3 thỏa mãn, hay $G(3;-3)$

Theo công thức trọng tâm suy ra $C(10;-9)$.

Bài 47:

Ta có $d_1\perp d_2, d_1\cap d_2=A(0;-1)$, nên tam giác ABC vuông tại A.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC,

Tam giác ABC vuông tại A nên $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{AH^2}$.

$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$ nhỏ nhất khi AH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng I

Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{AI}$ làm véc tơ pháp tuyến, với $\overrightarrow{AI}=(3;2)$; I(3;1) nên phương trình đường thẳng Δ là $3x+2y-11=0$.

Bài 48:

Ta có $S_{\Delta ABC}=4\Leftrightarrow S_{\Delta MBC}=2, S_{\Delta MBC}=\frac{1}{2}d(M;AB).AB$

$d(M;AB)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow AB=4\sqrt{2}\Rightarrow MN=2\sqrt{2}$

Do MN song song AB, nên phương trình đường thẳng $MN: x - y + 1 = 0$

Gọi $N(t; t+1)$. Từ $MN = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t-1)^2 = 8 \Leftrightarrow t = 3; t = -1$ (loại)

Suy ra N(3; 4) thỏa mãn.

Bài 49:

Gọi M là trung điểm AC. Khi đó phương trình tham số của BM : $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -5 + 9t \end{cases}$

$B, M \in BM \Rightarrow B(-2+5b; -5+9b), M(-2+5m; -5+9m)$

M là trung điểm BC $\Rightarrow C(10m-6; 18m-11)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (12; -8), \overrightarrow{BC} = (10m - 5b - 4; 18m - 9b - 6), \overrightarrow{BH} = (16 - 5b; -2 - 9b)$,

$\overrightarrow{AC} = (10m - 8; 18m - 12)$

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 12(10m - 5b - 4) - 8(18m - 9b - 6) = 0 \Leftrightarrow b = 2m \qquad (1)$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (16 - 5b)(10m - 8) + (-2 - 9b)(18m - 12) = 0 \qquad (2)$

Thế (1) vào (2), ta được

$106m^2 - 105m + 26 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}; m = \frac{26}{53}$

Với $m = \frac{1}{2}, b = 1$ ta được B(3;4), C(-1;-2)

Với $m = \frac{26}{53}, b = \frac{52}{53}$ ta được $B\left(\frac{154}{53}; \frac{203}{53}\right), C\left(-\frac{58}{53}; -\frac{115}{53}\right)$

Bài 50:

Nhận xét: Góc giữa hai đường thẳng BC và AB là 45^0 và ΔABC cân tại A nê
ΔABC vuông cân tại A

$A \in AB \Rightarrow A(4 - 2a; a)$; $C \in BC \Rightarrow C(c; 7 - 3c)$

$\overrightarrow{AC} = (2a + c - 4; -a - 3c + 7)$, vtcp của AB là $\vec{u}_1 = (2; -1)$

$\overrightarrow{AC}.\vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow c = 3 - a \ (1)$

Tọa độ B là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2;1)$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow (2a - 2)^2 + (1 - a)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array}\right.$

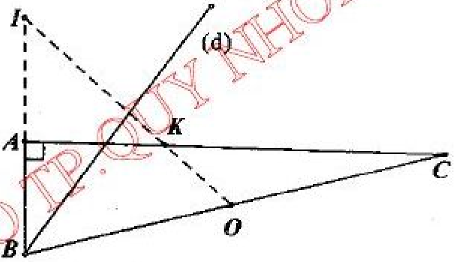
Do $x_A > 0$ nên chỉ nhận $a = 0 \Rightarrow c = 3$.

Suy ra A(4;0) và C(3;–2)

Bài 51:

$B \in (d): x + 2y - 5 = 0$ nên gọi $B(5 - 2b; b)$, vì B, C đối xứng với nhau qua O suy ra $C(2b - 5; -b)$ và $O(0;0) \in BC$

Gọi I đối xứng với O qua phân giác trong góc B là (d): $x + 2y - 5 = 0$ nên $I(2;4)$ và $I \in AB$



Tam giác ABC vuông tại A

nên $\overrightarrow{BI} = (2b - 3; 4 - b)$ vuông góc

với $\overrightarrow{CK} = (11 - 2b; 2 + b)$

$(2b - 3)(11 - 2b) + (4 - b)(2 + b) = 0$

$\Leftrightarrow -5b^2 + 30b - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 5 \end{array}\right.$

Với $b = 1 \Rightarrow B(3;1), C(-3;-1) \Rightarrow A(3;1) \equiv B$ loại

Với $b = 5 \Rightarrow B(-5;5), C(5;-5) \Rightarrow A\left(\frac{31}{5}; \frac{17}{5}\right)$

Vậy $A\left(\frac{31}{5}; \frac{17}{5}\right); B(-5;5); C(5;-5)$

Bài 52:

Gọi $C(c; 3c - 9)$ và M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(m; 1 - m)$

Suy ra: $B(2m - c; 11 - 2m - 3c)$.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I\left(\frac{2m - c + 3}{2}; \frac{7 - 2m - 3c}{2}\right)$

Vì I nằm trên đường thẳng $3x - y - 9 = 0$ nên

$3\left(\frac{2m - c + 3}{2}\right) - \left(\frac{7 - 2m - 3c}{2}\right) - 9 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow M(2; -1)$

Phương trình $BC: x - y - 3 = 0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $C(3;0), B(1;-2)$

Bài 53:

Gọi H là trung điểm BC . Có H đối xứng với A qua $\Delta \Rightarrow H(-2; -2)$.

BC đi qua H và $BC \perp AH \Rightarrow BC: x + y + 4 = 0$

Gọi $B(t; -4 - t) \Rightarrow C(-4 - t; -t) \Rightarrow \overrightarrow{CE} = (5 + t; -3 - t)$, $\overrightarrow{AB} = (t - 6; -10 - t)$

Vì $CP \perp AB$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CP} = 0 \Leftrightarrow (t - 6)(t + 5) + (t + 3)(t + 10) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -6 \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} B(0; -4) \\ C(-4; 0) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} B(-6; 2) \\ C(2; -6) \end{cases}$.

Bài 54:

TH1: Ta có: $\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta AMB}} = 2$ (1)

Trong ΔABC, dựng đường cao AH. (1) $\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}CM.AH}{\frac{1}{2}BM.AH} = \frac{MC}{MB} = 2$

Khi đó: $\overline{MC} = -2\overline{MB} \Rightarrow M\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng d_1: $16x - 9y - 4 = 0$

TH2: $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} = 2$ (2) (2) $\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}BM.AH}{\frac{1}{2}CM.AH} = \frac{MB}{MC} = 2$

Khi đó: $\overline{MB} = -2\overline{MC} \Rightarrow M\left(2; -\frac{2}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng d_2: $x - 2 = 0$

Bài 55:

Đặt l_A: $x + y - 3 = 0$, m_B: $x - y + 1 = 0$, h_C: $2x + y + 1 = 0$

$A \in l_A \Rightarrow A(a; 3-a)$; $B \in m_B \Rightarrow B(b;b+1)$; $C \in h_C \Rightarrow C(c;-1-2c)$

$AB \perp h_C \Rightarrow 3a + b - 4 = 0$ (1)

Gọi M là trung điểm của AC $\Rightarrow M\left(\frac{a+c}{2}; \frac{2-a-2c}{2}\right)$

$M \in m_B \Rightarrow 2a + 3c = 0$ (2)

Gọi N là trung điểm BM $\Rightarrow N\left(\frac{a+2b+c}{4}; \frac{4-a+2b-2c}{4}\right)$

$l_A \perp m_B \Rightarrow N \in l_A \Rightarrow 4b - c - 8 = 0$ (3)

Giải hệ ba phương trình (1), (2) và (3) ta được

$$A\left(\frac{12}{17}; \frac{39}{17}\right), B\left(\frac{32}{17}; \frac{49}{17}\right), C\left(-\frac{8}{17}; -\frac{1}{17}\right)$$

Bài 56:

Từ giả thiết suy ra ΔABD đều.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, trung điểm của AB là M(2;1)

$\Rightarrow$ pt trung trực của đoạn AB: $x + y - 3 = 0$

D thuộc trung trực của AB $\Rightarrow D(t; 3 - t)$

+ ABCD là hình thoi nên:

$AD = AB \Leftrightarrow (t-1)^2 + (3-t)^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$

+ Với $t = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow D(2+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$

+ Với $t = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow D(2-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$, $C(-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$

Bài 57:

AB đi qua M(4; 5) nên phương trình AB có dạng:

$ax + by - 4a - 5b = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

$BC \perp AB$ và BC đi qua N(6; 5) $\Rightarrow$ phương trình $BC: bx - ay - 6b + 5a = 0$

Diện tích hình chữ nhật:

$S = d(P,AB).d(Q,BC) = 16 \Leftrightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|4a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 16$

$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 3b^2 = \pm 4(a^2 + b^2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a^2 + 4ab + b^2 = 0 \\ 5a^2 - 4ab + 7b^2 = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right.$$

+ Với $a + b = 0$ chọn $a = 1$, $b = -1 \Rightarrow$ phương trình AB: $x - y + 1 = 0$

+ Với $3a + b = 0$ chọn $a = 1$, $b = -3 \Rightarrow$ phương trình AB: $x - 3y + 11 = 0$

Bài 58:

A(1;0), B(2;0). Suy ra đường thẳng AB chính là trục Ox

$\overrightarrow{AB} = (1;0)$, AB = 1

ABCD là hình bình hành nên CD // AB và diện tích của hình bình hành ABCD là

$S = AB.d(C, AB) \Leftrightarrow 4 = d(C, Ox)$

Vậy C, D thuộc đường thẳng (d) // Ox và cách trục Ox một khoảng bằng 4 nên d có phương trình: y = 4 hoặc y = –4.

Khi d có phương trình y = 4, gọi $C(x_c; 4), D(x_D; 4)$

Vì $I = AC \cap BD$ nên I là trung điểm của AC và BD đồng thời I thuộc đường thẳng: y = x, do đó:

$\frac{x_c + 1}{2} = \frac{0+4}{2} \Leftrightarrow x_c = 3$; $\frac{x_D + 2}{2} = \frac{4+0}{2} \Leftrightarrow x_D = 2$

Vậy C(3;4), D(2;4)

Khi d có phương trình y = -4, gọi $C(x_c; -4)$, $D(x_D; -4)$

Vì $I = AC \cap BD$ nên I là trung điểm của AC và BD đồng thời I thuộc đường thẳng: y = x, do đó:

$\frac{x_c + 1}{2} = \frac{0-4}{2} \Leftrightarrow x_c = -5$; $\frac{x_D + 2}{2} = \frac{-4+0}{2} \Leftrightarrow x_D = -6$

Vậy $C(-5; -4), D(-6; -4)$

Bài 59:

Gọi I(x; y) là trung điểm của đoạn AB và $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của ΔABC.

Do $\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CI}$ nên $x_G = \frac{2x-1}{3}; y_G = \frac{2y-1}{3}$.

Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \frac{2x-1}{3} + \frac{2y-1}{3} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } I(5; -1)$$

Ta có $IA = IB = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Gọi (C) là đường tròn có tâm $I(5;-1)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow (C): (x-5)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$.

Tọa độ hai điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ hai điểm A, B là $\left(4;-\frac{1}{2}\right), \left(6;-\frac{3}{2}\right)$.

Bài 60:

$B \in d_1 \Rightarrow B(b; 8-b)$, $D \in d_2 \Rightarrow (2d-3; d)$.

Khi đó $\overline{BD} = (-b+2d-3; b+d-8)$ và trung điểm của BD là

$$I\left(\frac{b+2d-3}{2}; \frac{-b+d+8}{2}\right).$$

Theo tính chất hình thoi ta có :

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{u_{AC}}.\overline{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b + 13d - 13 = 0 \\ -6b + 9d - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Suy ra $B(0;8)$; $D(-1;1)$.

Khi đó $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$; $A \in AC \Rightarrow A(-7a+31; a)$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABCD}}{BD} = 15\sqrt{2} \Rightarrow IA = \frac{15}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(-7a + \frac{63}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 6 \end{array}\right. \Rightarrow A(-11;6)$$

hoặc $A(10;3)$ (loại)

Suy ra $C(10;3)$.

Bài 61:

1. Đường thẳng d_3 vuông góc với d_2 nên có dạng $x + y + c = 0$

Vì d_3 qua $A(-2;0)$ nên $-2 + 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2$

2. Vì $A(-2;0) \in d_1$ nên

Để d_4 và d_1, d_2, d_3 cắt nhau tạo thành một hình vuông khi và chỉ khi $d_4 // d_3$

$d(A, d_4) = d(A, d_2)$ (*)

Do đó d_4 có dạng : $x + y + D = 0$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{|-2+0+D|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2-0-2|}{\sqrt{2}}$$

$$|D-2| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 6 \\ D = -2 \end{array}\right.$$

Vậy đường thẳng d_4 là $x + y + 6 = 0$ hoặc $x + y - 2 = 0$

Bài 62:

Toạ độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1;3)$

B thuộc d_1 nên $B(7-2b;b)$; C thuộc d_2 nên $C(c;8-5c)$

vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b - c = 2 \\ b - 5c = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $B(3;2)$ và $C(2;-2)$

Bài 63:

M thuộc d_1, N thuộc d_2 nên $M(2a-1;a), N(b;3b-2)$

$MN = \sqrt{5} \Leftrightarrow MN^2 = 5 \Leftrightarrow (b-2a+1)^2 + (3b-a-2)^2 = 5$ (1)

$MN // d_3 \Leftrightarrow \overline{MN}.\overline{n_{d_3}} = 0 \Leftrightarrow (b-2a+1; 3b-a-2).(2;1) = 0 \Leftrightarrow a = b$

Thay vào (1) ta được $a = b = 0$ hoặc $a = b = 2$

Vậy có 4 điểm thoả mãn bài toán là: $M(-1;0)$, $N(0;-2)$ hoặc $M(3;2)$, $N(2;4)$

Bài 64:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó tọa độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1;1)$$

Điểm A' là điểm đối xứng với A qua G. Vậy tọa độ của A' được cho bởi:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_G - x_A \\ y_{A'} = 2y_G - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(1;-1)$$

Đường thẳng A'B qua A' và song song với $d_1 \Rightarrow A'B: x - 2y - 3 = 0$

Điểm $B = (A'B) \cap (d_2)$, tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5;1).$$

Tương tự, ta có tọa độ điểm $C(-3;-1)$.

Phương trình cạnh AC là: $x - y + 2 = 0$

Phương trình cạnh AB là: $x + 2y - 7 = 0$

Phương trình cạnh BC là: $x - 4y - 1 = 0$

Bài 65:

Gọi d là đường thẳng qua M song song với AC.

Phương trình đường thẳng d là: $2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-y+\frac{7}{2}=0$.

Gọi I là trung điểm của AB, $I = AB \cap (d)$.

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+y+3=0 \\ 2x-y+\frac{7}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{13}{6};-\frac{5}{6}\right)$

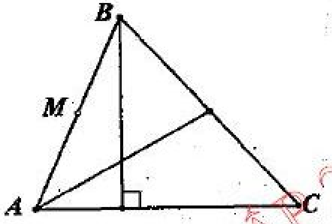
Ta có $A = (AC)\cap(AB)$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x+y+3=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3};-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow B(-4;1)$

Đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$ làm véc tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng BC là: $3x-7y+19=0$

Bài 66:



A thuộc trung tuyến kẻ từ A nên $A(-3a-1;a)$

B thuộc đường cao kẻ từ B nên $B(b;b+1)$

Vì M là trung điểm AB nên ta có

$\begin{cases} \frac{-3a-1+b}{2}=-1 \\ \frac{a+b+1}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

Suy ra $A(-4;1)$, $B(2;3)$

Phương trình đường thẳng AC: $(x+4)+(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y+3=0$

Điểm C thuộc đường thẳng AC nên $C(c;-c-3)$

Mặt khác trung điểm BC thuộc trung tuyến kẻ từ A do đó ta có:

$\left(\frac{c+2}{2}\right)+3\left(\frac{-c}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow c=2$. Vậy $C(2;-5)$

Bài 67:

a. Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{AB}}=\overrightarrow{AB}=(-6;-3)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là: $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow x-2y+3=0$

Khoảng cách từ đỉnh C đến đường thẳng AB là:

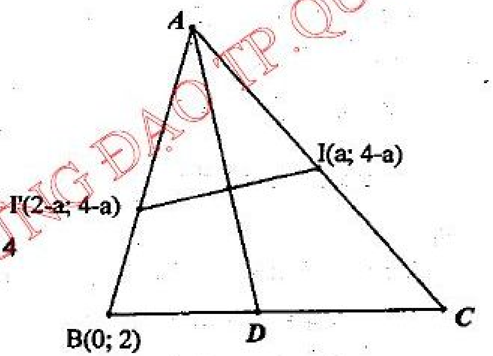
$d(C,AB)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|7+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$

b. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-6;-3), \overrightarrow{AC}=(6;-2)$

$\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$

$=\frac{-6.6+(-3).(-2)}{\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}\sqrt{6^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\widehat{BAC}=135^0$

Bài 68:



Gọi $I(a;4-a)$.

I' là điểm đối xứng với I qua đường phân giác trong góc A.

Khi đó $I'(2-a;4-a)$

và $I' \in AB$; $\overrightarrow{BI'}=(2-a;2-a)$.

TH1: $a=2 \Rightarrow I(2;2)$, $I' \equiv B$.

$S_{\Delta ABI}=2.S_{\Delta ABI}=AH.BI=|y_A-2|.2=4$

$(H=AD\cap BI)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_A=4 \\ y_A=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;4) \\ A(1;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(3;0) \\ C(3;4) \end{array}\right.$

TH2: $a\neq 1$. Chọn vec tơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}=(1;-1)$

Phương trình đường thẳng $AB: x-y+2=0$

Điểm A là giao điểm của đường thẳng AB và phân giác trong góc $A \Rightarrow A(1;3)$

$\overrightarrow{AI}=(a-1;1-a)$. Chọn vec tơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\overrightarrow{n'}=(1;1)$

Phương trình đường thẳng $AC: x+y-4=0$.

$S_{\Delta ABC}=d(B;AC).AI=\frac{|0+2-4|}{\sqrt{2}}.|a-1|\sqrt{2}=4 \Leftrightarrow |a-1|=2 \Leftrightarrow a=3 \vee a=-1$

Với a = 3 ta có $I(3;1) \Rightarrow C(5;-1)$

Với a = –1 ta có $I(-1;5) \Rightarrow C(-3;7)$

Vậy có bốn điểm C thỏa mãn là $C(5;-1);C(-3;7);C(3;0)$ hoặc $C(3;4)$

69:

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{21}{5};\frac{13}{5}\right)$

Đường thẳng d đi qua M, song song với AB có phương trình $x-2y=0$

Gọi $M=d\cap BD \Rightarrow M\left(\frac{28}{5};\frac{14}{5}\right)$

Gọi K là trung điểm của $MM' \Rightarrow K\left(\frac{19}{5};\frac{19}{10}\right)$

Đường thẳng IK vuông góc với AB có phương trình: $2x+y-\frac{19}{2}=0$

$I = IK \cap BD \Rightarrow I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$.

$H = IK \cap AB \Rightarrow H\left(\frac{18}{5};\frac{23}{10}\right)$. Do H là trung điểm AB $\Rightarrow A(3;2)$.

I là trung điểm của BD và AC $\Rightarrow C(4;3), D\left(\frac{14}{5};\frac{12}{5}\right)$

Bài 70:

Toạ độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+7y-7=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(7;0)$

Ta thấy: Đỉnh có toạ độ $(0;1) \in d_1 : x+7y-7=0 \Rightarrow A(0;1)$

Do ABCD là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow \vec{n}_{BD} = (1;2) \Rightarrow \vec{n}_{AC} = (2;-1)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AC là: $2x-y+1=0$

Toạ độ trung điểm I của AC, BD là nghiệm: $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow I(1;3)$

Do I là trung điểm của AC, BD $\Rightarrow C(2;5), D(-5,6)$

Do $\overline{BC} = (-5;5) \Rightarrow$ phương trình BC là: $x+y-7=0$

Do $\overline{AD} = (-5;5) \Rightarrow$ phương trình AD là: $x+y-1=0$

Do $\overline{CD} = (-7;1) \Rightarrow$ phương trình CD là: $x+7y-37=0$

Bài 71:

Điểm $A \in d \Rightarrow A(t;2-3t)$

Ta có: $d(C;DM) = \frac{1}{2}d(A;DM) \Rightarrow \Leftrightarrow |4t-4| = 8 \Leftrightarrow |t-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-1 \end{array}\right.$

+ Với $t = 3 \Rightarrow A(3;-7)$ (loại vì A, C phải khác phía đối với DM)

+ Với $t = -1 \Rightarrow A(-1;5)$ (thỏa mãn)

Giả sử $D(m;m-2)$.

$\begin{cases} \overline{AD} \perp \overline{CD} \\ AD = CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+1)(m-3)+(m-7)(m+1)=0 \\ (m+1)^2+(m-7)^2=(m-3)^2+(m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m=5 \Rightarrow D(5;3)$

Gọi I là tâm của hình vuông $\Rightarrow$ I là trung điểm của AC $\Rightarrow I(1;1)$

Do I là trung điểm của BD $\Rightarrow B(-3;-1)$

Bài 72:

Gọi M', N' lần lượt điểm đối xứng của M và N qua I $\Rightarrow M'(3, 2)$ và $N'\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

Phương trình đường thẳng M'N': $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-2}{-5/3} \Leftrightarrow x-3y+3=0$

Điểm $A \in MN$ và C đối xứng với A qua I nên C là giao điểm của M'N' với PQ

Phương trình đường thẳng PQ: y = 1.

Tọa độ điểm C là nghiệm hệ $\begin{cases} x-3y+3=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow C(0;1) \Rightarrow A(2;-2)$

Gọi Q' điểm đối xứng của Q qua I $\Rightarrow Q'(5;-2)$

Điểm $D \in MQ$ và B đối xứng với D qua I nên B là giao điểm của M'Q' với PN

Phương trình M'Q': $\frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 2x+y-8=0$; phương trình PN : $x = 4$

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ $\begin{cases} 2x+y-8=0 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(4, 0) \Rightarrow D(-2, -1)$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(2;-2), B(4;0), C(0;1), D(-2;-1)$

Bài 73:

Phương trình CD: $x+2y-4=0$

Tọa độ $D(6;-1)$

Phương trình đường thẳng CB: $2x-y+7=0$

Điểm $B = CB \cap BD = (1;9)$

I là trung điểm BD $\Rightarrow I\left(\frac{7}{2};4\right) \Rightarrow A(9;5)$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(9;5)$; $B(1;9)$; $C(-2;3)$; $D(6;-1)$

Bài 74:

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác góc ∠DAC.

Khi đó $C'(-1;-1)$.

Đặt $A(1;a)$, khi đó tâm hình bình hành $I\left(2;\frac{a-1}{2}\right)$ là trung điểm AC và thuộc đường thẳng chứa cạnh BD nên : $2-2.\frac{a-1}{2}-1=0 \Leftrightarrow a=2$

Do đó $A(1;2), I\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Ta suy ra phương trình đường thẳng AC' là : $3x-2y+1=0$.

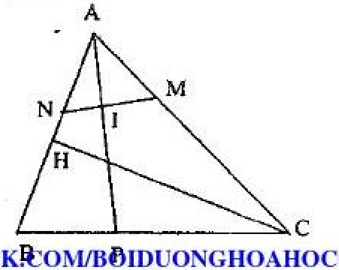
Khi đó tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases}$

Ta được $D(-1;-1)$, từ đó suy ra $B(5;3)$

Vậy tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành ABCD là :

$A(1;2), B(5;3), D(-1;-1)$

Bài 75:



Gọi d là đường thẳng qua M vuông góc AD cắt AD, AB lần lượt tại I và N, ta có :

Phương trình d: $x+y+1=0$, $I = d \cap AB$

$\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow N(-1;0)$ (I là trung điểm MN)

$AB \perp CH \Rightarrow$ Phương trình AB: $x-2y-1=0$, $A=(AB)\cap(AD)\Rightarrow A(1;1)$

$AB=2AM=2AN\Rightarrow$ N là trung điểm $AB\Rightarrow B(-3;-1)$

Phương trình $(AM): 2x-y-1=0, C=(AM)\cap(CH)\Rightarrow C\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

Bài 76:

Gọi $A(2;1); B(b;0); C(0;c)$; $b, c>0$.

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên

$\overline{AB}.\overline{AC}=0\Leftrightarrow c=-2b+5\ge 0\Leftrightarrow 0\le b\le\frac{5}{2}$

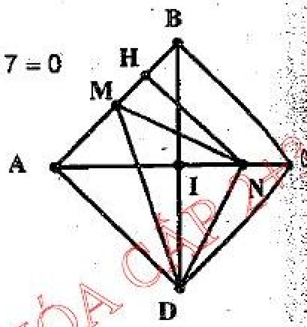
$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}=(b-2)^2+1=b^2-4b+5$

Do $0\le b\le\frac{5}{2}\to S_{max}$ khi $b=0$. Suy ra $B(0;0)$; $C(0;5)$.

Bài 77:

Đường thẳng BC đi qua $B(1;-4)$ và $M\left(2;\frac{1}{2}\right)$

nên có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{\frac{9}{2}}\Leftrightarrow 9x-2y-17=0$



Điểm $C\in BC\Rightarrow C\left(t;\frac{9t-17}{2}\right), t\in\mathbb{R}$

$\overline{AB}=(2;-8)$; $\overline{AC}=\left(t+1;\frac{9t-25}{2}\right)$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overline{AB}.\overline{AC}=0$

Suy ra $t+1-4.\frac{9t-25}{2}=0\Leftrightarrow t=3$. Vậy $C(3;5)$

Bài 78:

Gọi cạnh hình vuông là a.

Tính được $MN^2=DN^2=\frac{5}{8}a^2, MD^2=\frac{5}{4}a^2\Rightarrow MD^2=MN^2+DN^2$

Nên tam giác DMN vuông cân tại N

Gọi $N(x;2x-9)$ ta có

$MN\perp DN\Rightarrow\overline{MN}.u_{DN}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)+2\left(2x-9-\frac{7}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{11}{2}$

Suy ra, $N\left(\frac{11}{2};2\right)$, $MN^2=\frac{45}{4}=\frac{5a^2}{8}\Rightarrow a=3\sqrt{2}$.

Ta lại có $\widehat{AMD}=\widehat{AND}, \cos\widehat{AMD}=\frac{AM}{DM}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Gọi vtpt của AN là $\bar{n}=(u;v), u^2+v^2\ne 0$

Ta có $\left|\cos\left(\bar{n};\overline{n_{DN}}\right)\right|=\left|\frac{2u-v}{\sqrt{5}\sqrt{u^2+v^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow 3u^2-4uv=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\3u=4v\end{array}\right.$

Với $u=0$ ta có pt của AN là $y-2=0$

Gọi tọa độ $A(x;2)$ vì $AM=\frac{a}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow A(1;2)\\x=4\Rightarrow A(4;2)\end{array}\right.$

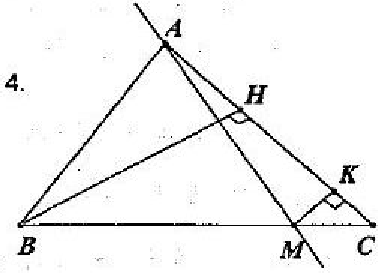
Với $3u=4v$ ta có pt của AN là $4\left(x-\frac{11}{2}\right)+3(y-2)=0\Leftrightarrow 4x+3y-28=0$

Gọi tọa độ $A\left(x;\frac{28-4x}{3}\right)$ vì

$$AM=\frac{a}{2}\Rightarrow\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{28-4x}{3}-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{14}{5}\Rightarrow A\left(\frac{14}{5};\frac{28}{5}\right)\\x=\frac{23}{5}\Rightarrow A\left(\frac{23}{5};\frac{16}{5}\right)\end{array}\right.$$

Thử lại, có hai điểm thỏa mãn là $A(1;2)\vee A\left(\frac{14}{5};\frac{28}{5}\right)$

Bài 79:



Viết phương trình đường BC : $y=-x+3$

Viết phương trình đường cao từ A: $y=x+4$.

Tìm được hoành độ $x=-\frac{1}{2}$

Tọa độ $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$

Gọi M là giao của đường thẳng với cạnh BC

Lập luận: $S_{\Delta ABM}=3S_{\Delta AMC}\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=4S_{\Delta AMC}\Leftrightarrow BH=4MK$ tìm ra:

$\overline{CM}=\frac{1}{4}\overline{CB}$

Tìm ra $M\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$

Viết phương trình AM: $y=\frac{-1}{11}x+\frac{8}{11}\Leftrightarrow x+11y-8=0$

Bài 80:

Ta có $\overline{CG}=2\overline{GM}\Rightarrow C(-4;3)$

Gọi N đối xứng với M qua d $\Rightarrow N\left(\frac{8}{5};\frac{11}{5}\right)\in AC$

$\Rightarrow AC: x + 7y - 17 = 0 \Rightarrow A(3;2) \Rightarrow B(1;4)$

Vậy tọa độ các điểm là: $A(3;2), B(1;4), C(-4;3)$

Bài 81:

Ta có: $\overline{GA} = 2\overline{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_A - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 3 \end{cases}$

Ta có: $\overline{AM} = (1;-4)$ nên phương trình cạnh *BC* là:

$x - 3 - 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 7 = 0$

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17$

Toạ độ *B*, *C* là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x - 4y - 7 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy toạ độ *B*(7; 0), *C*(–1; –2) hoặc *B*(–1; –2), *C*(7; 0)

Bài 82:

Phương trình cạnh *BC* là: $x + 1 + 8\left(y + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 8y + 13 = 0$

Toạ độ *B* là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x + 8y + 13 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3;-2)$

Vì *M* là trung điểm *BC* nên *C*(–5; –1)

Giả sử *A*(*a*; 8*a* – 5) Vì *N* là trung điểm *AC* nên $N\left(\frac{a-5}{2}; 4a-3\right)$

Vì *N* thuộc trung tuyến *BN* nên: $3\frac{a-5}{2} + 5(4a-3) + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow A(1;3)$

Bài 83:

Thay tọa độ *I* vào phương trình Δ ta được $3.2 - 4.\frac{5}{2} + 4 = 0$ (luôn đúng) nê

$I \in \Delta$

Vì $A \in \Delta$ nên giả sử $A(4a;3a+1)$ mà *B* đối xứng với *A* qua *I* nên *I* là trun

điểm *AB* $\Rightarrow B(4-4a;4-3a)$.

Từ C dựng $CH \perp AB$ tại *H* thì $CH = d_{(C,AB)} = \frac{|3.2 - 4(-5) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$

Theo giả thiết $S_{ABC} = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2}CH.AB = 15 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.6.\sqrt{(4-8a)^2 + (3-6a)^2} = 15$

$\Leftrightarrow \sqrt{25(1-2a)^2} = 5 \Leftrightarrow |2a-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow A(4;4), B(0;1) \\ a = 0 \Rightarrow A(0;1), B(4;4) \end{array}\right.$

Vậy hai điểm cần tìm là (4;4); (0;1) hoặc ngược lại

i 84:

Tìm được $I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$, M(3; 0)

Lập được phương trình $AD: x + y - 3 = 0$. Tính được $AD = 2\sqrt{2}$

Toạ độ A, D là nghiệm hệ $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Tìm được: $A(2;1), D(4;-1), C(7;2), B(5;4)$ hoặc $A(2;1), D(4;-1), C(7;2), B(5;4)$

i 85:

Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Vì A,B thuộc đường thẳng $x - 2y - 3 = 0$ nên ta được:

$\begin{cases} x_1 - 2y_1 - 3 = 0 \quad (1) \\ x_2 - 2y_2 - 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$

G là trọng tâm tam giác ABC nên: $x_1 + y_1 - 1 = 3x_G; x_2 + y_2 - 1 = 3y_G$

G thuộc đường thẳng $x + y - 2 = 0 \Rightarrow x_1 + y_1 - 1 + x_2 + y_2 - 1 = 6$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 8 \qquad (3)$

$AB = 5 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 5 \qquad (4)$

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{22}{3} \\ y_1 + y_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

Từ (1),(2) $x_1 - x_2 = 2(y_1 - y_2)$ thay vào (4) được $|y_1 - y_2| = 1$

1: $y_1 - y_2 = 1$. Tìm được $A\left(\frac{14}{3};\frac{5}{6}\right), B\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{6}\right)$

2: $y_1 - y_2 = -1$. Tìm được $A\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{6}\right), B\left(\frac{14}{3};\frac{5}{6}\right)$

86:

Ta có $d_{(I,AD)} = \sqrt{5} \Rightarrow ID = 5$ vì $AD = 2AB \Rightarrow D \in (C): (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$

Do đó tọa độ D là nghiệm của hệ : $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = -1 \\ x = -3; y = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow D(1;-1)$ (Vì D có hoành độ dương)

$\overline{B} = -2\overline{ID} \Rightarrow B(-11;8)$. Phương trình $AB: x - 2y + 27 = 0$; $A(-5;11)$

Ta có $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow C(-5;-4)$

87:

Vì $A \in (d): x + y - 1 = 0$ nên $A(a;1-a)$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng CD chính là độ dài cạnh của hình vuông, do diện tích hình vuông bằng 5 nên độ dài này bằng $\sqrt{5}$: $d(A,CD) = \frac{|2a - (1-a) + 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |3a+2|=5 \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=\dfrac{-7}{3}$

Với $a=1 \Rightarrow A(1;0)$. Phương trình AD (qua A và $\perp$ CD): $(x-1)+2(y-0)=0$ hay $x+2y-1=0$.

Tọa độ $D = AD \cap CD$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow D(-1;1)$

Đường tròn (D) tâm D bán kính $\sqrt{5}$ có PT: $(x+1)^2+(y-1)^2=5$.

Tọa độ $C = CD \cap (D)$ là nghiệm của $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Rightarrow C(0;3)$ hoặ $C(-2;-1)$.

Với $C(0;3)$ thì trung điểm O của AC là $O\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Do O cũng là trung điể của BD nên $\begin{cases} x_B = 2x_O - x_D \\ y_B = 2y_O - y_D \end{cases} \Rightarrow B(2;2)$

Với $C(-2;-1)$ thì tương tự ta có $B(0;-2)$.

Với $a=\dfrac{-7}{3} \Rightarrow A\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$. Gọi $M=(d)\cap(CD) \Rightarrow M\left(\dfrac{-2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$. Dễ thấy trong trường hợp này các đỉnh của hình vuông lần lượt đối xứng với các đỉnh tươn ứng vừa tìm được ở trường hợp trên qua M nên dễ dàng tìm được $D\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ và $C\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{-10}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{13}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{16}{3}\right)$.

Vậy có 4 hình vuông ABCD thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$A(1;0), B(2;2), C(0;3), D(-1;1)$; $A(1;0), B(0;-2), C(-2;-1), D(-1;1)$

$A\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{10}{3}\right), B\left(\dfrac{-10}{3};\dfrac{4}{3}\right), C\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{1}{3}\right), D\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$

$A\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{10}{3}\right), B\left(\dfrac{-4}{3};\dfrac{16}{3}\right), C\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{13}{3}\right), D\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$

Bài 88:

Gọi I là trung điểm của CD. I thuộc $d_1: 2x+3y+17=0 \Rightarrow I(3a-1;-2a-5)$

Sử dụng điều kiện $d_1: 2x+3y+17=0$ là trung trực của DC tìm được $I(-4;-3$ suy ra $C(-2;0)$ $A \in d_2 \Rightarrow A(a;3-5a)$. Mặt khác ABCD là hình bình hành nên $\overline{AB}=\overline{DC} \Rightarrow B(a+4;9-5a)$

Vì $\overline{DA}$ và $\overline{DC}$ không cùng phương nên $\dfrac{a+6}{4} \neq \dfrac{9-5a}{6} \Leftrightarrow a \neq 0$.

Đường thẳng $d_2: 5x+y-3=0$ là phân giác góc BAC

Nên: $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u_2}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{u_2}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{26}{\sqrt{52}}=\dfrac{26a-13}{\sqrt{(2+a)^2+(5a-3)^2}} \Leftrightarrow a=1$.

Vậy tọa độ các điểm $A(1;-2), B(5;4)$.

Bài 89:

Điểm $D = DG \cap BD$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 5x-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow D(-1;-1)$

Giả sử $G(t;2t+1) \in DG$.

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên theo công thức trọng tâm $\Rightarrow B(3t+1;6t+2)$

Vì $B \in BD \Leftrightarrow 5(3t+1)-3(6t+2)+2=0 \Leftrightarrow 3t=1 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$

Với $t=\dfrac{1}{3}$ ta được tọa độ B(2;4)

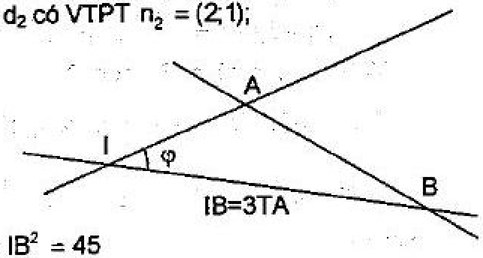
Theo tính chất hình bình hành ta có $\overline{AB}=\overline{CD} \Rightarrow A(1;1)$

Bài 90:

Điểm $I = d_1 \cap d_2 \Rightarrow$ tạo độ của I là n_0 của hệ $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy I(1;1)

Từ giả thiết d_1 có VTPT $\overline{n_1}=(2;-1)$; d_2 có VTPT $\overline{n_2}=(2;1)$;



Gọi φ là góc của d_1 và d_2

$\Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{|4-1|}{5}=\dfrac{3}{5} \Rightarrow \sin\varphi=\dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.3IA.\dfrac{4}{5}=\dfrac{6IA^2}{5}$

Từ giả thiết: $S_{\Delta IAB}=6 \Rightarrow IA^2=5 \Rightarrow IB^2=45$

$\forall A \in d_1 \Rightarrow A(a,2a-1)$ với $a>0$, $a \neq 1$

Phương trình $IA^2=5 \Leftrightarrow (a-1)^2+(2a-2)^2=5 \Leftrightarrow 5(a-1)^2=5 \Leftrightarrow a=2$ hoặc $a=0$ (loại)

Với $a=2 \Rightarrow A(2;3)$

$\forall B \in d_{21} \Rightarrow B(a,3-2b)$

$\Rightarrow IB^2=(b-1)^2+(2-2b)^2=5(b-1)^2$

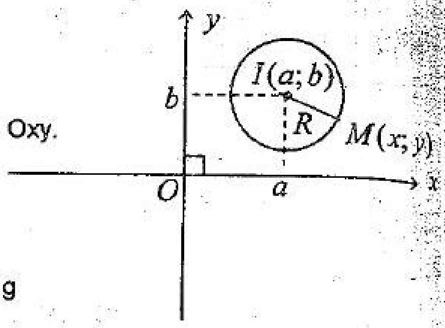
$IB^2=45 \Leftrightarrow (b-1)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=4 \Rightarrow B(4;-5) \\ b=-2 \Rightarrow B(-2;7) \end{array}\right.$

Với $A(2;3);B(4;5)$ phương trình cần tìm là $\dfrac{x-2}{4-2}=\dfrac{y-3}{-5-3} \Leftrightarrow 4x+y-11=0$

Với $A(2;3)$; $B(-2;7)$ phương trình cần tìm là $\dfrac{x-2}{-2-2}=\dfrac{y-3}{7-3} \Leftrightarrow x+y-5=0$

§ 2: ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC VỀ ĐƯỜNG TRÒN



I. Phương trình đường tròn:

1. Phương trình chính tắc:

Định lý: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Phương trình của đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R là:

$$(C): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn

Đặc biệt: Khi $I \equiv O$ thì $(C): x^2+y^2=R^2$ (hay: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$)

2. Phương trình tổng quát:

Định lý: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Phương trình: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình của đường tròn (C) có tâm I (a;b), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

Định lý: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

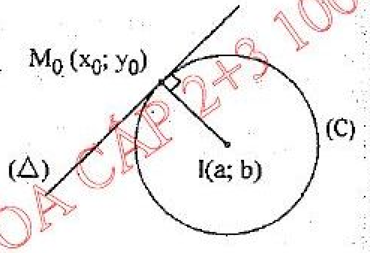
Phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

tại điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$ là:

$\Delta: x_0x+y_0y-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$

Hay: Δ qua $M_0 \perp \overline{M_0I}$



III. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn:

Định nghĩa: Cho đường tròn (O;R) và một điểm M cố định .

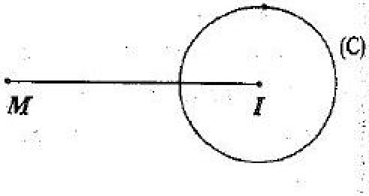
Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O) được ký hiệu là $\wp_{M/(C)}$ là một số được xác định như sau:

$\wp_{M/(C)}=d^2-R^2$ (với $d=OM$)

$\wp_{M/(C)}>0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài đường tròn (C)

$\wp_{M/(C)}<0 \Leftrightarrow$ M nằm trong đường tròn (C)

$\wp_{M/(C)}=0 \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn (C)



Định lý:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường tròn $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ có tâm I (a; b) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Phương tích của điểm M đối với đường tròn (C) là

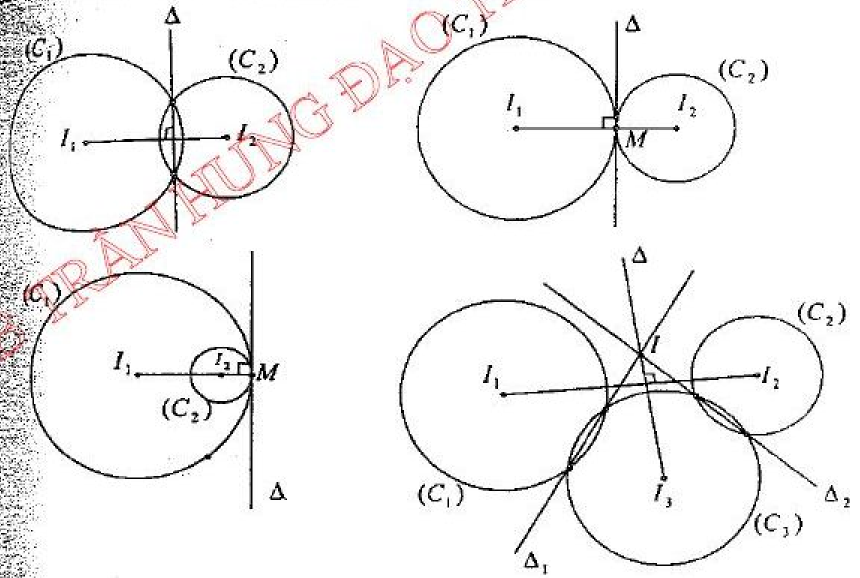
$\wp_{M/(C)}=x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c$

Trục đẳng phương của hai đường tròn:

lý: Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn khác tâm là một đường thẳng vuông góc với đường nối hai tâm.

Đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

xác định trục đẳng phương



lý: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) không cùng tâm có phương trình:

$(C_1): x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$

$(C_2): x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$

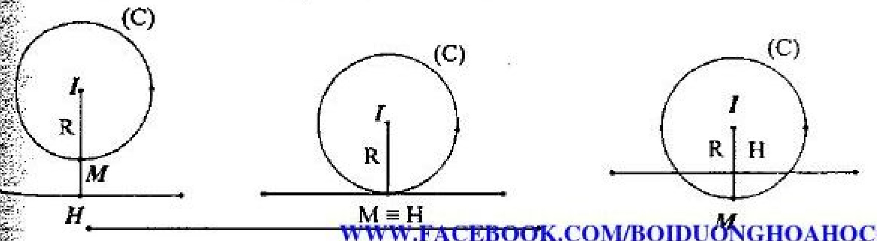
Phương trình trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) là:

$$\Delta: 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+c_2-c_1=0$$

nhớ: $\boxed{x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2}$

Các vấn đề có liên quan:

trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:



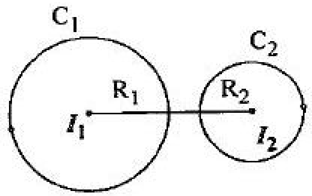
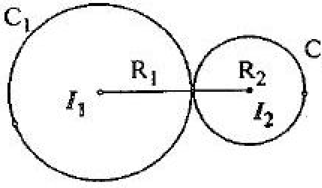
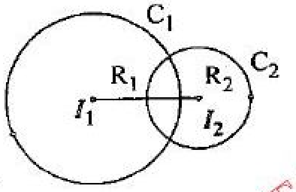
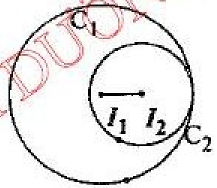
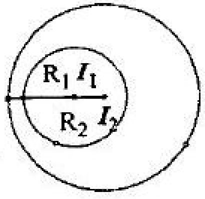
Định lý:

$(\Delta) \cap (C) = \varnothing \Leftrightarrow d(I;\Delta) > R$

(Δ) tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow d(I;\Delta) = R$

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn :

Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1, bán kính R_1 và (C_2) có tâm I_2, bán kính R_2

Trường hợp	Kết luận	Số tiếp tuyến chung
 $I_1 > R_1 + R_2$	**(C_1) không cắt (C_2)** **(ngoài nhau)**	**4**
 $I_1I_2 = R_1 + R_2$	**(C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2)**	**3**
 $\lvert R_1 - R_2 \rvert < I_1I_2 < R_1 + R_2$	**(C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt**	**2**
 $I_1I_2 = \lvert R_1 - R_2 \rvert$	**(C_1) tiếp xúc trong (C_2)**	**1**
 $\lvert R_1 - R_2 \rvert < I_1I_2$	**(C_1) không cắt (C_2)** **(lồng nhau hay đựng nhau)**	**0**

Chùm đường tròn:

ịnh lý: Cho hai đường tròn cắt nhau:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$$

$$(C_2): x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$$

Phương trình đường tròn (C) đi qua giao điểm của (C_1) và (C_2) có dạng:

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1) + \mu(x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2) = 0 \qquad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$$

CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Bài toán về viết phương trình đường tròn

Để viết được phương trình đường tròn ta sử dụng một trong hai dạng chính tắc và tổng quát, thông thường thì căn cứ vào giả thiết để thiết lập nên các phương trình, hệ phương trình từ đó tìm được tâm và bán kính và phương trình đường tròn (C)

hú ý:

Một điểm $M \in (C) \Leftrightarrow$ tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường tròn (C) và $IM = R$

Một đường thẳng Δ tiếp xúc với đường (C) tại điểm M $\Leftrightarrow d(I,\Delta) = IM = R$ và $\overrightarrow{IM}\overrightarrow{u_\Delta} = 0$

t biệt: Đường tròn (C) tiếp xúc với Ox, Oy $\Leftrightarrow R = |a| = |b|$ với $I(a;b)$

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài nhau $I_1I_2 = R_1 + R_2$

Các bài toán về tam giác nội tiếp, ngoại tiếp một đường tròn

Í DỤ MINH HỌA

í dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x - y = 0$, $\Delta_2: x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

Giải:

Cách 1:

Phương trình 2 đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là:

$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x-7y}{5\sqrt{2}}$ hay $d_1: 2x+y=0;\ d_2: x-2y=0$.

Tâm K của (C_1) là giao của d_1 hoặc d_2 với đường tròn (C).

Toạ độ K là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5} \end{cases} \text{(I)} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x-2y=0 \\ (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5} \end{cases} \text{(II)}$$

Hệ (I) vô nghiệm.

Hệ (II) có nghiệm $\begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$

Bán kính của (C_1) là $R_1 = d(K;\Delta_1) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Cách 2:

Gọi tâm đường tròn (C_1) là $K(a;b)$, $K \in (C) \Leftrightarrow (C): (a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$ (1)

Đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$

$$\Leftrightarrow d(K,\Delta_1) = d(K,\Delta_2) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=-\frac{1}{2}b & (2) \\ a=2b & (3) \end{array}\right.$$

Giải hệ (1) và (2) vô nghiệm

Giải hệ (1) và (3) ta được kết quả $(a;b) = \left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$

Vậy tâm và bán kính là: $K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$ và $R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ Oxy ;cho ΔABC có $A(0;2)$, $B(-2;-2)$ và $C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao hạ từ B, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔHMN

Giải:

Ta có $M(-1;0), N(1;-2), \overline{AC} = (4;-4)$. Giả sử $H(x;y)$ ta có

$$\begin{cases} \overline{BH}.\overline{AC} = 0 \\ H \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2)-4(y+2) \\ 4x+4(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(1;1)$$

Giả sử phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$

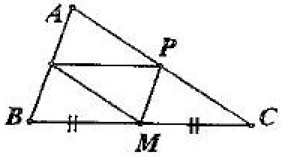
Thay tọa độ M, N, H vào phương trình đường tròn ta có hệ

$$\begin{cases} 2A-C=1 \\ 2A-4B+C=-5 \\ 2A+2B+C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-x+y-2=0$

dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có hai cạnh $AB: x+y-2=0, AC: 2x+6y+3=0$ và cạnh BC có trung điểm $M(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC

Giải:



Tọa độ $A = AB \cap AC$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+6y+3=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{15}{4};-\frac{7}{4}\right)$

Gọi P là trung điểm của AC.

Khi đó MP//AB và MP đi qua $M(-1;1)$,

nên có phương trình là $x+y=0$

Tọa độ $P = AC \cap MP$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+6y+3=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$

P là trung điểm của AC nên $C\left(-\frac{9}{4};\frac{1}{4}\right)$

ương tự: $B\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

Khi đó đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là

$(C): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{8}$

dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-12x-4y+36=0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C)

Giải:

Đường tròn $(C) \Leftrightarrow x^2+y^2-12x-4y+36=0 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2=4$

Vậy (C) có tâm $I(6,2)$ và $R=2$

Vì đường tròn (C_1) tiếp xúc với 2 trục Ox, Oy nên tâm I_1 nằm trên 2 đường thẳng $y=\pm x$ và vì (C) có tâm $I(6,2)$, $R=2$ nên tâm $I_1(x;\pm x)$ với $x>0$.

1: Tâm $I_1 \in$ đường thẳng $y=x \Rightarrow I(x,x)$, bán kính $R_1 = x$

(C_1) tiếp xúc ngoài với (C) $\Leftrightarrow II_1 = R + R_1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+(x-2)^2} = 2 + x$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+(x-2)^2 = 4+4x+x^2 \Leftrightarrow x^2-16x-4x+36=0$

$\Leftrightarrow x^2-20x+36=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=18$ ứng với $R_1 = 2 \vee R_1 = 18$

Có 2 đường tròn là: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$; $(x-18)^2+(y-18)^2=18$

TH 2: Tâm $I_1 \in$ đường thẳng $y=-x \Rightarrow I(x,-x)$; $R_1 = x$

Tương tự như trên, ta có $x = 6$

Có 1 đường tròn là $(x-6)^2+(y+6)^2=36$

Tóm lại ta có 3 đường tròn thỏa mãn là:

$(x-2)^2+(y-2)^2=4; (x-18)^2+(y-18)^2=18; (x-6)^2+(y+6)^2=36$

× ***Thí dụ 5:*** Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sa cho $AB=\sqrt{3}$

Giải:

Phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$ có tâm $I(1;-2)$ và $R=\sqrt{3}$

Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên $AB \perp IM$ tại trung điểm của đoạn AB.

Ta có $AH = BH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Có 2 vị trí cho AB đối xứng qua tâm I.

Gọi A'B' là vị trí thứ 2 của AB. Gọi H' là trung điểm của A'B'

Ta có: $IH' = IH = \sqrt{IA^2-AH^2} = \sqrt{3-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$

Ta có: $MI = \sqrt{(5-1)^2+(1+2)^2} = 5$ và $MH = MI - HI = 5 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$

$$MH' = MI + H'I = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

Ta có: $R_1^2 = MA^2 = AH^2 + MH^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{49}{4} = \dfrac{52}{4} = 13$

$$R_2^2 = MA'^2 = A'H'^2 + MH'^2 = \frac{3}{4} + \frac{169}{4} = \frac{172}{4} = 43$$

Vậy có 2 đường tròn (C') thỏa mãn là: $(x-5)^2+(y-1)^2=13$ hoặ $(x-5)^2+(y-1)^2=43$

Thí dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C) đi qu hai điểm $A(0;5)$, $B(2;3)$ và có bán kính $R=\sqrt{10}$

Giải:

Gọi $I(a,b)$ là tâm của đường tròn (C)

Phương trình (C), tâm I, bán kính $R=\sqrt{10}$ là $(x-a)^2+(y-b)^2=10$

Điểm $A \in (C) \Leftrightarrow (0-a)^2+(5-b)^2=10 \Leftrightarrow a^2+b^2-10b+15=0$ (1)

Điểm $B \in (C) \Leftrightarrow (2-a)^2+(3-b)^2=10 \Leftrightarrow a^2+b^2-4a-6b+3=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-10b+15=0 \\ 4a-4b+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$

Vậy ta có 2 đường tròn thỏa mãn là

$(x+1)^2+(y-2)^2=10$; $(x-3)^2+(y-6)^2=10$

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-1)^2=4$; và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d .Tìm toạ độ giao điểm của (C) và (C')

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và $R=2$

Đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d thì tâm I' của (C') cũng đối xứng với I qua d và $R=R'=2$

Phương trình đường thẳng qua I vuông góc với d là: $\Delta: x+y-2=0$

Ta có $\Delta \cap d = K$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow K\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow I'(2;0)$

$\Rightarrow (C'): (x-2)^2+y^2=4$

Vậy đường tròn cần tìm là $(C'): (x-2)^2+y^2=4$ và giao điểm là $A(1;0)$; $B(3;2)$

Thí dụ 8: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với đường tròn đi qua các trung điểm các cạnh của tam giác OAB

Giải:

Ta có OA = 3 ; OB = 4 ; AB = 5

P là nửa chu vi tam giác OAB . P = 6

S là diện tích tam giác OAB : S = 6

r là bán kính đường tròn nội tiếp $r = \dfrac{S}{p} = 1$

Tam giác OAB nằm ở góc phần tư thứ nhất có 2 cạnh là 2 trục tọa độ nên tâm I của đường tròn nội tiếp (C) có tọa độ dương cách 2 trục tọa độ 1 khoảng bằng $1 \Rightarrow I(1;1)$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA;OB;AB

$\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};0\right); N(0;2); P\left(\dfrac{3}{2};2\right)$

Giả sử đường tròn (C') qua M, N, P có phương trình

(C'): $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a + c + \frac{9}{4} = 0 \\ 4b + c + 4 = 0 \\ 3a + 4b + c + \frac{25}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$

Đường tròn (C') có tâm $I'\left(\frac{3}{4};1\right)$ bán kính $r' = \frac{5}{4}$, Ta có $II' = \frac{1}{4} = r' - r$.

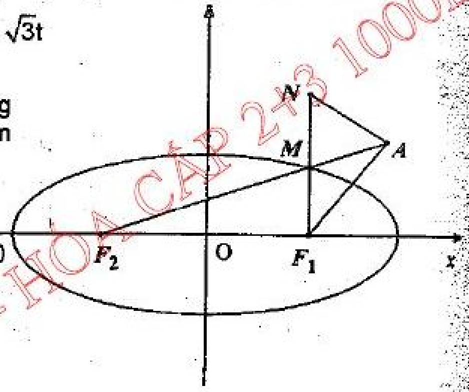
Vậy hai đường tròn (C) và (C') tiếp xúc trong .

Thí dụ 9: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $A(2;\sqrt{3})$ và elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2

Giải:

Từ $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$. Vậy $F_1(-1;0)$; $F_2(1;0)$;

$\Rightarrow \overrightarrow{F_1A} = (3;\sqrt{3}) \Rightarrow (AF_1): \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases}$



Toạ độ của điểm M là giao có tung độ dương của AF_1 với (E) là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{3}t \\ y = t \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9t^2 - 4\sqrt{3}t - 4 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow M\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Vì M là trung điểm của $NF_2 \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_M - x_{F_2} \\ y_N = 2y_M - y_{F_2} \end{cases} \Rightarrow N\left(1;\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

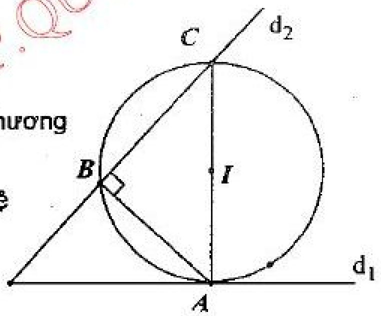
Ta có: $\overrightarrow{AN} = \left(-1;\frac{4}{\sqrt{3}} - 3\right)$; $\overrightarrow{AF_2} = \left(-1;-\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AF_2} = 0$

Vậy ΔANF_2 là tam giác vuông tại A. Nên đường tròn ngoại tiếp ΔANF_2 có tâm là M, bán kính $R = MF_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ phương trình đường tròn là:

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

Thí dụ 10: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* , cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Giải:



Cách 1:

Điểm $A \in d_1 \Rightarrow A\left(a;-a\sqrt{3}\right)$ $(a > 0)$

Đường thẳng AC qua $A \perp d_1$ nên có phương trình: $x - \sqrt{3}y - 4a = 0$

Tọa độ điểm $C = AC \cap d_2$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x - \sqrt{3}y - 4a = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-2a;-2\sqrt{3}a\right)$

Đường thẳng AB qua $A \perp d_2$ nên có phương trình: $x + \sqrt{3}y + 2a = 0$

Tọa độ điểm $B = AB \cap d_2$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x + \sqrt{3}y + 2a = 0 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Theo giả thiết $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow BA.BC = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$; $C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right)$

Đường tròn (*T*) có tâm I là trung điểm của AC suy ra $I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$ và bán kính

$R = \frac{AC}{2} = 1$

Nên có phương trình $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$

Cách 2:

Ta có $d_1 \cap d_2 = O(0;0)$

$\cos\widehat{AOB} = \cos(d_1;d_2) = \frac{\left|\sqrt{3}.\sqrt{3} - 1\right|}{2.2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

Khi đó

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(OA.\sin\widehat{AOB}\right).\left(OA\tan\widehat{AOB}\right).\sin\widehat{BAC}$$

$$= \frac{1}{2}OA^2.\sin 60^0.\tan 60^0.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{8}OA^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a^2 + \left(-a\sqrt{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Mà $A \in d_1 \Rightarrow A\left(a; -\sqrt{3}a\right) \Rightarrow OA^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a^2 + 3a^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 4a^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ v

$a > 0 \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right)$

Khi đó đường thẳng AC đi qua A và vuông góc với d_1 có phương trình

$$1\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}\left(y+1\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$$

Tọa độ điểm $C = AC \cap d_1$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -2\right)$$

Sau khi tìm được tọa độ A và C ta làm như trên

Thí dụ 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳn $d: 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Ox t A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho AB = CD = 2.

Giải:

Điểm $I \in d \Rightarrow I(t; 2t+3)$.

$AB = CD \Leftrightarrow d(I, AB) = d(I, CD) \Leftrightarrow d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow |x_I| = |y_I|$

$\Leftrightarrow |t| = |2t+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2t - 3 \\ t = 2t + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3 \end{array}\right.$

+ Với $t = -1 \Rightarrow I(-1; 1) \Rightarrow R = \sqrt{2}$ ta được đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

+ Với $t = -3 \Rightarrow I(-3; -3) \Rightarrow R = \sqrt{10}$ ta được đường tròn

$(C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$

Vậy có hai phương trình đường tròn là:

$(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ hoặc $(C): (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$

Hoặc ta có thể làm như sau:

Giả sử $I(a, b) \in d \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$ (1)

$AB = CD \Leftrightarrow d(I, AB) = d(I, CD) \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a = b & (2) \\ a = -b & (3) \end{array}\right.$

Giải (1) và (2) hoặc (1) và (3) ta cũng được các phương trình đường tròn trê

Thí dụ 12: Trong mặt phẳng có hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$, $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với *d* và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt *A* và *B* sao cho *AB* vuông góc với d.

Giải:

Cách 1:

Phương trình đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Đường tròn (C) cắt (C_1) tại A, B nên đường thẳng AB chính là trục đẳng phương của (C) và (C_1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB : $-2ax - 2by + c = 4$

$\Rightarrow$ AB có vtcp $\vec{v} = (b; -a)$

Đường thẳng d có vtcp $\vec{u} = (1; 1)$ vì $d \perp AB \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow a = b$ (1)

Mặt khác (C) tiếp xúc với đường thẳng d

$$\Leftrightarrow d_{(I,d)} = \frac{|a - b - 4|}{\sqrt{2}} = R \Leftrightarrow \frac{|a - b - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \Leftrightarrow 8 = 2a^2 - c \quad (2)$$

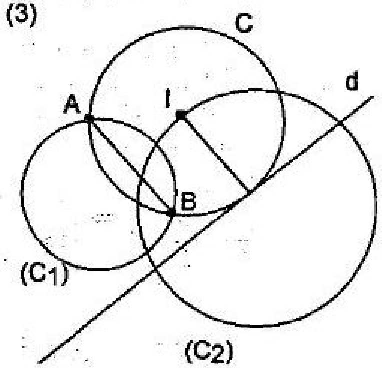
Mặt khác $I \in (C_2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0$ (3)

Thế (1) vào (3) ta có : $a = b = 3$

Thế $a = b = 3$ vào (2) ta có : $c = 10$

Vậy phương trình đường tròn (C) :

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$



Cách 2:

Gọi $I \in (C_2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0$

Vì đường tròn tâm I cắt (C_1) có tâm O tại A, B sao cho $AB \perp (d)$.

Mà $IO \perp AB \Rightarrow IO // (d)$

$$\Rightarrow d_{(I/d)} = d_{(O/d)} = 2\sqrt{2} = R \Leftrightarrow \frac{|a - b - 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a - b - 4| = 4$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \\ |a - b - 4| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \\ a - b = 8 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Hệ (1) $\Leftrightarrow a = 7 \pm 2\sqrt{2}; b = -1 \pm 2\sqrt{2}$; (loại) vì I và O phải cùng phía so với (d).

Hệ (2) $\Leftrightarrow a = b = 3 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$

Phương trình đường tròn : $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

Cách 3:

Gọi $I(a;b)$ và *R* là tâm và bán kính của *(C)* nên $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Vì $I\in(C_2)$ nên $a^2+b^2-12a+18=0$ (3)

Do (C) tiếp xúc (d) nên $R=d\left(I,(d)\right)=\dfrac{|a-b-4|}{\sqrt{2}}$.

Do đó $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=\dfrac{(a-b-4)^2}{2}$.

Theo đề (C) cắt (C_1) tại A, B. Phương trình đường thẳng AB là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=\dfrac{(a-b-4)^2}{2}\\ x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow -2ax-2by=\dfrac{(a-b-4)^2}{2}-a^2-b^2-4$$

Suy ra vecto pháp tuyến của AB là $\vec{n}=(a;b)$.

Do AB vuông góc với d nên $\vec{n}=(a;b);\vec{n_d}=(1;-1)\Rightarrow\vec{n}.\vec{n_d}=0\Leftrightarrow a-b=0$ (4)

Từ (3) và (4) ta có hệ $\begin{cases}a^2+b^2-12a+18=0\\ a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=3\end{cases}$

Phương trình đường tròn : $(x-3)^2+(y-3)^2=8$

Thí dụ 13: Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(-1;1), qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-y+1-\sqrt{2}=0$.

Giải:

Gọi I(a;b) là tâm và R là bán kính của đường tròn cần tìm.

Ta có $IA=IO=d(I;\Delta)=\dfrac{|a-b+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=R$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}IA=IO\\ IO=d(I,\Delta)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=a^2+b^2\\ \sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|a-b+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0,b=1\Rightarrow R=1\\ a=-1,b=0\Rightarrow R=1\end{array}\right.$$

Vậy có 2 đường tròn thỏa mãn là: $x^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(x+1)^2+y^2=1$.

Dạng 2: Bài toán liên quan tới điểm và đường tròn

Để làm tốt phần này xem lại vị trí tương đối của điểm và đường tròn (phần lí thuyết)

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $d: x-y+3=0$. Tìm toạ độ điểm M nằm trên đường thẳng d sao cho đường tròn tâm M có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C)

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$

Điểm $M\in d\Leftrightarrow M(t;t+3)$

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases}MI=R+R'\\ R'=2R\end{cases}\Leftrightarrow MI=R+2R\Leftrightarrow(x-1)^2+(x+2)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm $M_1(-2;1)$ hoặc $M_2(1;4)$

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$, gọi I là tâm của (C) .Tìm toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho góc IMO bằng 30°

Giải:

Cách 1 :

Phương trình đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$

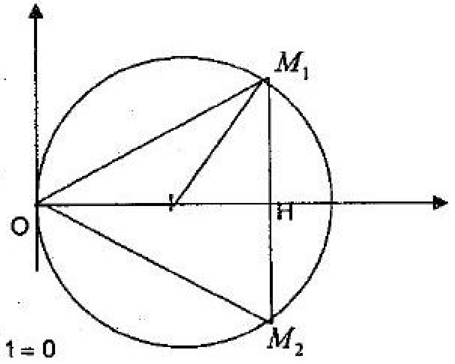
Suy ra: I(1,0); O(0,0) ∈ (C);

Góc IMO = 30° suy ra góc IOM = 30°

Phương trình đường thẳng OM có hệ số góc là $k=\mp\tan30^\circ=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Có dạng: $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

Tọa độ M là nghiệm hệ $\begin{cases}y\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}x=0\\ (x-1)^2+y^2-1=0\end{cases}$



Suy ra tọa độ $M\left(\dfrac{3}{2};\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2 :

Gọi $M(a;b)\in(C)\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5}$ (1)

Điểm $O\in(C)\Rightarrow IO=IM=1$

Tam giác IOM có $\widehat{OIM}=120^0$ nên

$OM^2=IO^2+IM^2-2IO.IO.\cos120^0\Leftrightarrow a^2+b^2=3$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta được $M\left(\dfrac{3}{2};\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Cách 3 :

$OI=1$, $\widehat{IOM}=\widehat{IMO}=30^0$, do đối xứng ta sẽ có 2 điểm đáp án đối xứng với Ox

H là hình chiếu của M xuống OX. Tam giác OM_1H là nửa tam giác đều

$$OI = 1 \Rightarrow OH = \frac{3}{2} \Rightarrow OM = \frac{3}{\sqrt{3}}, HM = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$$

Vậy $M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) biết A nằm trên d.

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(4;-3)$ và bán kính R = 2

Vì I nằm trên d, do đó AI là một đường chéo của hình vuông

$\Rightarrow$ x = 2 hoặc x = 6 là hai tiếp tuyến của (C) nên:

Hoặc A là giao điểm của d với đường thẳng: $x = 2 \Rightarrow A(2;-1)$

Hoặc A là giao điểm của d với đường thẳng: $x = 6 \Rightarrow A(6;-5)$

Với $A(2;-1)$ thì $C(6;-5)$; hai đỉnh kia là $(2;-5);(6;-1)$

Với $A(6;-5)$ thì $C(2;-1)$; hai đỉnh kia là $(6;-1);(2;-5)$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$. Tìm các giá trị thực của m để trên đường thẳng y = m tồn tại đúng 2 điểm mà từ mỗi điểm có thể kẻ được hai tiếp tuyến với C sao cho góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^0.

Giải:

Đường tròn (C) có tâm O(0;0) bán kính bằng 1 .

Giả sử từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) thỏa mãn góc MAB bằng 60^0 thì góc AMO bằng $30^0 \Rightarrow MO = 2$

Vậy M chạy trên đường tròn tâm O bán kính bằng 2 .

Số điểm nằm trên đường thẳng y = m kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) thỏa mãn giả thiết cũng là số giao điểm của đường tròn (C') tâm O bán kính bằng 2 với đường thẳng y = m .

Để có đúng 2 điểm theo giả thiết thì $|m| < 2$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$, và các điểm A(7;9), B(0;8). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho biểu thức P = MA + 2MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Đường tròn (C) có tâm I(1;1) và bán kính R = 5.

Gọi $J\left(\frac{5}{2};3\right)$. Ta chứng minh với mọi điểm M thuộc (C) ta có MA = 2MJ.

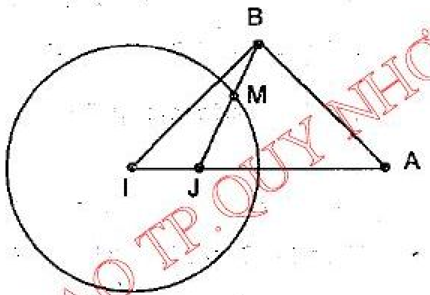
Thật vậy $MA = 2MJ \Leftrightarrow MA^2 = 4MJ^2 \Leftrightarrow \left(\overline{MI} + \overline{IA}\right)^2 = 4\left(\overline{MI} + \overline{IJ}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\overline{MI}\left(\overline{IA} - 4\overline{IJ}\right) = 3R^2 + 4IJ^2 - IA^2$.

Đẳng thức này đúng vì $\overline{IA} - 4\overline{IJ} = \bar{0}$; $3R^2 + 4IJ^2 - IA^2 = 0$.

Vì thế với mọi điểm M thuộc (C) ta có:

$MA + 2MB = 2(MJ + MB) \ge 2BJ$.



Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BJ (Vì B nằm ngoài đường tròn (C); J nằm trong đường tròn (C)).

Do đó MA + 2MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường tròn (C) và đoạn thẳng BJ.

BJ có phương trình $2x + y - 8 = 0$.

Tọa độ giao điểm của BJ và (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

Thử lại ta có điểm $M(1;6)$ thuộc đoạn JB thỏa mãn bài toán

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua điểm M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10

Giải:

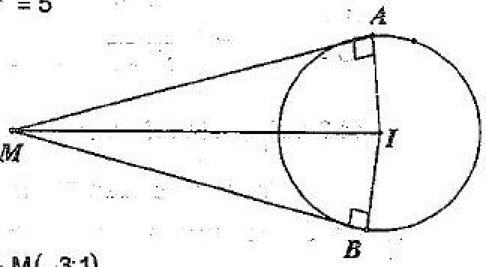
Cách 1:

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Ta có $S_{MAIB} = 2S_{MAI} = 2.\frac{1}{2}MA.AI = 10 \Leftrightarrow MA = \frac{10}{AI} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

Vì $AI = R = \sqrt{5}$ và $MI = \sqrt{MA^2 + AI^2} = 5$

Giả sử $M(t; -t-2) \in \Delta$.



Ta có $\overline{MI} = (t-2; -t-3)$

$\Leftrightarrow MI^2 = (t-2)^2 + (-t-3)^2 = 25$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Rightarrow M(2;-4)$. Với $t = -3 \Rightarrow M(-3;1)$

Cách 2: Giả sử $M(x_M; y_M)$

$M \in \Delta \Leftrightarrow x_M + y_M + 2 = 0 \quad (1^*)$

Mặt khác $MI = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x_M - 2)^2 + (y_M - 1)^2 = 5 \quad (2^*)$

Giải hệ (1*) và (2*) ta được tọa độ điểm $M(-3;1)$

Cách 3: Sau khi tính được MI = 5

Đường tròn (C') tâm I bán kính R' = MI = 5 có phương trìn

$(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$

Tọa độ điểm $M=(C')\cap\Delta$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y+2=0\\(x-2)^2+(y-1)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}\Rightarrow M(-3;1)$$

Dạng 3: Bài toán về đường thẳng và đường tròn

Để làm tốt phần này xem lại vị trí tương đối của đường thẳng và đường trò (phần lý thuyết)

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C):x^2+y^2=1$. Đường tròn (C) tâm $I(2,2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{2}$. Viết phương trìn đường thẳng AB.

Giải:

Đường thẳng OI nối 2 tâm của 2 đường tròn (C), (C') là đường phân giác y = x. Do đó, đường AB ⊥ đường y = x ⇒ hệ số góc của đường thẳng AB bằng –1.

Vì $AB=\sqrt{2}\Rightarrow$ A, B phải là giao điểm của (C) với Ox, Oy.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}A(0,1);B(1,0)\\A'(-1,0);B'(0,-1)\end{array}\right.$

Suy ra phương trình AB : $y=-x+1$ hoặc $y=-x-1$.

Cách khác: phương trình AB có dạng: $y=-x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của AB là

$x^2+(-x+m)^2=1\Leftrightarrow 2x^2-2mx+m^2-1=0$ (2)

(2) có $\Delta'=2-m^2$, gọi x_1,x_2 là nghiệm của (2) ta có :

$$AB^2=2\Leftrightarrow 2(x_1-x_2)^2=2\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2=1\Leftrightarrow\frac{4\Delta'}{a^2}=1\Leftrightarrow 2-m^2=1\Leftrightarrow m=\pm1$$

Vậy phương trình AB : $y=-x\pm1$.

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường trò $(C):x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $\Delta:x+my-2m+3=0$ (m l tham số thực), gọi I là tâm của (C) .Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệ và B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Cách 1 :

Phương trình $(C)\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+2)^2=2$

Suy ra tâm $I(-2;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

Diện tích tam giác IAB là $S=\frac{1}{2}IA.IB\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}R^2=1$,

S lớn nhất $\Leftrightarrow\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow IA\perp IB$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là

$$d(I,\Delta)=\frac{R}{\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow\frac{|-2-2m-2m+3|}{\sqrt{1+m^2}}=1\Leftrightarrow(1-4m)^2=1+m^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{8}{15}\end{array}\right.$$

Cách 2:

Phương trình $(C)\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+2)^2=2$

Suy ra tâm $I(-2;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

Kẻ $IH\perp\Delta$ suy ra H là trung điểm của AB, với $IH=d(I,\Delta)=\frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}$

Đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt

khi $IH<R\Leftrightarrow\frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}<\sqrt{2}\Leftrightarrow 14m^2-8m-1<0$

Đặt $IH=x$ với $0<x<\sqrt{2}$

Trong ΔIHA vuông ta có $HA^2=IA^2-IH^2=2-x^2\Leftrightarrow HA=\sqrt{2-x^2}$

Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IH.AB=x.\sqrt{2-x^2}$

Áp dụng BĐT Cosi ta có $S_{\Delta IAB}=x\sqrt{2-x^2}=\sqrt{x^2(2-x^2)}\le\frac{x^2+(2-x^2)}{2}=1$

$\Rightarrow\max S_{\Delta IAB}=1$ khi $x^2=2-x^2\Leftrightarrow x=1$

$$\Leftrightarrow\frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}=1\Leftrightarrow 15m^2-8m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{8}{15}\end{array}\right.$$

Cách 3:

Phương trình $(C)\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+2)^2=2$

Suy ra tâm $I(-2;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

Kẻ $IH\perp\Delta$ suy ra H là trung điểm của AB, với $IH=d(I,\Delta)=\frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}$

Đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi IH < R

Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IH.AB=IH.HA\le\frac{IH^2+HA^2}{2}=\frac{IA^2}{2}=1$

Vậy $\max S_{\Delta IAB}=1\Leftrightarrow IA=IH=1$ (hiển nhiên IH < R)

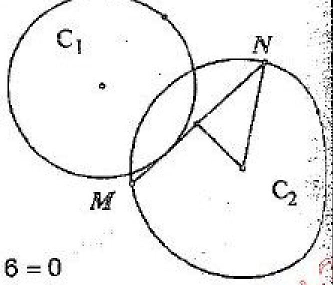
$$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}=1 \Leftrightarrow 15m^2-8m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{8}{15}\end{array}\right.$$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các đường tròn $(C_1):(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$ và $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C_1) và cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm M, N sao cho $MN=2\sqrt{2}$

Giải:

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;0)$ và bán kính $R_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=2$



$$I_2H=\sqrt{R_2^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=d(I_2,MN)=\sqrt{2}$$

Gọi đường thẳng MN có dạng: $Ax+By+C=0$

$$\begin{cases} d(I_2,MN)=\sqrt{2} \\ d(I_1,MN)=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$ Giải hệ ta tìm được A,B,C

Kết luận: MN: $x+y-2=0$, MN: $x+7y-6=0$
MN: $x-y-2=0$, MN: $7x-y-2=0$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x+6)^2+(y-6)^2=50$. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B khác gốc O. Vi phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại M sao cho M trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải:

Giả sử A(a;0) ; B(0;b) (a, b khác 0) suy ra đường thẳng d đi qua A, B c phương trình: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow bx+ay-ab=0$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) tại M ⇔ M thuộc (C) và d vuông góc với

Đường tròn (C) có tâm $I(-6;6)$, d có VTCP là $\vec{u}=(-a;b)$

M là trung điểm của AB nên $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$. $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{a}{2}+6;\frac{b}{2}-6\right)$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}\left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50 \\ -a\left(\frac{a}{2}+6\right)+b\left(\frac{b}{2}-6\right)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=-b \\ \left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50\end{cases} \\ \begin{cases} b=a+12 \\ \left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=22 \\ a=-22\end{cases} \\ \begin{cases} b=2 \\ a=-2\end{cases}\end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=14 \\ a=2\end{cases} \\ \begin{cases} b=-2 \\ a=-14\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy d có phương trình:
$x-y+2=0;\ x-y+22=0;\ x+7y+14=0;\ 7x+y-14=0$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2+y^2-6x+2y+6=0$, và điểm A(1; 3). Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (C) tại B, C sao cho $AB=BC$

Giải:

Đường tròn có tâm I(3;-1) ; bán kính R = 2.và $IA=2\sqrt{5}>2=R \Rightarrow$ A ngoài đường tròn

Gọi d là đường thẳng qua A cắt (C) tại B,C sao cho $AB=BC$

Ta có $AB.AC=AI^2-R^2 \Leftrightarrow 2AB^2=20-4=16 \Leftrightarrow AB=2\sqrt{2}=BC=2BE$

Với E là trung điểm BC $\Rightarrow BE=\sqrt{2} \Rightarrow d(I,d)=\sqrt{2}$.

Mà phương trình đường thẳng d qua A có hệ số góc k là:

$y=k(x-1)+3 \Leftrightarrow kx-y+3-k=0$

$$d(I,d)=\frac{|3k+1+3-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow k=-1;k--7$$

Vậy có 2 đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán $x+y-4=0;7x+y-10=0$

Thí dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, $R=\sqrt{10}$; $\overrightarrow{AI}=(0;-2)$.

Vì I và A cách đều M, N nên MN ⊥ AI, vậy phương trình đường thẳng MN có dạng : y = b

Ta có $MN=2\ d_{A/MN}=2|b|$; $d_{I/MN}=|b+2|$

$$d_{I/MN}^2+\left(\frac{MN}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow b^2+2b-3=0 \Rightarrow b=1 \text{ hoặc } b=-3.$$

Vậy có hai phương trình đường thẳng là: $\Delta_1: y=1$; $\Delta_2: y=-3$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A(3; 0) và cắt (C) tại 2 điểm M, N sao cho MN có độ dài lớn nhất

Bài 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2mx+4my+5m^2-1=0$ Tìm m để (C_m) cắt $(C): x^2+y^2=1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh khi đó đường thẳng AB có phương không đổi.

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-6)^2+(y-13)^2=25$. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với trục Ox tại gốc tọa độ và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-4=0$ Viết phương trình các tiếp tuyến Δ của (C) biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1.

Bài 5: Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:
$(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$; $(C_2): x^2+y^2+2x-2y-14=0$.

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$, viết phương trình đường tròn tâm $I(1;2)$ và cắt Δ theo dây cung AB sao cho tam giác IAB có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 7: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Δ ABC có phương trình cạnh $AB: x+y-3=0$, phương trình cạnh $AC: 3x+y-7=0$ và trọng tâm $G\left(2;\frac{1}{3}\right)$. Viết phương trình đường tròn đi qua trực tâm H và hai đỉnh B, C.

Bài 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC, có điểm A(2;3), trọng tâm G(2;0). Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng d_1: x + y + 5 = 0 và d_2: x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG.

Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=5$ và điểm M(6;2). Chứng minh rằng M nằm ngoài đường tròn và viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (C) tại 2 điểm A,B sao cho $MA^2+MB^2=50$

Bài 10: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x+y+5=0$, $\Delta_2: x-2y-3=0$ và đường tròn (C): $(x-3)^2+(y+5)^2=25$. Tìm điểm M thuộc (C), điểm N thuộc Δ_1 sao cho M và N đối xứng qua Δ_2.

Bài 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 5x-2y-19=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Từ một điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A và B là hai tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết rằng $AB=\sqrt{10}$.

Bài 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta: 4x-3y+3=0$ và $\Delta': 3x-4y-31=0$. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại điểm có tung độ bằng 9 và tiếp xúc với Δ'. Tìm tọa độ tiếp điểm của (C) và Δ'.

Bài 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (T): $(x-1)^2+(y+2)^2=10$ và hai điểm B(1; 4), C(–3; 2). Tìm tọa độ điểm A thuộc (T) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 19.

Bài 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-2y+5=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Qua điểm M thuộc Δ, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài đoạn $AB=2\sqrt{5}$.

Bài 15: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(1;5)$, $B(5;1)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2=2$.

Bài 16: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $d_1: x+y+3=0$, $d_2: x-y+1=0$, $M(1;2)$. Viết phương trình đường tròn đi qua M, cắt d_1 tại A, B sao cho AB = 8 và tiếp xúc với d_2

Bài 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta': 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ'.

Bài 18: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $d_1: x-2y=0$, $d_2: 3x-y+1=0$. Viết phương trình đường tròn cắt d_1 theo dây cung AB = 6 và tiếp xúc với d_2 tại B.

Bài 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác đều ABC, đường tròn nội tiếp của ABC có phương trình $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(\frac{7}{2};2\right)$. Xác định tọa độ điểm A.

Bài 20: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, cạnh AB nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x+4y+1=0$ và AB = 2AD và giao điểm hai đường chéo là $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Tìm phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD.

Bài 21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng d, (C) cắt Ox tại A, B, cắt Oy tại M, N sao cho diện tích của hai tam giác IAB và IMN đều bằng 12.

Bài 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=2$, $(C'): (x-4)^2+(y-5)^2=8$. Cho AB là một đường kính thay đổi của đường tròn (C') và M là một điểm di động trên đường tròn (C). Tìm tọa độ các điểm M, A, B sao cho diện tích của tam giác MAB lớn nhất.

Bài 23: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=16$ có tâm I và điểm $A(1+\sqrt{3};2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt (C) tại hai điểm B, C phân biệt sao cho tam giác IBC không có góc tù đồng thời có diện tích bằng $4\sqrt{3}$.

Bài 24: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm M(3;4) và đường tròn $\omega: x^2+y^2-6x+2y+2=0$. Viết phương trình của đường tròn Γ với tâm M cắt ω tại hai điểm A, B sao cho AB là cạnh của một hình vuông có bốn đỉnh nằm trên ω.

Bài 25: Trong mặt phẳng hệ toạ độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x+4y-20=0$ và $d_2: 4x-3y-10=0$. Viết phương trình đường tròn (C) biết rằng (C) đi qua A(1;–3), tiếp xúc với d_1 và có tâm nằm trên d_2.

Bài 26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x+2y-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2-10x-6y+30=0$ có tâm lần lượt là I, J

a. Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm tọa độ tiếp điểm H.

b. Gọi d là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2). Tìm tọa độ giao điểm K của d và đường thẳng IJ. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H.

Bài 27: Trong hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2+y^2=4$ và $(C_2): x^2+y^2-4y+3=0$

1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn.
2. Viết phương trình tiếp tuyến chung hai đường tròn
3. (C_1) cắt (C_2) tại A và B $(x_A<x_B)$. Viết phương trình đường thẳng qua B cắt hai đường tròn tại M và N sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

Bài 28: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: x+by-2=0$. Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt P, Q với mọi giá trị của b. Tìm b để diện tích tam giác PIQ đạt giá trị lớn nhất

Bài 29: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hai đường tròn $(C): x^2+y^2-18x-6y+65=0$ và $(C'): x^2+y^2=9$. Từ điểm M thuộc đường tròn (C) kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (C'), gọi A, B là các tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M, biết độ dài đoạn AB bằng 4,8.

Bài 30: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-8y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm Q(5;2) và cắt đường tròn (C) tại hai điểm M, N sao cho $MN=5\sqrt{2}$.

Bài 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$ và điểm A(1;0). Gọi M, N là hai điểm trên đường tròn (C) sao cho tam giác AMN vuông cân tại A. Viết phương trình cạnh MN.

Bài 32: Trong hệ toạ độ Oxy viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(1;2) có bán kính bằng 1 đồng thời tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$.

Bài 33: Trong hệ toạ độ Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng $12+6\sqrt{6}$, tọa độ các đỉnh A(–2;0), B(4;0) và độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng 5. Tìm tọa độ điểm C biết tung độ của nó là số dương.

Bài 34: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y=0$ và điểm A(–; 3). Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong (C) và có diện tích bằng 10

Bài 35: Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ và đường thẳng d: $x+y-2=0$. Chứng minh rằng d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm toạ độ điểm C trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Bài 36: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn hai đường tròn: $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$. Viết phương trình đường thẳng qua M(1;0) cắt hai đường tròn (C), (C') lần lượt tại A, B sao cho MA = 2MB.

Bài 37: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2=1$, đường thẳng $d: x+y+m=0$. Tìm m để (C) cắt d tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác ABO lớn nhất.

Bài 38: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua A(2;–1) và tiếp xúc với các trục toạ độ.

Bài 39: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, cho điểm K(3 ; 2) và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y+1=0$ với tâm là I. Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $\widehat{IMK}=60^0$.

Bài 40: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(–2;1), cạnh BC = 4, điểm M(1;3) nằm trên đường thẳng BC và điểm I(–1;3) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 41: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (T): $x^2+y^2-9x-y+18=0$ và hai điểm A(1;4), B(–1;3). Gọi C, D là hai điểm thuộc (T) sao cho ABCD là một hình bình hành. Viết phương trình đường thẳng CD.

Bài 42: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-3)^2+(y-1)^2=9$ và đường thẳng $(d): x+y-10=0$. Từ điểm M trên (d) kẻ hai tiếp tuyến đến (C), gọi A, B là hai tiếp điểm. Tìm tọa độ điểm M sao cho độ dài đoạn $AB=3\sqrt{2}$

Bài 43: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+2x-4y-8=0$ và đường thẳng Δ có phương trình: $2x-3y-1=0$. Chứng minh rằng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm toạ độ điểm M trên đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABM lớn nhất.

Bài 44: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5, 1) biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

Bài 45: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B, phương trình AB: $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I(0;2), điểm B thuộc trục Ox. Tìm tọa độ điểm C.

Bài 46: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm A(4;−1), B(−3;−2) và đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 42 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng Δ.

Bài 47: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn: $(C_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ và $(C_2): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C_1) tại hai điểm A và B, cắt (C_2) tại hai điểm C và D thỏa mãn $AB = 2\sqrt{7}, CD = 8$.

Bài 48: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và điểm A(3;0). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt đường tròn (C) theo một dây cung MN có độ dài:

a. Lớn nhất.
b. Nhỏ nhất.

Bài 49: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') tâm I(2 ; 2) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho độ dài đoạn $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 50: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C_1) có phương trình $x^2 + y^2 = 25$, điểm M(1;−2). Đường tròn (C_2) có bán kính bằng $2\sqrt{10}$. Tìm tọa độ tâm của (C_2) sao cho (C_2) cắt (C_1) theo một dây cung qua M có độ dài nhỏ nhất.

Bài 51: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x + y + 2 = 0$ và đường tròn (C_1) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$. Đường tròn (C_2) có tâm thuộc d, (C_2) tiếp xúc ngoài với (C_1) và có bán kính gấp đôi bán kính của (C_1). Viết phương trình của đường tròn (C_2).

Bài 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 20$. Biết AC = 2BD, điểm B có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$. Viết phương trình cạnh AB của hình thoi.

Bài 53: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M\left(2; \frac{3}{2}\right)$

1. Viết phương trình đường tròn (C) có đường kính OM
2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt hai nửa trục dương Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 6 đvdt.
3. Tìm toạ độ tâm I của đường tròn (T) nội tiếp tam giác OAB. Viết phương trình đường tròn đó.

Bài 54: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(−2;−1), trực tâm H(2; 1), $BC = 2\sqrt{20}$. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C. Lập phương trình cạnh BC, biết trung điểm M của BC nằm trên đường thẳng có phương trình là: $x - 2y - 1 = 0$. Tung độ M dương và EF đi qua N(3;−4).

Bài 55: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, đường thẳng d: x − y + 1 = 0. Tìm điểm M thuộc d sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) với A,B là hai tiếp điểm, biết đường thẳng AB đi qua điểm K(1;−1).

Bài 56: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có đường cao AH, H trên BC sao cho BC = 3BH. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH có phương trình: $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, đường thẳng AC: x − y + 2 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết A có tung độ dương.

Bài 57: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{27}{2}$ có tâm I và đường thẳng d: x + y + 5 = 0. Từ điểm M thuộc d, kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M sao cho diện tích của tam giác IAB bằng $\frac{27\sqrt{3}}{8}$.

Bài 58: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d : x − y − 3 = 0 và điểm A(2;6). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết rằng hai điểm B, C thuộc d, tam giác ABC vuông tại A và có diện tích bằng $\frac{35}{\sqrt{2}}$.

Bài 59: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và điểm K(3;4). Lập phương trình đường tròn (T) tâm K cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất với I là tâm của đường tròn (C)

Bài 60: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - x - 4y - 2 = 0$ và các điểm A(3;−5); B(7;−3). Tìm điểm M trên đường tròn (C) sao cho P = $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất

Bài 61: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm K(1;3) cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 4, với I là tâm của đường tròn (C).

Bài 62: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta: x + 3y + 8 = 0$, $\Delta': 3x - 4y + 10 = 0$ và điểm A(−2 ;1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ'.

Bài 63: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A(1;2) có góc $\widehat{ABC} = 30^0$, đường thẳng $d: 2x - y - 1 = 0$ là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm B và C.

Bài 64: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$ và cạnh AB có trung điểm M thuộc đường thẳng

$d: 2x-y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AB và tìm tọa độ điểm C.

Bài 65: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): x+y-2=0$ và điểm $A(-2;-2)$. Lập phương trình đường tròn (T) đi qua điểm A và cắt đường thẳng (d) tại 2 điểm phân biệt B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 66: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình : $(x-2)^2+(x-3)^2=10$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông, biết đường thẳng chứa cạnh AB đi qua điểm $M(-3;-2)$ và $x_A>0$.

Bài 67: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $x-5y-2=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-4y-8=0$. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d (cho biết điểm A có hoành độ dương). Tìm tọa độ C thuộc đường tròn (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B.

Bài 68: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-15=0$ có tâm là I. Đường thẳng d đi qua $M(1;-3)$ và cắt (C) tại hai điểm A, B. Lập phương trình đường thẳng d, biết diện tích tam giác IAB bằng 8 và AB là cạnh lớn nhất của tam giác IAB.

Bài 69: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y=0$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+4x+2y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết A, C thuộc trục tung và hai điểm B, D lần lượt thuộc d, (C).

Bài 70: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(–2;6) và hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình lần lượt là: $2x-y-1=0$ và $3x-4y-19=0$. Viết phương trình đường tròn (C) biết (C) có tâm nằm trên đường thẳng d_1, đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2.

Bài 71: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2=13$, đường tròn $(C_2): (x-6)^2+y^2=25$. Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A, viết phương trình đường thẳng đi qua A, cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau

Bài 72: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $d_1: \sqrt{3}x-y=0$ và $d_2: x=0$. Lập phương trình đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc với d_1 tại A và cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông tại A và có chu vi bằng $3+\sqrt{3}$.

Bài 73: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho ΔABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+1=0$ và $M(0;1)$. Tìm toạ độ điểm A, B, C biết A có hoành độ dương và M là trung điểm của cạnh AB.

Bài 74: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm M thuộc đường thẳng d sao cho qua M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm) đồng thời khoảng cách từ điểm $N\left(\frac{1}{2};1\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

Bài 75: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x+6)^2+(y-6)^2=50$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A, B và tiếp xúc với (C) tại M sao cho M là trung điểm AB

Bài 76: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ và các điểm $A(2;-3)$, $B(4;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên đường tròn sao cho tam giác ABC cân tại C và có diện tích nhỏ nhất.

Bài 77: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và $A(5;-6)$. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (C) với B, C là các tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Bài 78: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ và đường thẳng $(\Delta): x-5y-2=0$. Tìm các giao điểm của đường tròn (C) với đường thẳng (Δ). Giả sử các giao điểm là A, B. Xác định tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông tại B và nội tiếp đường tròn (C)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=5$.

Đường thẳng Δ đi qua A(3;0) có dạng: $kx-y-3k=0$.

MN lớn nhất khi $MN=2R=10$.

$$d(I,\Delta)=0 \Leftrightarrow I\in\Delta \Leftrightarrow -k-2-3k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta: x+2y-3=0$$

Bài 2:

Đường tròn (C_m) có tâm $I_1(m;-2m)$, bán kính $R_1=1$.

Đường tròn (C) có tâm $I_2(0;0)$, bán kính $R_2=1$.

Ta có $\overrightarrow{I_2I_1}=(m;-2m) \Rightarrow \left|\overrightarrow{I_2I_1}\right|=\sqrt{5m^2}$.

Để (C_m) cắt $(C): x^2+y^2=1$ tại hai điểm phân biệt ta phải có:

$$|R_1-R_2|<I_2I_1<R_1+R_2 \Leftrightarrow 0<\sqrt{5m^2}<2 \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{5}}{5}<m<\frac{2\sqrt{5}}{5} \wedge m\neq 0.$$

Vậy với $m\in\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\setminus\{0\}$ thì (C_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B.

Khi đó AB chính là trục đẳng phương của (C_m) và (C), do đó AB luôn vuông góc với I_2I_1

Ta có $\overrightarrow{I_2I_1} = (m;-2m)$ luôn cùng phương với $\vec{a} = (1;-2)$ không đổi với m

$m \in \left(\frac{-2\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \setminus \{0\}$.

Bài 3:

Đường tròn (C') có tâm I nằm trên trục Oy nên $I(0;b)$ và bán kính $R' = |b|$.

Do đó phương trình đường tròn (C') có dạng:

$x^2 + (y-b)^2 = b^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2by = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $A(6;13)$, bán kính $R = 5$.

Để (C') tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) ta phải có:

$IA = R + R' = 5 + |b| \Leftrightarrow \sqrt{36 + (13-b)^2} = 5 + |b| \Leftrightarrow b = 5$ hoặc $b = \frac{45}{4}$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn là: $x^2 + y^2 - 10y = 0$ hoặc $x^2 + y^2 - \frac{45}{2}y = 0$

Bài 4:

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

Đường thẳng Δ có dạng: $x - y + b = 0$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3+b|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3\sqrt{2} - 3 \\ b = -3\sqrt{2} - 3 \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán đó là:

$x - y + 3\sqrt{2} - 3 = 0$ và $x - y - 3\sqrt{2} - 3 = 0$.

Bài 5:

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;-2)$ và bán kính $R_1 = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2 = 4$.

Xét đường thẳng Δ có dạng: $ax - y + b = 0$.

Để Δ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ta phải có:

$$\begin{cases} d(I_1;\Delta) = R_1 = 3 \\ d(I_2;\Delta) = R_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a+2+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 3 \\ \frac{|-a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{-75+14\sqrt{3}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{-75-14\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung đó là:

$\Delta_1 : (6-2\sqrt{3})x - 3y - 75 - 14\sqrt{3} = 0$ và $\Delta_2 : (6+2\sqrt{3})x - 3y - 75 - 14\sqrt{3} = 0$

Chú ý: Đối với cách giải trên ta gọi đường thẳng Δ có dạng: $ax - y + b = 0$ là ta đã xem đường thẳng này có hệ số góc bằng a, nhưng vẫn có thể tồn tại đường thẳng có dạng $x = x_0$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên nên khi làm xong ta cần kiểm tra xem có đủ số tiếp tuyến chung hay chưa, nếu chưa đủ phải xét thêm trường hợp Δ có dạng: $x = x_0$.

- Nếu (C_1) và (C_2) chứa trong nhau thì số tiếp tuyến chung là 0.
- Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong thì số tiếp tuyến chung là 1.
- Nếu (C_1) và (C_2) cắt nhau thì số tiếp tuyến chung là 2.
- Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài thì số tiếp tuyến chung là 3.
- Nếu (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau thì số tiếp tuyến chung là 4.

ài 6:

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow IH = d(I;\Delta) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có $S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}IH.AB \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}.AB \Leftrightarrow AB = \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Gọi R là bán kính của đường tròn cần tìm, ta có: $R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{6}{4}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ đường tròn cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

ài 7:

Toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2;1)$

Gọi $B(m;3-m), C(n;7-3n)$.

Do Δ ABC có trọng tâm $G\left(2;\frac{1}{3}\right)$ nên có hệ phương trình:

$\begin{cases} 2 + m + n = 6 \\ 1 + 3 - m + 7 - 3n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$

Từ đó ta có $B(1;2), C(3;-2)$

Phương trình đường cao AA_1: $x - 2y = 0$.

Phương trình đường cao BB_1: $x - 3y + 5 = 0$.

Toạ độ trực tâm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow H(10;5)$.

Gọi (S) là đường tròn đi qua B, C, H có phương trình:

$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ $(a^2 + b^2 - c > 0)$

Do B, C, H ∈ (S) nên ta có hệ: $\begin{cases} 2a + 4b + c = -5 \\ 6a - 4b + c = -13 \\ 20a + 10b + c = -125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -2 \\ c = 15 \end{cases}$

Vậy phương trình đường tròn (S) : $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0$.

ài 8:

Giả sử $B(x_B;y_B) \in d_1 \Rightarrow x_B = -y_B - 5$; $C(x_C;y_C) \in d_2 \Rightarrow x_C = -2y_C + 7$

Vì G là trọng tâm nên ta có hệ: $\begin{cases} x_B + x_C + 2 = 6 \\ y_B + y_C + 3 = 0 \end{cases}$

Từ các phương trình trên ta có: $B(-1;-4), C(5;1)$

Ta có $\overrightarrow{BG} = (3;4) \Rightarrow$ vtpt $\overrightarrow{n_{BG}} = (4;-3)$ nên phương trình BG: $4x - 3y - 8 = 0$

Bán kính $R = d(C;\,BG) = \dfrac{9}{5} \Rightarrow$ phương trình đường tròn: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{81}{25}$

Bài 9:

Phương tích của điểm M đối với đường tròn

$P_{M(I)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - R^2 = 25 - 5 = 20 \Leftrightarrow MA.MB = 20$ Vậy M ở ngoài đường tròn

Gọi H là trung điểm AB Ta có : $d(I,\Delta) = IH$

$$MA^2 + MB^2 = 50 \Leftrightarrow (MA+MB)^2 - 2MA.MB = 50 \Leftrightarrow 4MH^2 = 90 \Leftrightarrow MH^2 = \frac{90}{4}$$

$$d^2(I,\Delta) = IH^2 = MI^2 - MH^2 = 25 - \frac{90}{4} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow d(I,\Delta) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Gọi đường thẳng Δ có vtpt $\vec{n} = (a,b) \neq \vec{0}$

$\Delta : a(x-6) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 6a - 2b = 0$

$$d(I,\Delta) = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{5|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 10a^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b = \pm 3a \quad (a \neq 0)$$

Với $b = 3a \Rightarrow \Delta_1 : x + 3y - 12 = 0$

Với $b = -3a \Rightarrow \Delta_2 : x - 3y = 0$

Bài 10:

M và N đối xứng qua Δ_2 nên phép đối xứng trục Δ_2 biến M thành N

$M \in (C) \Rightarrow N \in (C')$ với (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Δ_2

Theo giả thiết $N \in \Delta_1$ nên N là giao của (C') và Δ_1

(C) có tâm $I(3;-5)$ và bán kính $R = 5$ nên (C') có tâm $I'(-1;3)$ và bán kính $R = 5$

Phương trình (C') là $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$

Giải hệ $\begin{cases}(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25\\ 3x + y + 5 = 0\end{cases}$ ta được $N(-1;-2)$ hoặc $N(-4;7)$

$N(-1;-2)$ ta tìm được $M(-1;-2)$

$N(-4;7)$ ta tìm được $M\left(\dfrac{22}{5};-\dfrac{49}{5}\right)$

Bài 11:

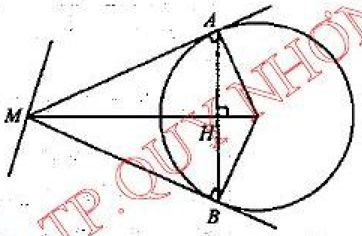
Đường tròn (C) có tâm I(2; 1), bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi $H = MI \cap AB$. Ta có $AH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Trong tam giác vuông *MAI* (tại *A*) với đường cao *AH* ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{4}{10} - \frac{1}{5} \Rightarrow AM = \sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{10}.$$

Ta có $\Delta : 5x - 2y - 19 = 0 \Leftrightarrow \Delta : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{5}$



$\Rightarrow M(5+2m;\,3+5m)$

Khi đó

$MI = \sqrt{10} \Leftrightarrow (3+2m)^2 + (2+5m)^2 = 10$

$\Leftrightarrow 29m^2 + 32m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

hoặc $m = -\dfrac{3}{29}$.

Chú ý rằng, đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMB* là đường tròn đường kính *MI*.

Với $m = -1$ ta có $M(3;-2)$. Khi đó phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔAMB là $\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$.

Với $m = -\dfrac{3}{29}$ ta có $M\left(\dfrac{139}{29};\dfrac{72}{29}\right)$. Khi đó phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔAMB là $\left(x - \dfrac{197}{58}\right)^2 + \left(y - \dfrac{101}{58}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$.

Bài 12:

Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C) tiếp xúc với Δ tại điểm M(6;9) và (C) tiếp xúc với Δ'. nên $\Delta : 4x - 3y + 3 = 0$

$$\begin{cases} d(I,\Delta) = d(I,\Delta') \\ \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_\Delta} = (3;4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|4a-3b+3|}{5} = \dfrac{|3a-4b-31|}{5} \\ 3(a-6) + 4(b-9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|4a - 3\dfrac{54-3a}{4} + 3\right| = |6a-85| \\ 3a + 4b = 54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |25a-150| = 4|6a-85| \\ b = \dfrac{54-3a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 10; b = 6 \\ a = -190; b = 156 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn là:

$(x-10)^2 + (y-6)^2 = 25$ tiếp xúc với Δ' tại $N(13;2)$

$(x+190)^2 + (y-156)^2 = 60025$ tiếp xúc với Δ' tại $N(-43;-40)$

Bài 13:

Giả sử $A(x;y) \in (C) \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$.

Ta có: $BC = 2\sqrt{5}$ và phương trình BC: $x - 2y + 7 = 0$

$$d(A,BC)=\frac{|x-2y+7|}{\sqrt{5}}$$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.d(A,BC)=19$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\frac{|x-2y+7|}{\sqrt{5}}=19\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y+12\\x=2y-26\end{array}\right.$$

TH1: x = 2y + 12 thế vào (1), ta được $5y^2+48y+115=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-5\\y=-\frac{23}{5}\end{array}\right.$

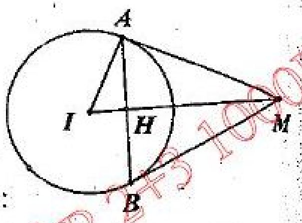
+ Với $y=-5\Rightarrow x=2$

+ Với $y=-\frac{23}{5}\Rightarrow x=\frac{14}{5}$

TH2: x = 2y – 26 thế vào (1), ta được $5y^2-104y+723=0$ (vô nghiệm)

Vậy $A(2;-5)$ hoặc $A\left(\frac{14}{5};-\frac{23}{5}\right)$

Bài 14:



+ Điểm $M\in\Delta\Rightarrow M(2m-5;m)$;

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{10}$

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow AH=\sqrt{5}$ và $AH\perp MI$

Tam giác AIM vuông tại A có AH là đướng cao nên:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}\Leftrightarrow\frac{1}{5}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{10}\Rightarrow AM=\sqrt{10}\text{ và } IM=\sqrt{IA^2+MA^2}=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow IM^2=20\Leftrightarrow(2m-6)^2+(m+2)^2=20\Leftrightarrow m^2-4m+4=0\Leftrightarrow m=2$$

Bài 15:

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $r=\sqrt{2}$

Đường tròn (C’) đi qua A và B có tâm I(a;b) ta có AI = BI

$$\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-5)^2=(a-5)^2+(b-1)^2\Leftrightarrow a=b$$

Khi đó (C’) có bán kính $R=\sqrt{(a-1)^2+(a-5)^2}$

(C’) và (C) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}OI=R+r\\OI=R-r\end{array}\right.$ (vì A, B nằm ngoài (C))

TH 1: $OI=R+r\Leftrightarrow\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{(a-1)^2+(a-5)^2}+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 12a-28=2\sqrt{2}\sqrt{2a^2-12a+26}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\frac{7}{3}\\8a^2-36a+36=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge7/3\\a=3\quad\text{hoac}\quad a=3/2\end{cases}\Leftrightarrow a=3\text{ khi đó }R=\sqrt{8}$$

Đường tròn (C’) có phương trình: $(x-3)^2+(y-3)^2=8$

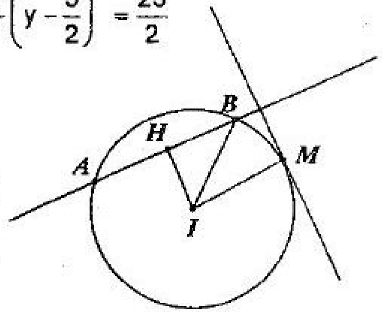
TH 2: $OI=R-r\Leftrightarrow\sqrt{a^2+a^2}+\sqrt{2}=\sqrt{(a-1)^2+(a-5)^2}$

$$\Leftrightarrow 2a^2+4|a|+2=2a^2-12a+26\Leftrightarrow 4|a|+12a=24\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

Khi đó $AI^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

Đường tròn (C’) có phương trình: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

Bài 16:



Vì $\begin{cases}M\in(C)\\M\in(d_2)\end{cases}\Rightarrow M$ là tiếp điểm, mà

$\overrightarrow{n_{d_1}}.\overrightarrow{n_{d_2}}=0\Rightarrow d_1\perp d_2\Rightarrow d(M;d_1)=IH=3\sqrt{2}$

$IM\perp d_2\Rightarrow IM: x+y-3=0$

giả sử $I(x_0;3-x_0)$ thuộc IM

$$\Rightarrow\overrightarrow{IM}(1-x_0;x_0-1)\Rightarrow IM=\sqrt{2(1-x_0)^2}=\sqrt{34}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1-\sqrt{17}\\x_0=1+\sqrt{17}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm: $\left(x-1+\sqrt{17}\right)^2+\left(y-2-\sqrt{17}\right)^2=34$

hoặc $\left(x-1-\sqrt{17}\right)^2+\left(y-2+\sqrt{17}\right)^2=34$

Bài 17:

Tâm I của đường tròn thuộc Δ nên $I(-3t-8;t)$

Theo giả thiết thì khoảng cách từ I đến Δ’ bằng khoảng cách IA nên ta có

$$\Leftrightarrow\frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$$

Giải tiếp được $t=-3$

Khi đó $I(1;-3)$, $R=5$ và phương trình đường tròn cần tìm:

$(C):(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

Bài 18:

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y=0\\3x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{5}\\y=-\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow B\left(-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right)$

Vì $\cos(d_1;d_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $(d_1;d_2)=45^0$ suy ra tam giác

HBI vuông cân tại H suy ra IH = 3, $IB=R=3\sqrt{2}$

Vì IB vuông góc d_2 nên IB có phương trình: $x+3y+1=0$

Giải sử $I(x_0;y_0)$ thuộc IB nên $I(-3y_0-1;y_0)$

Ta có $d(I;(d_1))=IH=3$ nên $\left[\begin{array}{l} y_0=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{5} \\ y_0=\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{-2-9\sqrt{5}}{5} \\ x_0=\dfrac{-2+9\sqrt{5}}{5}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$\left(x-\frac{-2-9\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(y-\frac{-1+3\sqrt{5}}{5}\right)^2=18 \text{ hoặc } \left(x-\frac{-2+9\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(y-\frac{-1-3\sqrt{5}}{5}\right)^2=18$$

Bài 19:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

Giả sử BC có một VTPT $\vec{n}=(a;b)$ $(a^2+b^2\neq 0)\Rightarrow AB: a(x-\frac{7}{2})+b(y-2)=0$

BC tiếp xúc với (C) suy ra

$$d(I,BC)=R\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{5}{2}a\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-2b\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} BC: 2x+y-9=0 \\ BC: 2x-y-5=0\end{array}\right.$$

Gọi H là tiếp điểm của BC với (C) suy ra H là hình chiếu của I trên BC.

$BC: 2x-y-5=0\Rightarrow H(3;1)$

$\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}=(-4;2)\Rightarrow A(-3;4)$

$BC: 2x+y-9=0\Rightarrow H(3;3)$

$\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}=(-4;-2)\Rightarrow A(-3;0)$

Bài 20:

Ta có $AD=2d(I;\Delta)=\left|\dfrac{3x_1+4y_1+1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\dfrac{3}{5}\Rightarrow AB=2AD=\dfrac{6}{5}$

Đường chéo : $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\Rightarrow R=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Vậy đường tròn ngoại tiếp ABCD là $(C): x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{5}$

Bài 21:

Gọi *I*, *R* lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (*C*). Ta có $I\in d\Rightarrow I(t;t-1$

Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *I* trên *Ox*, *Oy*. Ta có

$IH=d(I,Ox)=|t-1|\Rightarrow AB=2AH=2\sqrt{R^2-IH^2}=2\sqrt{R^2-(t-1)^2}$

$\Rightarrow S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IH.AB=|t-1|\sqrt{R^2-(t-1)^2}=12$ (1)

và $IK=d(I,Oy)=|t|\Rightarrow MN=2MK=2\sqrt{R^2-IK^2}=2\sqrt{R^2-t^2}$

$\Rightarrow S_{IMN}=\dfrac{1}{2}IK.MN=|t|\sqrt{R^2-t^2}=12$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra

$(t-1)^2\left[R^2-(t-1)^2\right]=t^2\left[R^2-t^2\right]\Leftrightarrow R^2\left[t^2-(t-1)^2\right]=t^4-(t-1)^4$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t^2-(t-1)^2=0 \\ R^2=t^2+(t-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ R^2=t^2+(t-1)^2.\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Thay vào (2) ta suy ra $R^2=\dfrac{2305}{4}$.

Vậy phương trình (C) là $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{2305}{4}$.

Trường hợp 2: $R^2=t^2+(t-1)^2$.

Thay vào (2) ta suy ra $|t|.|t-1|=12\Leftrightarrow t^2-t=12$ hoặc

$t^2-t=-12$ (vô nghiệm). Vậy $t=-3$ hoặc $t=4$.

Với $t=-3$ ta có $I(-3;-4), R=5$.

Vậy phương trình của (C) là $(x+3)^2+(y+4)^2=25$.

Với $t=4$ ta có $I(4;3), R=5$.

Vậy phương trình của (C) là $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

Bài 22:

Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và có bán kính $R=\sqrt{2}$. Đường tròn (C') có tâm $I'(4;5)$ và có bán kính $R'=2\sqrt{2}$. Ta có $II'=4\sqrt{2}>R=\sqrt{2}$.

Do đó I' nằm ngoài đường tròn (C).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng AB. Ta có

$S_{MAB}=\dfrac{1}{2}MH.AB=\dfrac{1}{2}MH.2R'=\sqrt{2}.MH$.

Mặt khác ta có $MH\le MI'\le MI+II'=\sqrt{2}+4\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

Do đó $S_{MAB}=\sqrt{2}.MH\le\sqrt{2}.5\sqrt{2}=10$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv I'$ và M là giao điểm của đường thẳng II' với (C) và I thuộc đoạn thẳng I'M.

Như vậy AB là đường kính của (C') vuông góc với II'.

Phương trình đường thẳng II' là $\begin{cases} x=t \\ y=1+t\end{cases}\Rightarrow M(t;1+t)$.

Thay $M\in(C)$ ta được $t=\pm1$. Suy ra $M(1;2)$ hoặc $M(-1;0)$.

Ta có $I'M>II'\Rightarrow M(-1;0)$.

Phương trình đường thẳng AB là $x+y-9=0$.

Suy ra tọa độ các điểm A, B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+y-9=0 \\ (x-4)^2+(y-5)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ (x-4)^2+(9-x-5)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-x \\ (x-4)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=7 \\ x=6, y=3 \end{array}\right.$$

Vậy $A(2;7), B(6;3), M(-1;0)$ hoặc $A(6;3), B(2;7), M(-1;0)$.

Bài 23:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R = 4$

Do $\frac{1}{2}IC IB \sin\widehat{CIB} = S_{ICB} = 4\sqrt{3}$ nên $\sin\widehat{CIB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, do $\widehat{CIB} \le 90^0$ và $IC = IB$ nên tam giác CIB đều, với độ dài ba cạnh bằng 4.

Bởi vậy, bài toán quy về viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1+\sqrt{3};2)$ và cách $I(1;-1)$ một khoảng bằng $2\sqrt{3}$.

Đường thẳng Δ có phương trình $a(x-1-\sqrt{3})+b(y-2)=0$ với $a^2+b^2 \ne 0$.

Ta có phương trình $\frac{|-a\sqrt{3}-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\sqrt{3}$, từ đó tìm được $b = a\sqrt{3}$

Chọn $a = 1, b = \sqrt{3}$, suy ra $\Delta : x+\sqrt{3}y-1-3\sqrt{3}=0$.

Bài 24:

Đường tròn ω có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Giả sử tìm được đường tròn $\Gamma : (x-3)^2+(y-4)^2=\rho^2$ thỏa mãn yêu cầu.

Khi đó, do AB là dây cung chung, nên $AB \perp IM$, hay đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{IM} = (0;5)$ làm véctơ pháp tuyến. Hơn nữa, I và M ở về hai phía của AB.

Do đó, đường thẳng AB có phương trình dạng

$5y + c = 0$ với $-20 < c < 5$ (1)

AB là cạnh của hình vuông nội tiếp ω khi và chỉ khi $d(I, AB) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 2$. Từ đó, kết hợp với (1), tìm được $c = -5$. Suy ra $AB : y - 1 = 0$.

Mặt khác AB là trục đẳng phương của ω, Γ nên AB có phương trình

$\ldots y + \frac{\rho^2-23}{10} = 0$. Từ đó $\rho^2 = 13$, bởi vậy $\Gamma : (x-3)^2+(y-4)^2 = 13$

Bài 25:

Đường thẳng d_2 đi qua $M(4;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4)$ nên d_2 có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+4t \end{cases}$

Giả sử $I(4+3t; 2+4t) \in d_2$ là tâm và R là bán kính của đường tròn (C)

Vì (C) đi qua $A(1;-3)$ và tiếp xúc với d_1 nên $IA = d(I, d_1) = R$

Ta có $IA = d(I, d_1) \Leftrightarrow \sqrt{(3+3t)^2+(5+4t)^2} = \frac{|3(4+3t)+4(2+4t)-20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5|t|$

$\Leftrightarrow \sqrt{25t^2+58t+34} = |5t| \Leftrightarrow 58t+34 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{17}{29}$

Với $t = -\frac{17}{29} \Rightarrow I_1\left(\frac{65}{29}; -\frac{10}{29}\right) \Rightarrow R = IA = \frac{85}{29}$ ta được phương trình đường tròn

$(C): \left(x-\frac{65}{29}\right)^2+\left(y+\frac{10}{29}\right)^2 = \frac{7225}{841}$

Bài 26:

(C_1) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R_1 = 3$. (C_2) có tâm $J(5;3)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Ta có: $IJ^2 = (5-2)^2+(3+1)^2 = 25 \Rightarrow IJ = 5 = R_1 + R_2$

Suy ra (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau. Từ đó tọa độ điểm H được xác định như sau

$$2\overrightarrow{HI} = -3\overrightarrow{HJ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_I - x_H) = -3(x_J - x_H) \\ 2(y_I - y_H) = -3(y_J - y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{19}{5} \\ y_H = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Có : $2\overrightarrow{KI} = 3\overrightarrow{KJ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_I - x_K) = 3(x_J - x_K) \\ 2(y_I - y_K) = 3(y_J - y_K) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 11 \\ y_K = 11 \end{cases}$

Đường tròn (C) qua K, tiếp xúc với (C_1), (C_2) tại H nên tâm E của (C) là trung điểm của KH : $E\left(\frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$. Bán kính (C) là R = EH = 6

Phương trình của (C) là : $\left(x-\frac{37}{5}\right)^2+\left(y-\frac{31}{5}\right) = 36$

Bài 27:

Đường tròn (C_1) có tâm I (1;0) và bán kính R = 2; (C_2) có tâm J(0;2) và bán kính R=1

Vì $R - R' < IJ = \sqrt{5} < R + R'$

Vậy hai đường tròn cắt nhau

Nếu d là tiếp tuyến chung của hai đường tròn song song Oy có phương trình: $x = x_0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I;d) = R \\ d(J;d) = R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_0 - 1| = 2 \\ |x_0| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -1$

Vậy $x = -1$ là tiếp tuyến chung

Nếu d là tiếp tuyến chung của hai đường tròn không song song Oy có phương trình: $y = mx + n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I;d) = R \\ d(J;d) = R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \\ \dfrac{|n-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow |m+n| = 2|n-2| \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & n = m+4 \\ & n = -\frac{m}{3}+\frac{4}{3} \end{aligned}\right.$$

+ Với $n = m+4$ thay phương trình ta được: $m = -\frac{3}{4}; n = \frac{13}{4} \Rightarrow d: y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$

+ Với $n = -\frac{m}{3} + \frac{4}{3}$ thay phương trình ta thấy vô nghiệm

3. Tính toạ độ giao điểm

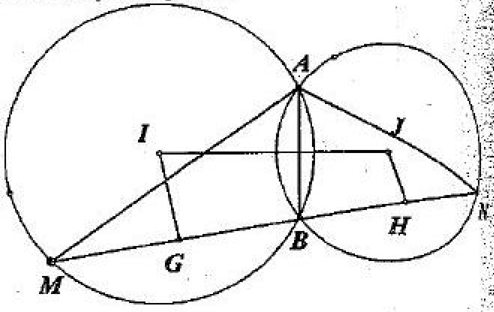
$A\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right); B(1;2)$

Gọi α = góc ABN;

G, H là trung điểm MB và BN.

Ta có

Diện tích tam giác AMN:



$S = \frac{1}{2}AB.MN.\sin\alpha \le \frac{1}{2}AB.MN = AB.GH \le AB.IJ$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin\alpha = 1 \\ MN // IJ \end{cases} \Leftrightarrow$ MN song song IJ

Đường thẳng MN đi qua B nhận $\overrightarrow{IJ} = (-1;2)$ làm VTCP có phương trình

$2x + y - 4 = 0$

Bài 28:

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = 4$

Tọa độ giao điểm của (C) và Δ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + by - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - by \\ (b^2+1)y^2 + 6y - 7 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

(*) có $\Delta' = 9 + 7(b^2+1) > 0, \forall b \in R$ nên (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi *b* .

Do đó , với mọi *b* hệ luôn có hai nghiệm phân biệt hay đường thẳng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt P và Q .

Giả sử $P(2-by_1;y_1)$ và $Q(2-by_2;y_2)$ với y_1 và y_2 là hai nghiệm của (*) .

Theo Viet ta có $y_1 + y_2 = -\frac{6}{b^2+1}$; $y_1.y_2 = -\frac{7}{b^2+1}$

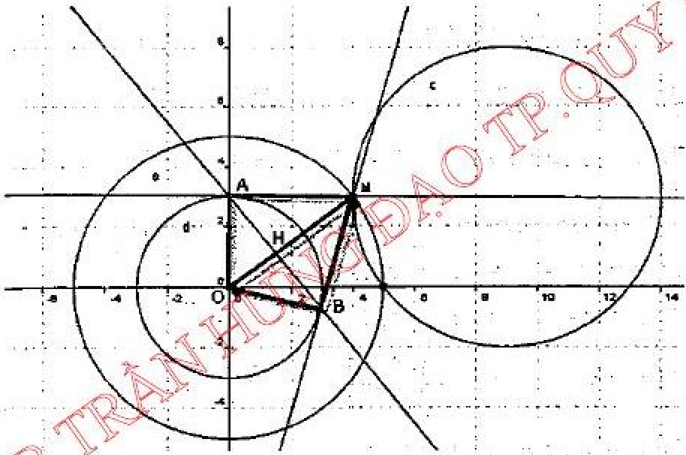
Lại có diện tích tam giác PIQ là $S = \frac{1}{2}IP.IQ.\sin\widehat{PIQ} = 8.\sin\widehat{PIQ}$

Vậy S_{max}

$\Leftrightarrow \sin\widehat{PIQ} = 1 \Leftrightarrow \widehat{PIQ} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = 0 \Leftrightarrow (b^2+1)y_1.y_2 + 3(y_1+y_2) + 9 = 0$

$\Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$

Bài 29:



Đường tròn (C') có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = OA = 3$.

Gọi $H = AB \cap OM$, do H là trung điểm của AB nên $AH = \frac{12}{5}$.

Suy ra: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{9}{5}$ và $OM = \frac{OA^2}{OH} = 5$

Đặt $M(x;y)$, ta có: $\begin{cases} M \in (C) \\ OM = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 18x - 6y + 65 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0 \\ y = 15 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy, trên (C) có hai điểm M thỏa đề bài là: $M(4;3)$ hoặc $M(5;0)$.

Bài 30:

Đường tròn (C) có tâm I(2;4) và bán kính R = 5.

Gọi đường thẳng Δ đi qua Q(5;2) có phương trình $A(x-5) + B(y-2) = 0$ với $A^2 + B^2 \ne 0$, do tiếp tuyến tại M, N vuông góc với nhau nên $\angle MIN = 90^0$ hay tam giác MIN vuông cân tại I, suy ra $d(I,\Delta) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}R) = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Hay $\frac{|A(2-5) + B(4-2)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |2B - 3A|\sqrt{2} = 5\sqrt{A^2+B^2}$

$\Leftrightarrow 17B^2 + 24AB + 7A^2 = 0$ (*)

Chọn B = 1 khi đó (*) $\Leftrightarrow 7A^2 + 24A + 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = -1 \\ A = -\dfrac{17}{7} \end{array}\right.$

Với $A = -1;\ B = 1$ phương trình đường thẳng Δ là : $-x + y + 3 = 0$

Với $A = -\dfrac{17}{7}; B = 1 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là : $17x - 7y - 71 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm: $-x + y + 3 = 0$ hoặc $17x - 7y - 71 = 0$

Bài 31:

Ta có tâm $I(1;-2)$ suy ra $\overline{IA} = (0;2)$.

Tam giác AMN cân khi IA vuông góc MN.

Gọi d là đường thẳng vuông góc với IA, nên d nhận $\dfrac{1}{2}\overline{IA} = (0;1)$ làm véc t

pháp tuyến

Phương trình đường thẳng d có dạng: $0x + 1.y + m = 0 \Leftrightarrow y = -m$ (1).

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là:

$x^2 - 2x + m^2 + 4m - 5 = 0$ (1).

d cắt (C) tại M, N khi PT (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = -m^2 - 4m + 6 > 0\,(*)$.

Khi đó, theo Vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m^2 + 4m - 5 \end{cases}$

Gọi $M(x_1;-m)$; $N(x_2;-m) \Rightarrow \overline{AM} = (x_1 - 1;-m); \overline{AN} = (x_2 - 1;-m)$.

ΔAMN vuông tại A khi

$\overline{AM}\,\overline{AN} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn (*))

Vậy phương trình đường thẳng MN là : $y = -1;\ y = 3$.

Bài 32:

Gọi tâm đường tròn (C) là I (a;b). Do (C) có bán kính bằng 1, tiếp xúc với d và điểm A thuộc (C) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1 \\ |3a - 4b - 1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1 \\ \left[\begin{array}{l} 3a = 4b + 6 \\ 3a = 4b - 4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a = 4b + 6 \\ (4b+3)^2 + (3b-6)^2 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a = 4b - 4 \\ (4b-7)^2 + (3b-6)^2 = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a = 4b + 6 \\ 25b^2 - 12b + 36 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a = 4b - 4 \\ 25b^2 - 92b + 76 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} VN \\ \begin{cases} a = \dfrac{1}{3}\left(4.\dfrac{46 \pm \sqrt{256}}{25} - 4\right) \\ b = \dfrac{46 \pm \sqrt{256}}{25} \end{cases} \end{array}\right.$$

Bài 33:

Gọi $I(x_0;\ y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC, suy ra PT đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC là: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 25$.

Vì điểm $A(-2;0)$, $B(4;0)$ thuộc đường tròn nên đường tròn (C) có PT là:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25,\quad (x-1)^2 + (y+4)^2 = 25.$$

(Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có thể vẽ hình rồi sử dụng tam giác vuông, lưu ý hai trường hợp)

Vì $A(-2;0)$, $B(4;0)$ và dt(ABC) = $12 + 6\sqrt{6}$ nên đường cao CH = $4 + 2\sqrt{6}$.

Hai điểm A, B nằm trên trục hoành và C có tung độ là số dương nên C nằm trên đường thẳng $y = 4 + 2\sqrt{6}$

Do đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ y = 4 + 2\sqrt{6} \end{cases}$ (1) và $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 = 25 \\ y = 4 + 2\sqrt{6} \end{cases}$ (2)

Giải hệ (1), (2) ta có điểm C(0; $4 + 2\sqrt{6}$), C(2; $4 + 2\sqrt{6}$).

Bài 34:

Từ phương trình (C) suy ra tọa độ tâm I(1;2); bán kính $R = \sqrt{5}$. Điểm C đối xứng với A qua I suy ra C(3;1). $S_{ABCD} = 2S_{ACB} = AC.BH = 10$ (H là chân đường cao kẻ từ B xuống AC)

Ta có AC = $2\sqrt{5} \Rightarrow BH = \sqrt{5}$.

Vậy H là trùng với tâm I của đường tròn và ABCD là hình vuông

Phương trình đường thẳng d qua tâm I và nhận $\overline{AC} = (4;-2)$ làm vecto pháp tuyến có dạng : $2x + y = 0$.

Tọa độ của B,D là nghiệm hệ : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta có $B(0;0), D(2;4)$

Bài 35:

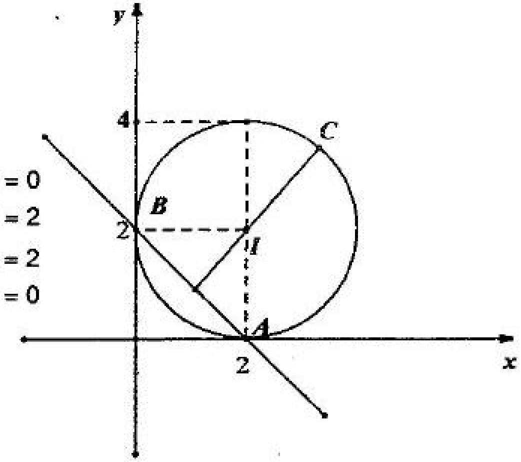
(C) có tâm I(2;2), bán kính R = 2

Tọa độ giao điểm của (C) và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Hay A(2;0),B(0;2)

Hay d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B



Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CH.AB$

(H là hình chiếu của C trên AB)

$S_{\Delta ABC\max}\Leftrightarrow CH_{\max}$

Dễ dàng thấy CH max $\Leftrightarrow\begin{cases}C=(C)\cap(\Delta)\\ x_C>2\end{cases}$

Hay $\Delta: y=x$ với $\Delta:\begin{cases}\Delta\perp d\\ I(2;2)\in\Delta\end{cases}\Rightarrow C(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2})$

Vậy $C(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ thì $S_{\Delta ABC}\max$

Bài 36:

Dễ thấy $M\in(C),M\in(C')$. Tâm và bán kính của (C), (C') lần lượt $I(1;1),I'(-2;0)$ và $R=1,R'=3$

Đường thẳng *d* qua *M* có phương trình

$a(x-1)+b(y-0)=0\Leftrightarrow ax+by-a=0,\ (a^2+b^2\neq0)(*)$

Gọi H, H' lần lượt là trung điểm của AM, BM. Khi đó ta có:

$MA=2MB\Leftrightarrow\sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{I'A^2-I'H'^2}\Leftrightarrow1-(d(I;d))^2=4[9-(d(I';d))^2],$

$\Leftrightarrow4(d(I';d))^2-(d(I;d))^2=35\Leftrightarrow4.\frac{9a^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2}=35$

$\Leftrightarrow\frac{36a^2-b^2}{a^2+b^2}=35\Leftrightarrow a^2=36b^2$. Dễ thấy $b\neq0$ nên chọn $b=1\Rightarrow a=\pm6$

Phương trình đường thẳng $d: 6x+y-6=0, -6x+y+6=0$

Bài 37:

Đường tròn (C) có tâm trùng với gốc tọa độ O(0;0), bán kính R = 1

$d(C,d)=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$. (C) cắt d tại hai điểm $\Leftrightarrow d(O,d)<1\Leftrightarrow\frac{|m|}{\sqrt{2}}<1\Leftrightarrow-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}(*)$

Gọi M là trung điểm AB. Ta có

$AB=2MB=2\sqrt{1-\frac{m^2}{2}}$. Diện tích tam giác OAB là $S=\frac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{m^2}{2}}$

Theo BĐT Côsi $\frac{|m|}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{m^2}{2}}\leq\frac{1}{2}$ dấu "=" xảy ra khi $\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{1-\frac{m^2}{2}}\Leftrightarrow m=\pm1$ thỏa mãn (*)

Bài 38:

Vì đường tròn (C) tiếp xúc với Ox và Oy nên có phương trình:

$$\left[\begin{array}{l}(x-a)^2+(y+a)^2=a^2\\(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\end{array}\right.$$

TH1: Nếu (C) có phương trình: $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

Vì (C) đi qua $A(2;-1)\Rightarrow(2-a)^2+(-1+a)^2=a^2\Leftrightarrow a^2-6a+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=5\end{array}\right.$

TH2: Nếu (C) có phương trình: $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

Vì (C) đi qua $A(2;-1)\Rightarrow(2-a)^2+(-1-a)^2=a^2\Leftrightarrow a^2-2a+5=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn bài ra là: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ hoặc $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

Bài 39:

Ta có $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Suy ra tâm I(1 ; 2) và bán kính R = 2.

Nhận thấy IK = 2. Suy ra $K\in(C)$.

Do $M\in(C)$ và $\widehat{IMK}=60^0$. Suy ra ΔIMK đều.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Tìm $M\in(C)$ sao cho KM = R = 2.

Giả sử $M(x_0,y_0)\in(C)\Leftrightarrow(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=4$ (1)

Ta có $KM=2\Leftrightarrow(x_0-3)^2+(y_0-2)^2=4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left[\begin{array}{l}M(2;2+\sqrt{3})\\M(2;2-\sqrt{3})\end{array}\right.$

Bài 40:

Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=EA=\sqrt{5}$

Gọi H là trung điểm BC ta có EH = 1.

Ta có phương trình BC qua M và có VTPT $\vec{n}=(a;b)$ $(a^2+b^2\neq0)$:

$BC: ax+by-a-3b=0$

$d(E,BC)=EH=1\Leftrightarrow\frac{|-a+3b-a-3b|}{\sqrt{1^2+3^2}}=1\Leftrightarrow b^2=3a^2\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{3}a$

TH1: $b=\sqrt{3}a$ .Phương trình cạnh $BC: x+\sqrt{3}y-1-3\sqrt{3}=0$

Và có $d(A,BC)=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ .Suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.d(A,BC).BC=3+2\sqrt{3}$

TH2: $b=-\sqrt{3}a$ .Phương trình cạnh $BC: x-\sqrt{3}y-1+3\sqrt{3}=0$

Và có $d(A,BC)=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ .Suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.d(A,BC).BC=2\sqrt{3}-3$

Bài 41:

Ta có $\overline{AB}=(-2;-1), AB=\sqrt{5}$; (C) có tâm $I\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

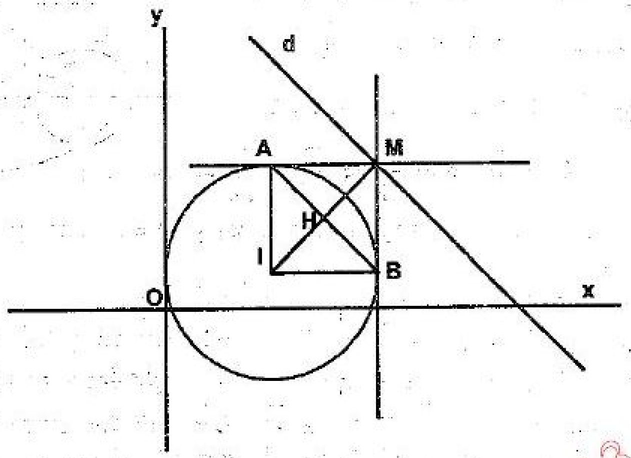
ABCD là hình bình hành nên CD = AB và phương trình CD: $x-2y+m=0$

$d(I,CD)=\dfrac{|7+2m|}{2\sqrt{5}}$; $CD=2\sqrt{R^2-d^2(I,CD)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}=2\sqrt{\dfrac{5}{2}-\dfrac{(7+2m)^2}{20}} \Leftrightarrow m^2+7m+6=0 \Leftrightarrow m=-1; m=-6$

Vậy phương trình CD: $x-2y-1=0$; $x-2y-6=0$

Bài 42:



Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$, bk $R=OA=3$

Gọi $H=AB\cap IM$, do H là trung điểm của AB nên $AH=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra: $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{9-\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và $IM=\dfrac{IA^2}{IH}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

Gọi $M(a;10-a)\in(d)$ ta có $IM^2=18\Leftrightarrow(a-3)^2+(9-a)^2=18$

$2a^2-24a+90=18\Leftrightarrow a^2-12a+36=0\Leftrightarrow a=6$

Vậy $M(6;4)$

Bài 43:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;\ 2)$, bán kính $R=\sqrt{13}$.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng (Δ) là $d_{(I,\Delta)}=\dfrac{9}{\sqrt{13}}<R$

Vậy đường thẳng (Δ) cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt.

Gọi M là điểm nằm trên (C), ta có $S_{\Delta ABM}=\dfrac{1}{2}AB.d_{(M,\Delta)}$

Trong đó AB không đổi nên $S_{\Delta ABM}$ lớn nhất khi $d_{(M,\Delta)}$ lớn nhất.

Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với (Δ).

PT đường thẳng d là $3x+2y-1=0$

Gọi P, Q là giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C). Toạ độ P, Q là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y-8=0\\3x+2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=-1\\x=-3,y=5\end{array}\right.\Rightarrow P(1;-1);\ Q(-3;5)$$

Ta có $d_{(P,\Delta)}=\dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $d_{(Q,\Delta)}=\dfrac{22}{\sqrt{13}}$

Ta thấy $d_{(M,\Delta)}$ lớn nhất khi và chỉ khi M trùng với Q.

Vậy tọa độ điểm $M(-3;5)$.

ài 44: Phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$ có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên $AB\perp IM$ tại trung điểm H của đoạn AB.

Ta có $AH=BH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$MI=\sqrt{(5-1)^2+(1+2)^2}=5$

$IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{R^2-AH^2}=\dfrac{3}{2}$

ường hợp 1: $MH=MI-IH=\sqrt{MH^2+AH^2}$

Khi đó bán kính của đường tròn (C') là $R'=\sqrt{MH^2+AH^2}=13$

Phương trình đường tròn (C') là: $(x-5)^2+(y-1)^2=13$

ường hợp 2 : $MH=MI+IH=5+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}$

Khi đó bán kính của đường tròn (C') là $R'=\sqrt{MH^2+AH^2}=43$

Phương trình đường tròn (C') là: $(x-5)^2+(y-1)^2=43$

Vậy có 2 đường tròn (C') thỏa mãn là:

$(x-5)^2+(y-1)^2=13$ hoặc $(x-5)^2+(y-1)^2=43$

i 45:

Điểm $B=AB\cap Ox\Rightarrow B(2;0)$; $A\in AB\Rightarrow A\left(a;a\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)$

$IA=IB\Rightarrow A\left(1+\sqrt{3};3-\sqrt{3}\right)$

AC qua A và vuông góc với $\overline{IB}=(2;-2)\Rightarrow AC:\ x-y+2-2\sqrt{3}=0$

$C\in AC\Rightarrow C(c;c+2-2\sqrt{3})$

$IB=IC\Rightarrow C\left(\sqrt{3}-1;1-\sqrt{3}\right)$

i 46:

Gọi I(a;b) là tâm và R là bán kính của (C)

$AI^2=BI^2\Leftrightarrow 7a+b=2$ (1)

$BI^2 = d^2(I,\Delta) \Leftrightarrow (a+3)^2 + (b+2)^2 = \dfrac{(3a+4b+42)^2}{25}$ (2)

Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) ta được $I(1;-5)$ hoặc $I(-3;23)$

+ Với $I(1;-5) \Rightarrow R = 5$ ta được phương trình đường tròn (C):

$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$

+ Với $I(-3;23) \Rightarrow R = 25$ ta được phương trình đường tròn (C):

$(x+3)^2 + (y-23)^2 = 625$

Bài 47:

(C_1) có tâm $I_1(1;1)$ và bán kính $R_1 = 4$; (C_2) có tâm $I_2(2;-1)$ và bán kính $R_2 = 5$

$d(I_1,\Delta) = \sqrt{R_1^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \sqrt{16-7} = 3$, $d(I_2,\Delta) = \sqrt{R_2^2 - \dfrac{CD^2}{4}} = \sqrt{25-16} = 3$

$d(I_1,\Delta) = d(I_2,\Delta) = 3 \Rightarrow \Delta // I_1I_2$ hoặc Δ đi qua trung điểm của I_1I_2

Do $I_1I_2 = \sqrt{5} < d(I_1,\Delta) + d(I_2,\Delta) = 6$ nên không xảy trường hợp Δ đi qua trung điểm của I_1I_2

Với $\Delta // I_1I_2 \Rightarrow \Delta$ có vtcp $\overrightarrow{I_1I_2} = (1;-2) \Rightarrow$ vtpt $\vec{n} = (2;1) \Rightarrow$ pt $\Delta: 2x + y + C = 0$

$d(I_1, \Delta) = 3 \Rightarrow C = -3 \pm 3\sqrt{5}$.

Vậy $\Delta: 2x + y - 3 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

Bài 48:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = 5$.

a. Dây MN lớn nhất khi MN là đường kính của (C).

Do đó (Δ) là đường thẳng đi qua A và I.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (4;-2)$ suy ra phương trình đường thẳng (Δ) là

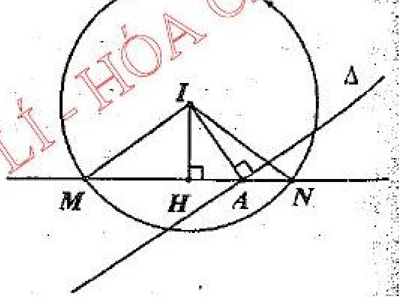
$\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-0}{-2} \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$.

b. Kẻ $IH \perp MN$ tại H.

Dây MN nhỏ nhất khi IH lớn nhất.

Ta có: $IH \le IA = 2\sqrt{5} \Rightarrow IH_{max} = 2\sqrt{5}$

khi $H \equiv A \Rightarrow (\Delta) \perp IA$ tại A.

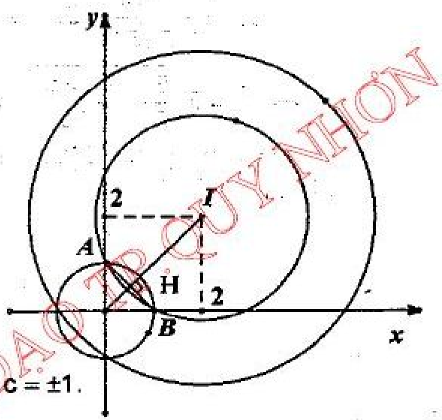


Vậy (Δ) đi qua (Δ) và nhận $\overrightarrow{IA} = (4;-2)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình: $4(x-3) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0$

Bài 49:

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $r = 1$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB thì H là trung điểm của đoạn AB $\Rightarrow HA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Tam giác OHA vuông tại H, ta có:

$OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đường tròn (C') tâm $I(2;2)$.

Nên đường thẳng AB chính là đường thẳng vuông góc với OI và cách O một khoảng $OH = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Do $\overrightarrow{OI} = (2;2) \Rightarrow AB: x + y + c = 0$

Mặt khác: $d(O;AB) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{|c|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow c = \pm 1$.

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là: $x + y + 1 = 0$ và $x + y - 1 = 0$.

Bài 50:

Đường tròn(C_1) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 5$

$\overrightarrow{OM} = (1;-2) \Rightarrow OM = \sqrt{5} \Rightarrow OM < R \Rightarrow M$ nằm trong đường tròn (C_1)

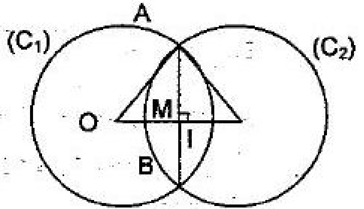
Giả sử (C_2) cắt (C_1) tại A và B. Gọi H là trung điểm đoạn AB.

$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{25 - OH^2}$. Mà OH lớn nhất khi H trùng với M.

Vậy AB nhỏ nhất khi M là trung điểm của AB. AB qua M và vuông góc với OM.

Phương trình của AB: $x - 2y - 5 = 0$.

Tọa độ của A, B là nghiệm hệ: $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$



Giải hệ được hai nghiệm $(5;0);(-3;-4)$.

Giả sử $A(5;0)$. $B(-3;-4)$.

Phương trình của OM: $2x + y = 0$.

Gọi I là tâm của (C_2); Do $I \in OM \Rightarrow I(t;-2t)$.

Mà $IA = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow (5-t)^2 + 4t^2 = 40 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$

Với $t = -1 \Rightarrow I(-1,2)$; $t = 3 \Rightarrow I(3,-6)$

Vậy tâm của (C_2) có tọa độ $I(-1,2)$ hoặc $I(3,-6)$

Bài 51:

(C_1) có tâm $I(2;-1)$; bán kính $R_1 = 1$.Vậy (C_2) có bán kính $R_2 = 2$

Gọi J là tâm của (C_2). Do $J \in d \Rightarrow J(t;-t-2)$

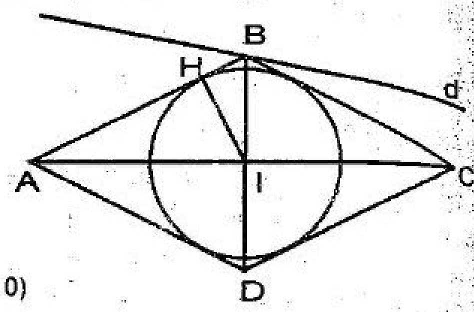
(C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) nên $IJ = R_1 + R_2 = 3$ hay $IJ^2 = 9$.

$\Leftrightarrow (t-2)^2 + (-t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$

- Với $t=-1\Rightarrow J(-1;-1)\Rightarrow (C_2):(x+1)^2+(y+1)^2=4$
- Với $t=2\Rightarrow J(2;-4)\Rightarrow (C_2):(x-2)^2+(y+4)^2=4$

Vậy có 2 đường tròn (C_2) thỏa mãn là: $(C_2):(x+1)^2+(y+1)^2=4$ hoặc $(C_2):(x-2)^2+(y+4)^2=4$

Bài 52:



Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$

Đặt $BI=x,(x>0)$

Do $AC=2BD\Rightarrow AI=2BI=2x$

Kẻ $IH\perp AB\Rightarrow IH=R=2\sqrt{5}$

Trong ΔAIB có:

$$\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{1}{IH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{20}$$

$\Leftrightarrow x=5$ (Do $x>0$)

Suy ra $IB=5$. Gọi $B(t;2t-5),(t>0)$

Do $IB=5\Leftrightarrow (t-1)^2+(2t-4)^2=25\Leftrightarrow t=4$ hoặc $t=\frac{-2}{5}$ (loại)

Với $t=4\Rightarrow B(4;3)$. Phương trình cạnh *AB* có dạng:

$a(x-4)+b(y-3)=0\quad (a^2+b^2\neq 0)$

$$\text{Có}: d(I,AB)=IH=R\Leftrightarrow\frac{|-3a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 11a^2-24ab+4b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\ a=\frac{2}{11}b\end{array}\right.$$

Với $a=2b$, chọn $a=2,b=1$, phương trình *AB* là: $2x+y-11=0$

Với $a=\frac{2}{11}b$, chọn $a=2,b=11$, phương trình *AB* là: $2x+11y-41=0$

Vậy phương trình cạnh *AB* là $2x+y-11=0$ hoặc $2x+11y-41=0$

Bài 53:

a. Phương trình đường tròn (C) đường kính OM.

Suy ra tâm là trung điểm $E\left(1;\frac{3}{4}\right)$ của OM và $R=\frac{OM}{2}=\frac{5}{4}$

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$

b. **Cách 1:**

Gọi k là hệ số góc của (D) suy ra phương trình (D) là $y=k(x-2)+\frac{3}{2}$

D cắt nửa trục dương Ox tại A $\Rightarrow A\left(\frac{-\frac{3}{2}+2k}{k};0\right)$

D cắt nửa trục dương Oy tại B $\Rightarrow B\left(0;\frac{3}{2}-2k\right)$

Điều kiện: $\begin{cases}\frac{3}{2}-2k>0\\ k<0\end{cases}\Leftrightarrow k<0$

Ta có:

$$S_{OAB}=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\frac{-\frac{3}{2}+2k}{k}\right|\left|\frac{3}{2}-2k\right|=6\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}-2k\right)^2=12|k|$$

$$\Leftrightarrow\frac{9}{4}-6k+4k^2=-12k\ (\text{do } k<0)\Leftrightarrow 4k^2+6k+\frac{9}{4}=0\Leftrightarrow k=\frac{-3}{4}$$

Vậy phương trình d là $y=\frac{-3}{4}(x-2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow y=\frac{-3}{4}+3\Leftrightarrow 3x+4y-12=0$

ách 2:

Giả sử $A(a;0),B(0;b)\ (a,b>0)\Rightarrow D:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}M\in d\\ S_{OAB}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}+\frac{3}{2b}=1\\ \frac{1}{2}ab=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$

Vậy phương trình d: $3x+4y-12=0$

Cách 1:

Ta có $A(4;0)$, $B(0;3)$. Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác OAB thuộc phân giác trong của góc $O\Rightarrow I\in$ đường thẳng $y=x$.

Gọi I (a, a) ta có: $d(I,AB)=d(I,OA)\Leftrightarrow\frac{|3a+4a-12|}{5}=|a|\Leftrightarrow|7a-12|=5a$ (vì $a>0$)

$\Leftrightarrow a=6\vee a=1$, loại $a=6$ vì lúc đó I là tâm đường tròn bàng tiếp ΔAOB.

Vậy $I(1;1)$ và $r=a=1$.

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

ch 2:

Ta có I thuộc đường thẳng $y=x$.

Suy ra I(a, a) (với $a>0$)

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OAB:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{6}{\frac{1}{2}(3+4+5)}=1$$

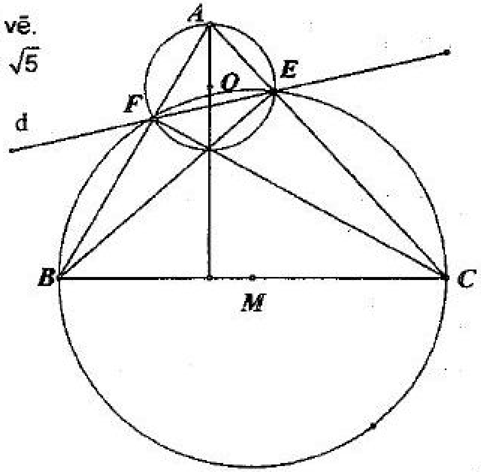
Ta lại có: d(I,OA) = r. Suy ra a = 1

Vậy phương trình (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Bài 54:

Gọi các điểm như hình vẽ.

Ta có: O(0;0) và OA = $\sqrt{5}$



Điểm $M(2t+1;t)$ (vì M thuộc đường thẳng $x-2y-1=0$)

và $MB = MC = \frac{1}{2}BC=\sqrt{20}$

E; F là giao điểm của hai đường tròn (O; $\sqrt{5}$) và (M; $\sqrt{20}$)

Phương trình đường tròn (O; $\sqrt{5}$) là: $x^2+y^2=5$ (1)

Phương trình đường tròn (M; $\sqrt{20}$) là: $(x-2t-1)^2+(y-t)^2=20$ (2)

Do đó đường thẳng d đi qua E và F là : (lấy phương trình (2) trừ phương trình (1) theo từng vế)

$d: -2(2t+1)x-2ty+5t^2+4t-14=0$

Theo đề bài d đi qua $N(3;-4)$ nên ta có phương trình :

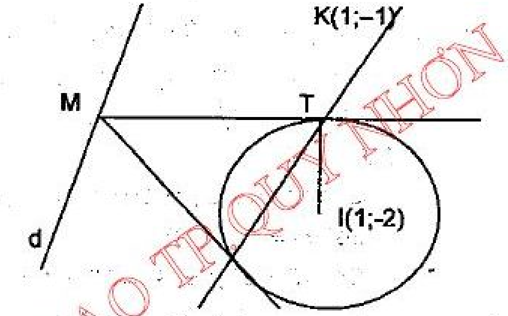
$-6(2t+1)+8t+5t^2+4t-14=0 \Leftrightarrow -12t-6+8t+5t^2+4t-14=0 \Leftrightarrow t^2=4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow M(5;2)$ hoặc $M(-3;-2)$ (loại)

Đường thẳng BC đi qua M(5;2) và có vectơ pháp tuyến là $\bar{n}=\frac{1}{2}\overline{AH}=(2;1)$

Do đó BC : $2x+y-12=0$

Bài 55:



Tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$.

$M(m;m+1)\in d$.

Gọi $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm,

Ta có $(x_0;y_0)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MT}.\overline{IT}=0 \\ T\in(C) \end{cases}$$

với $\overline{MT}=(x_0-m;y_0-m-1)$;

$\overline{IT}=(x_0-1;y_0+2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-m)(x_0-1)+(y_0-m-1)(y_0+2)=0 & (1) \\ x_0^2+y_0^2-2x_0+4y_0+1=0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra tọa độ các tiếp điểm $(x_0;y_0)$ thỏa mãn phương trình đường thẳng $\Delta: (1-m)x-(3+m)y-2m-3=0$.

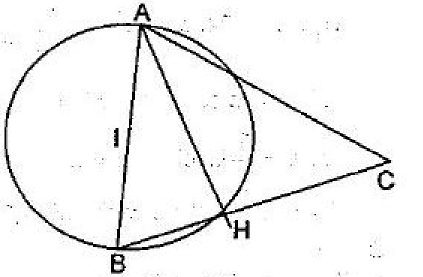
Lại có $K(1;-1)$ thuộc Δ, suy ra $m=\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Bài 56:

Dễ thấy I(2;1) tâm đường tròn (C) là trung điểm đoạn AB.

Tọa độ A thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}\Rightarrow A(1;3)$.

Do I trung điểm AB nên $B(3;-1)$.



Gọi $C(t;t+2)\Rightarrow \overline{BC}=(t-3;t+3)$

$\Rightarrow \overline{BH}=\left(\frac{t}{3}-1;\frac{t}{3}+1\right)$

Gọi $H(x_0;y_0)\Rightarrow \overline{BH}=(x_0-3;y_0+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-3=\frac{t}{3}-1 \\ y_0+1=\frac{t}{3}+1 \end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{t}{3}+2;\frac{t}{3}\right),$$

thay tọa độ H vào (C) vì $H\in(C)\Rightarrow t=6; t=-3\Rightarrow C(6;8)$; $C(-3;-1)$.

Bài 57:

Đường tròn (C) có tâm I(3;−2) và có bán kính $R=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Ta có $M\in d\Rightarrow M(m;-m-5)$.

Ta có

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}.R^2.\sin\widehat{AIB}\Rightarrow\sin\widehat{AIB}=\frac{2S_{IAB}}{R^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\widehat{AIB}=60^0\\ \widehat{AIB}=120^0\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\widehat{AIB}=60^0\Rightarrow\widehat{AIM}=30^0\Rightarrow IM=\dfrac{IA}{\cos\widehat{AIM}}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(m-3)^2+(-m-5+2)^2=18$

$\Leftrightarrow 2m^2+18=18\Leftrightarrow m=0\Rightarrow M(0;-5).$

Trường hợp 2: $\widehat{AIB}=120^0\Rightarrow\widehat{AIM}=60^0\Rightarrow IM=\dfrac{IA}{\cos\widehat{AIM}}=3\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow 2m^2+18=54\Leftrightarrow m=\pm3\sqrt{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(3\sqrt{2};-3\sqrt{2}-5)\\ M(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}-5).\end{array}\right.$$

Vậy $M(0;-5);M(3\sqrt{2};-3\sqrt{2}-5)$ hoặc $M(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}-5)$.

Bài 58:

Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Từ giả thiết ta có I là trung điểm của BC và $R=\dfrac{BC}{2}$. Ta có $I\in d\Rightarrow I(t;t-3)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC. Ta có

$$AH=d(A;d)=\frac{|2-6-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}\Rightarrow BC=\frac{2S_{ABC}}{AH}=\frac{2.\frac{35}{\sqrt{2}}}{\frac{7}{\sqrt{2}}}=10.$$

Do đó $R=\dfrac{BC}{2}=5.$

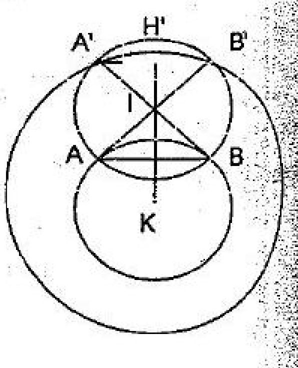
Ta có

$$AI=R=5\Leftrightarrow(t-2)^2+(t-3-6)^2=25\Leftrightarrow t^2-11t+30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\ t=6\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I(5;2)\\ I(6;3)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là

$(x-5)^2+(y-2)^2=25$ hoặc $(x-6)^2+(y-3)^2=25$

Bài 59:



Đường tròn (C) có tâm I(1;2), bán kính R = 2

Tam giác IAB có diện tích lớn nhất khi nó vuông tại I, hay $AB=2\sqrt{2}$,

mà $IK=2\sqrt{2}$ suy ra có hai đường tròn thoả mãn yêu cầu bài toán

(T_1) có bán kính

$R_1=R=2\Rightarrow(T_1):(x-3)^2+(y-4)^2=4$

(T_2) có bán kính

$R_2=KA'=\sqrt{KH^2+A'H^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow(T_2):(x-3)^2+(y-4)^2=20$

Bài 60:

Đường tròn (C) có tâm và bán kính là $I\left(\dfrac{1}{2};2\right),R=\dfrac{5}{2}$

Gọi H là trung điểm đoạn $AB\Rightarrow H(5;-4)$. Xét tam giác MAB có

$$MH^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\Leftrightarrow P=MA^2+MB^2=2MH^2+\frac{AB^2}{2}$$

Do đó P nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất hay M là giao điểm của OH với (C)

Mà IH: $\begin{cases}x=5+3t\\ y=-4-4t\end{cases}$, thay vào phương trình đường tròn ta được phương trình

$t^2+3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-2\end{array}\right.$

Với $t=-1$ thì $M(2;0)$, với $t=-2$ thì $M(-1;4)$

Kiểm tra thấy $M(2;0)$ là điểm cần tìm

Bài 61:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm AB. Khi đó: $S_{ABI}=IH.AH\Leftrightarrow 4=\sqrt{R^2-AH^2}.AH$

$$\Leftrightarrow 16=(8-AH^2).AH^2\Leftrightarrow AH^2=4\Leftrightarrow AH=2$$

Ta có $IK=5>2\sqrt{2}=R$ nên có hai trường hợp sau

ường hợp 1: H nằm giữa đoạn thẳng IK, ta có

$AK=\sqrt{HA^2+KH^2}=\sqrt{HA^2+(KI-IH)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

Do đó đường tròn cần tìm có phương trình $(x-1)^2+(y-3)^2=13$.

ường hợp 2: I nằm giữa đoạn thẳng HK, ta có

$AK=\sqrt{HA^2+KH^2}=\sqrt{HA^2+(KI+IH)^2}=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$

Do đó đường tròn cần tìm có phương trình $(x-1)^2+(y-3)^2=53$.

Vậy đường tròn cần tìm có phương trình.

$(x-1)^2+(y-3)^2=13$ và $(x-1)^2+(y-3)^2=53$.

Bài 62:

Tâm I của đường tròn thuộc Δ nên $I(-3t-8;t)$

Theo yêu cầu bài toán thì khoảng cách từ I đến Δ' bằng khoảng cách IA nên ta có $\dfrac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$

Giải phương trình trên ta được $t=-3$

Khi đó $I(1;-3)$, $R=5$ và pt cần tìm: $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

Bài 63:

Gọi H là hình chiếu của A trên d là $H\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$. $AH = d(A;d) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là trung điểm BC

d vuông góc BC nên BC//AH suy ra $\widehat{ABH} = 60^0$

Suy ra, $HB = \frac{AH}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

Gọi tọa độ của $B(t;2t-1)$

$$BH = \frac{1}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \left(t-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(2t-\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \left(t-\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{1}{75} \Leftrightarrow t = \frac{7}{5} \pm \frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\right) \vee B\left(\frac{7}{5}-\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}-\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)$$

TH1: $B\left(\frac{7}{5}+\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)$

Phương trình BC qua B vuông góc với d là $x+2y-5-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$

$$C \in BC \Rightarrow C\left(5+\frac{1}{\sqrt{3}}-2a;a\right)$$

$$\overline{AC}.\overline{AB} = 0 \Rightarrow a = \frac{31+2\sqrt{3}}{15} \Rightarrow C\left(\frac{13+\sqrt{3}}{15};\frac{31+2\sqrt{3}}{15}\right)$$

TH2: $B\left(\frac{7}{5}-\frac{\sqrt{3}}{15};\frac{9}{5}-\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)$

Phương trình BC qua B vuông góc với d là $x+2y-5+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$

$$C \in BC \Rightarrow C\left(5-\frac{1}{\sqrt{3}}-2a;a\right)$$

$$\overline{AC}.\overline{AB} = 0 \Rightarrow a = \frac{31+2\sqrt{3}}{15} \Rightarrow C\left(\frac{13-\sqrt{3}}{15};\frac{31-2\sqrt{3}}{15}\right)$$

Bài 64:

Đường tròn (C) có tâm I(0;2), bán kính $R = 2\sqrt{2}$. Gọi tọa độ điểm $M(a;2a-1)$

Do tam giác ABC đều nội tiếp (C) nên

$$IM = \frac{1}{2}R \Leftrightarrow a^2 + (2a-3)^2 = 2 \Leftrightarrow 5a^2 - 12a + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \frac{7}{5} \end{array}\right.$$

Với $a = 1 \Rightarrow M(1;1)$

Khi đó, AB qua M vtpt là $\overline{IM}(1;-1)$ có phương trình là $x-y=0$.

Phương trình của CM là $x+y-2=0$. Tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-4y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được tọa độ $C(-2;4)$. Với $a = \frac{7}{5} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$

Khi đó, AB qua M vtpt là $\overline{IM}\left(\frac{7}{5};\frac{-1}{5}\right)$ có phương trình là $7x-y+2=0$.

Phương trình của CM là $x+7y-14=0$. Tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+7y-14=0 \\ x^2+y^2-4y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{-14}{5} \\ y=\frac{12}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{14}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đó tìm được tọa độ $C\left(\frac{-14}{5};\frac{8}{5}\right)$.

ài 65:

Ta có từ giả thiết suy ra đường tròn (T) cần lập là đường tròn có đường kính BC.

Gọi $B(t;2-t) \in (d) \Rightarrow \overline{AB} = (t+2;4-t)$

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{CAB} = 45^0$. Đường thẳng (d) có VTCP: $\overline{u} = (1;-1)$

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \left|\cos\left(\overline{AB},\overline{u}\right)\right| = \frac{|2t-2|}{\sqrt{2\left(2t^2-4t+20\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t-2|}{\sqrt{\left(2t^2-4t+20\right)}} = 1 \Leftrightarrow 2t^2-4t+20 = 4t^2-8t+4 \Leftrightarrow t^2-2t-8=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2 \end{array}\right.$$

Với $\left[\begin{array}{l} t=4 \Rightarrow B(4;-2) \\ t=-2 \Rightarrow B(-2;4) \end{array}\right.$ vì vai trò của B và C như nhau suy ra

$\begin{cases} B(4;-2) \\ C(-2;4) \end{cases} \vee \begin{cases} B(4;-2) \\ C(-2;4) \end{cases}$

Đường tròn (T) có tâm là $I(1;1); R = 3\sqrt{2}$ nên có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$$

Bài 66:

Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng *AB* là $\vec{n} = (a;b), a^2 + b^2 \neq 0$

PT đường thẳng *AB* đi qua $M(-3;-2)$ có dạng $ax + by + 3a + 2b = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$ nên

$$d(I, AB) = R \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|2a + 3b + 3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow 10(a^2 + b^2) = 25(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a + 3b)(3a + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -3b \\ b = -3a \end{array}\right.$$

Do đó phương trình $AB: x - 3y - 3 = 0$ hoặc $AB: 3x - y + 7 = 0$.

TH1. $AB: x - 3y - 3 = 0$, gọi $A(3t + 3; t) \Rightarrow t > -1$ và do $IA^2 = 2.R^2 = 20$

nên $(1 + 3t)^2 + (t - 3)^2 = 20 \Leftrightarrow 10t^2 + 10 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Suy ra $A(6;1), C(-2;5)$ và $B(0;-1), D(4;7)$.

TH2. $AB: 3x - y + 7 = 0$, gọi $A(t; 3t + 7) \Rightarrow t > 0$ và do $IA^2 = 2.R^2 = 20$

nên $(t - 2)^2 + (3t + 4)^2 = 20 \Leftrightarrow 10t^2 + 20t + 20 = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right.$ (không thỏa mãn

Bài 67:

Tọa độ giao điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0; x = 2 \\ y = -1; x = -3 \end{cases}$

Vì A có hoành độ dương nên ta được $A(2;0), B(-3;-1)$.

Vì $\widehat{ABC} = 90^0$ nên AC là đường kính đường tròn, tức là điểm C đối xứng vớ

điểm A qua tâm I của đường tròn. Tâm $I(-1;2)$, suy ra $C(-4;4)$.

Bài 68:

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu của I lên AB, H là trung điểm của đoạn thẳng AB, đặt IH=

$(0 < x < 2\sqrt{5})$

$AH = \sqrt{20 - x^2}$;

$= \frac{1}{2} IH.AB = \frac{1}{2} x.2\sqrt{20 - x^2} = 8 \Leftrightarrow x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

$x = 2$ thì $AB = 8$ (thỏa mãn)

$x = 4$ thì $AB = 4 < IA$ (loại)

69:

Gọi $A(0;a), C(0;c)$, do ABCD là hình vuông nên dễ thấy $B(a;a), D(a;c)$

Ta có $\begin{cases} AB = AC \\ D \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |c - a| \\ a^2 + c^2 + 4a + 2c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 2a \end{array}\right. \\ a^2 + c^2 + 4a + 2c - 4 = 0 \end{cases}$

$c = 0$ thay vào pt còn lại ta có $\left[\begin{array}{l} a = -2 + 2\sqrt{2} \\ a = -2 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} A(0; -2 + 2\sqrt{2}); B(-2 + 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}); C(0;0); D(-2 + 2\sqrt{2}; 0) \\ A(0; -2 - 2\sqrt{2}); B(-2 - 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}); C(0;0); D(-2 - 2\sqrt{2}; 0) \end{array}\right.$

$c = 2a$ thay vào pt còn lại ta có $\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{-4 + 4\sqrt{2}}{5} \\ a = \dfrac{-4 - 4\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$

$A\left(0; \dfrac{-4 + 4\sqrt{2}}{5}\right); B\left(\dfrac{-4 + 4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{-4 + 4\sqrt{2}}{5}\right);$

$C\left(0; \dfrac{-8 + 8\sqrt{2}}{5}\right); D\left(\dfrac{-4 + 4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{-8 + 8\sqrt{2}}{5}\right)$

$A\left(0; \dfrac{-4 - 4\sqrt{2}}{5}\right); B\left(\dfrac{-4 - 4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{-4 - 4\sqrt{2}}{5}\right);$

$C\left(0; \dfrac{-8 - 8\sqrt{2}}{5}\right); D\left(\dfrac{-4 - 4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{-8 - 8\sqrt{2}}{5}\right)$

70:

Giả sử (C) có tâm I, bán kính R.

Do $I \in d_1 \Rightarrow I(a; 2a - 1)$.

$A \in (C) \Rightarrow R = IA = \sqrt{(a+2)^2 + (2a-7)^2}$

tiếp xúc với (C)

$$d(I, d_2) = R = IA \Leftrightarrow \frac{|3a - 4(2a-1) - 19|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \sqrt{(a+2)^2 + (2a-7)^2}$$

$$|a + 3| = \sqrt{(a+2)^2 + (2a-7)^2} \Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = 5a^2 - 24a + 53$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-15a+22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \Rightarrow I(2;3);R=5 \\ a=\frac{11}{2} \Rightarrow I\left(\frac{11}{2};10\right);R=\frac{17}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) thỏa mãn đề bài là: $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+(y-10)^2=\frac{289}{4}$$

Bài 71:

(C_1) có tâm O(0;0), bán kính $R_1=\sqrt{13}$

(C_2) có tâm I(6;0), bán kính $R_2=5$.

Giao điểm của (C_1) và (C_2) là $(2;3)$ hoặc $(2;-3)$.

Vì A có tung độ dương nên $A(2;3)$

Đường thẳng d qua A có phương trình

$$a(x-2)+b(y-3)=0 \Leftrightarrow ax+by-2a-3b=0$$

Gọi $d_1=d(O,d);d_2=d(I,d)$

Yêu cầu bài toán trở thành: $R_2^2-d_2^2=R_1^2-d_1^2 \Rightarrow d_2^2-d_1^2=12$

$$\frac{(4a-3b)^2}{a^2+b^2}-\frac{(2a+3b)^2}{a^2+b^2}=12 \Rightarrow b^2+3ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-3a \end{array}\right.$$

+ Với $b=0$, chọn $a=1$, suy ra phương trình d là: $x-2=0$
+ Với $b=-3a$, chọn $a=1, b=-3$, suy ra phương trình d là: $x-3y+7=0$

Bài 72:

Giả sử (C) có tâm I và bán kính R

a có d_1 và d_2 giao nhau tại O và góc $\widehat{AOB}=30^0$

Chu vi $C_{\Delta ABC}=AB+BC+CA=\left(3+\sqrt{3}\right)R \Rightarrow \left(3+\sqrt{3}\right)R=3+\sqrt{3} \Rightarrow R=1$

$OI=2R=2 \Rightarrow I(0;2);I(0;-2)$

$\Rightarrow$ phương trình đường tròn (C): $x^2+(y-2)^2=1$; $x^2+(y+2)^2=1$

Bài 73:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $IA=2$.

Ta có: $\overline{IM}=(1;-1), IM\perp AB$ suy ra phương trình đường thẳng AB: $x-y+1=0$

$A\in AB \Rightarrow A(a;a+1);(a>0)$. Khi đó

$IA=2 \Leftrightarrow (a+1)^2+(a-1)^2=4 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=1$ (do $a>0$).

Suy ra: $A(1;2);B(-1;0)$

$\overline{IA}=(2;0);IA\perp BC$ suy ra phương trình BC: $x+1=0$, phương trình AI: $y-2=0$

Gọi $\{N\}=AI\cap BC$. Suy ra $N(-1;2)$ và N là trung điểm của BC. Suy ra $C(-1;4)$

ài 74:

Xét $M(m;m+1)$ thuộc đường thẳng d

Viết phương trình đường thẳng qua 2 tiếp điểm A và B là

$(\Delta):(m-1)x+(m+3)y+(m-2)=0$

Tìm được điểm cố định (Δ) luôn đi qua là: $D\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên (Δ) khi đó $NH\le ND$.

Dấu "=" xảy ra khi $ND\perp(\Delta)$. Từ đó tìm được $m=-6$.

Vậy $M(-6;-5)$.

ài 75:

Đường tròn (C) có tâm $I(-6;6)$, bán kính $R=\sqrt{50}$.

Giả sử đường thẳng (Δ) cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A(a;0) và B(0;b) $(ab\ne 0)$.

M là trung điểm của AB suy ra $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$

Đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn (C) tại M nên: $\begin{cases} M\in(C) \\ IM\perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\in(C) \\ \overline{IM}\,\overline{AB}=0 \end{cases}$

Ta có $\overline{IM}\left(\frac{a}{2}+6;\frac{b}{2}-6\right);\overline{AB}(-a;b) \Rightarrow \overline{IM}\,\overline{AB}=0$

$$\Leftrightarrow -a\left(\frac{a}{2}+6\right)+b\left(\frac{b}{2}-6\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ -a+b-12=0 \end{array}\right.(1)$$

Mặt khác: $M\in(C) \Rightarrow \left(\frac{a}{2}+6\right)^2+\left(\frac{b}{2}-6\right)^2=50(2)$

Từ (1) và (2) giải ra được

$(a;b)=(-2;2)$, $(a;b)=(-22;22)$, $(a;b)=(-10;2)$, $(a;b)=(-26;-14)$.

Vậy có 4 đường thẳng cần lập.

ài 76:

Phương trình trung trực của *AB*: $d: x+2y-1=0$

Do tam giác *ABC* cân ở *C* do đó *C* là giao điểm của *d* và (*C*). Tọa độ của *C* là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=1-2y \\ x^2+y^2+6x-2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y \\ 5y^2-18y+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;y=1 \\ x=-\frac{21}{5};y=\frac{13}{5} \end{array}\right.$$

Ta có $C_1(-1;1)$, $C_2\left(-\frac{21}{5};\frac{13}{5}\right)$.

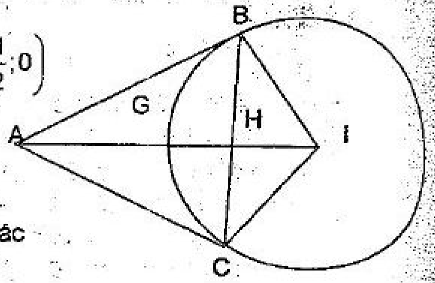
So sánh khoảng cách từ 2 điểm đến

AB ta có điểm cần tìm là $C\equiv C_1$

Bài 77:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R = 5$,

BC cắt IA tại H.



Ta có $IA=10 \Rightarrow IH = \frac{5}{2}, \overline{IH} = \frac{1}{4}\overline{IA} \Rightarrow H\left(\frac{1}{2};0\right)$

$\cos\widehat{AIB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AIB} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Suy ra tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm tam giác ABC.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC

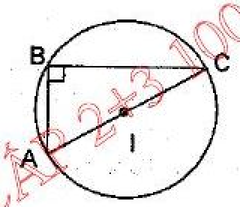
Ta có $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AH} \Rightarrow G(2;-2)$, bán kính $r = GH = \frac{5}{2}$

Suy ra phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$$

Bài 78:

Từ phương trình đường thẳng $\Delta \Rightarrow x = 5y + 2$ thế và phương trình đường tròn (C) ta được:



$$(5y+3)^2 + (y-2)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 26y^2 + 26y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -3 \end{array}\right.$$

Các giao điểm là: $(2;0), (-3;-1)$

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$

Tam giác ABC nội tiếp (C) và vuông tại $B \Rightarrow AC$ là đường kính

$\Rightarrow$ A, C đối xứng nhau qua I.

Với $B(2;0) \Rightarrow A(-3;-1), C(1;5)$

Với $B(-3;-1) \Rightarrow A(2;0), C(-4;4)$

§ 3: BA ĐƯỜNG CONIC

Bài toán liên quan tới 3 đường conic tuy rất ít gặp trong đề thi đại học, nhưng lại là phần hay và cũng khá khó, với phần này học sinh ban cơ bản chỉ cần học về đường Elip, còn ban nâng cao thì học hết. Để làm tốt phần này học sinh cần nắm vững lý thuyết, các tính chất của ba đường conic và đặt biệt là các bài toán tương giao giữa đường tròn và ba đường conic, các hình vuông, hình thoi ngoại tiếp Elip...Hình chữ nhật cơ sở

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VỀ BA ĐƯỜNG CONIC

Elip (E)

Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$

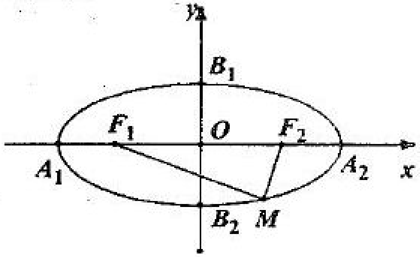
Các yếu tố: $c^2 = a^2 - b^2$, $c>0$.

Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$; Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 2a$; Độ dài trục bé $B_1B_2 = 2b$.

Hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Bốn đỉnh: đỉnh trên trục lớn $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$,

đỉnh trên trục bé $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.



Bán kính qua tiêu điểm:

$MF_1 = r_1 = a + ex_M$; $MF_2 = r_2 = a - ex_M$

Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$

Đường chuẩn: $x = \pm\frac{a}{e}$

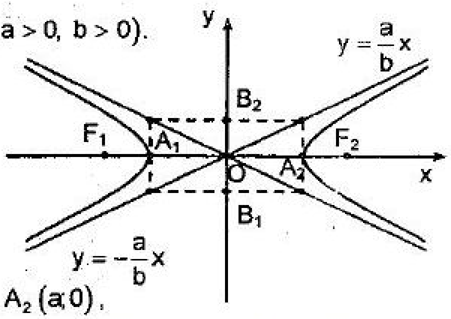
Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d = 2\frac{a}{e}$.

Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip là:

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2.$$

Hyperbol (H)

Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0,\ b > 0)$.



Các yếu tố: $c^2 = a^2 + b^2$, $c>0$.

Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$;

Độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a$;

Độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b$.

Hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Hai đỉnh: đỉnh trên trục thực $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, Hai đường tiệm cận: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Tâm sai: $e = \frac{c}{a} > 1$

Đường chuẩn: $x = \pm\frac{a}{e}$

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d = 2\frac{a}{e}$

3. Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với hypebol là:

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2.$$

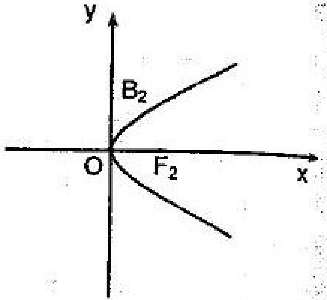
III. Parabol (P)

1. Phương trình chính tắc:

   $y^2 = 2px$, ($p > 0$ gọi là tham số tiêu).

2. Các yếu tố:

   Một tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Lập phương trình các đường conic

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Giải:

Phương trình chính tắc có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

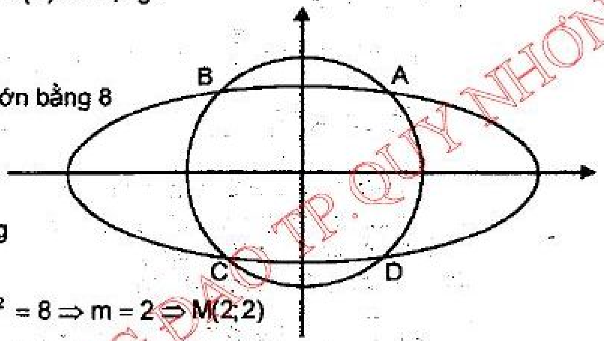
Chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 20 $\Leftrightarrow a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a$ $(0 < a < 5)$

$a^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 - (5 - a)^2 = \frac{5a^2}{9} \Leftrightarrow a^2 - 18a + 45 = 0 \Leftrightarrow a = 15$ (loại) hay $a = 3$ (nhận)

Phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Thí dụ 2: **(ĐH – A 2012)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Giải:



Phương trình chính tắc của (E) có dạng:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

Theo giả thiết độ dài trục lớn bằng 8

$\Leftrightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Do tính đối xứng của (E) nên giao điểm của (C) và (E) là đỉnh hình vuông thỏa mãn $M(m;m), m > 0$

Suy ra $M \in (C) \Leftrightarrow m^2 + m^2 = 8 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow M(2;2)$

Mặt khác $M(2;2) \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}$.

Vậy phương trình của (E) có dạng: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$

Chú ý: Đường tròn và Elip nhận gốc O làm tâm đối xứng nên 4 đỉnh của hình vuông là $A(m;m); B(-m;m); C(-m;-m); D(m;-m)$

Thí dụ 3: **(ĐH – B 2012)** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có *AC = 2BD* và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh *A, B, C, D* của hình thoi. Biết *A* thuộc *Ox*.

Giải:

Đường tròn (C) có tâm $I \equiv O(0;0)$ và có bán kính $R = 2$, đường tròn (C) tiếp xúc với các cạnh của hình thoi ABCD nên O là tâm của hình thoi ABCD, H là hình chiếu vuông góc của O lên AB $\Rightarrow OH = R = 2$

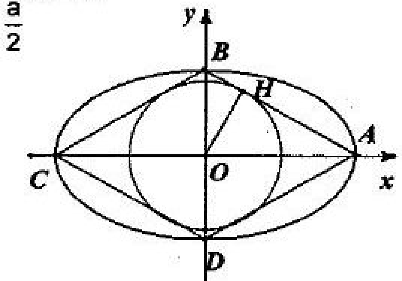
Giả sử $A(a;0) \in Ox$, điểm C đối xứng với A qua O nên $C(-a;0)$

$$\Rightarrow AC = 2a,\ BD = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow \begin{cases} OA = \frac{AC}{2} = a \\ OB = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}, a > 0.$$

Trong tam giác vuông OAB ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{5}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} AC = 4\sqrt{5} \\ BD = 2\sqrt{5} \end{cases}$$



Giả sử phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Vì (E) đi qua bốn đỉnh A, B, C, D nên có độ dài trục lớn $AC = 2a$, trục b $BD = 2b \Rightarrow b = \sqrt{5}$

Vậy phương trình của $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho Hypebol (*H*) có phương trình: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Viết phương trình chính tắc của elip (*E*) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (*H*) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (*H*).

Giải:

(H) có các tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0)$. Hình chữ nhật cơ sở của (H) có một đỉnh là $M(4;3)$,

Giả sử phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (với a > b)

(E) cũng có hai tiêu điểm $F_1(-5;0); F_2(5;0) \Rightarrow a^2 - b^2 = 5^2$ (1)

$M(4;3) \in (E) \Leftrightarrow 9a^2 + 16b^2 = a^2b^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2 = 5^2 + b^2 \\ 9a^2 + 16b^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 40 \\ b^2 = 15 \end{cases}$

Vậy $(E): \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thoi có cạnh bằng 5, chiều cao bằng 4,8. Hai đường chéo nằm trên hai trục Ox và Oy. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua hai đỉnh đối diện của hình thoi và nhận hai đỉnh đối diện còn lại làm hai tiêu điểm.

Giải:

Phương trình chính tắc của (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Gọi b là bán trục nhỏ của (E), c là khoảng cách từ tâm đến tiêu điểm

Ta có $b^2 + c^2 = 25$ (1)

Mặt khác diện tích hình thoi là 2bc = 5. 4,8 = 24 (2)

Từ (1) và (2) có hệ $\begin{cases} b^2 + c^2 = 25 \\ bc = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $\begin{cases} b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Trường hợp 2: $\begin{cases} b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Thí dụ 6: Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy viết phương trình chính tắc của Hyperbol (H), biết (H) có 2 tiêu điểm $F_1(-5;0), F_2(5;0)$ và nếu M là một điểm thuộc (H) thỏa $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$ thì diện tích tam giác MF_1F_2 bằng $9\sqrt{3}$

Giải:

Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác MF_1F_2 Ta có

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2.\cos 60^0 \Leftrightarrow F_1F_2^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + MF_1.MF_2$

$\Leftrightarrow 4c^2 = 4a^2 + MF_1.MF_2 \Leftrightarrow MF_1.MF_2 = 4c^2 - 4a^2 = 4b^2$

$S_{MF_1F_2} = \frac{1}{2}MF_1.MF_2.\sin 60^0 = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2 = 9$

$a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

Vậy hypebol cần tìm có phương trình $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Thí dụ 7: Trong hệ tọa độ *Oxy*, hãy viết phương trình hyperbol (*H*) dạng chính tắc biết rằng (*H*) tiếp xúc với đường thẳng $d: x - y - 2 = 0$ tại điểm *A* có hoành độ bằng 4.

Giải:

Gọi $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(*H*) tiếp xúc với $d: x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4$ (1)

$x = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(4;2) \in (H) \Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 8; b^2 = 4 \Rightarrow (H): \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

Thí dụ 8: Trong hệ tọa độ Oxy cho elip (E) đi qua $M(-2;3)$ và hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $8\sqrt{3}$. Viết phương trình chính tắc của elip (E).

Giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

Theo bài ra ta có :

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ 2a.2b = 8\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3a^2}{4} = 1 \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^4 - 4a^2 + 16 = 0 \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \text{vô nghiệm}$$

Vậy không tồn tại phương trình chính tắc của elip (E) thoả mãn yêu cầu bài bán.

Dạng 2: Các bài toán về sự tương giao của ba đường conic với các đường khác

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm $M(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (E) tại hai điểm C, D sao cho MC = MD.

Giải:

Gọi d là đường thẳng qua $M(1;1)$ cắt (E) tại C, D.

Vì (E) có tính đối xứng nên d không thể vuông góc với Ox, do đó phương trình của d có dạng: $y = k(x-1)+1 \Leftrightarrow y = kx + 1 - k$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (E): $4x^2 + 9(kx+1-k)^2 - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (4+9k^2)x^2 + 18k(1-k)x + 9(1-k)^2 - 36 = 0 \qquad (1)$

$(\Delta' = 288k^2 + 72k + 108 > 0, \ \forall k)$

$\Rightarrow$ d luôn cắt (E) tại 2 điểm C, D với các hoành độ x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = \dfrac{-18k(1-k)}{4+9k^2}$

$M(1;1)$ là trung điểm của CD $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_M \Leftrightarrow \dfrac{-18k(1-k)}{4+9k^2} = 2 \Leftrightarrow k = -\dfrac{4}{9}$.

Vậy, phương trình đường thẳng $d: 4x + 9y - 13 = 0$

Dễ thấy đường thẳng Δ qua $M(1;1)$ mà song song với Ox thì không thoả mãn.

Đường thẳng Δ có phương trình: $y = k(x-1)+1$.

Toạ độ A, B thoả mãn $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y = k(x-1)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(k(x-1)+1)^2}{4} = 1 \\ y = k(x-1)+1 \end{cases}$

Khi đó hoành độ $x_A; x_B$ là hai nghiệm của phương trình:

$(4+9k^2)x^2 - (18k^2 - 18k)x + 9k^2 - 2k - 35 = 0$

Có $2x_M = x_A + x_B = \dfrac{18k^2 - 18k}{4+9k^2} \Rightarrow k = \dfrac{4}{9}$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình: $4x - 9y + 5 = 0$

Thí dụ 2: Cho Elip có phương trình chính tắc $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, viết phương trình đường thẳng song song Oy và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho AB = 4.

Giải:

Gọi phương trình đường thẳng // Oy là: $d: x = a \ (a \neq 0)$ tung độ giao điểm d và Elip là: $\dfrac{a^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{9} = 1 - \dfrac{a^2}{25} = \dfrac{25-a^2}{25}$

$\Rightarrow y^2 = 9.\dfrac{25-a^2}{25} \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25-a^2} \ (|a| \le 5)$

Vậy $A\left(a; \dfrac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\right), B\left(a; -\dfrac{3}{5}\sqrt{25-a^2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(0; \dfrac{6}{5}\sqrt{25-a^2}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \dfrac{6}{5}\sqrt{25-a^2} = 4$

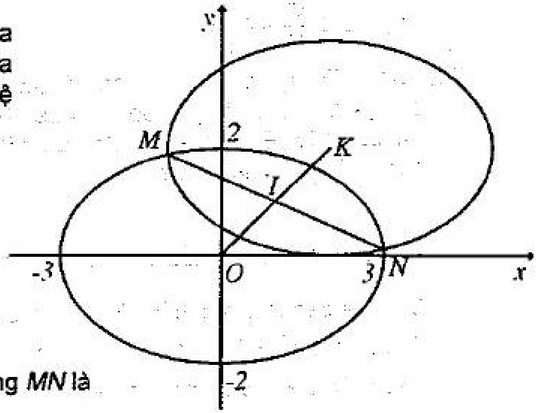
$\Leftrightarrow \sqrt{25-a^2} = \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow 25 - a^2 = \dfrac{100}{9} \Leftrightarrow a^2 = 25 - \dfrac{100}{9} = \dfrac{125}{9} \Rightarrow a = \pm\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Vậy phương trình đường thẳng: $x = \dfrac{-5\sqrt{5}}{3}, x = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

Thí dụ 3: Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và điểm $I(1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng *d* qua *I* cắt *(E)* tại hai điểm *M, N* sao cho I là trung điểm của *MN*.

Giải:

Xét phép đối xứng tâm $I(1; 1)$: $Đ_I$ biến điểm O thành điểm $K(2; 2)$, biến elip *(E)* thành elip có phương trình $(E'): \dfrac{(2-x)^2}{9} + \dfrac{(2-y)^2}{4} = 1$ và biến điểm *M* thành điểm *N*, *N* thành *M*.



Do vậy *M, N* là giao điểm của hai elip *(E)* và *(E')* suy ra tọa độ hai điểm *M, N* thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{(2-x)^2}{9} + \dfrac{(2-y)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Trừ vế cho vế ta được

$4x + 9y - 13 = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng *MN* là

$4x + 9y - 13 = 0$.

Cách khác:

Xét đường thẳng $x = 1$ qua I cắt (E) tại hai điểm phân biệt, không thỏa mãn ycbt. Gọi Δ là đường thẳng qua I có hệ số góc k.

Suy ra phương trình của $\Delta: y = k(x-1)+1$.

M, N là giao điểm của Δ và (E), từ điều kiện I là trung điểm MN suy ra $k = -\dfrac{4}{9}$

Vậy phương trình Δ : $4x + 9y - 13 = 0$.

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip (E) : $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$. Vi phương trình tiếp tuyến d của (E) biết d cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A B sao cho AO = 2BO.

Giải:

Do tính đối xứng của elip (E). Ta chỉ cần xét trường hợp $x \ge 0, y \ge 0$

Gọi $A(2m,0);B(0,m)$ là giao điểm của tiếp tuyến của (E) với các trục tọa đ $(m>0)$.

Phương trình AB: $\frac{x}{2m}+\frac{y}{m}=1 \Leftrightarrow x+2y-2m=0$

AB tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow 64+4.9=4m^2 \Leftrightarrow 4m^2=100 \Leftrightarrow m^2=25 \Leftrightarrow m=5\,(m>0)$

Vậy pt tiếp tuyến là $x+2y-10=0$

Vì tính đối xứng nên ta có 4 tiếp tuyến là

$x+2y-10=0, x+2y+10=0$
$x-2y-10=0, x-2y+10=0$

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y^2=2x$ và điểm K(2;0). Đường thẳng *d* đi qua *K* cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *M*, *N*. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *OMN* nằm trên đường thẳng *d*.

Giải:

Xét hai trường hợp

TH1: $d \perp Ox \Rightarrow d: x=2$. Từ $\begin{cases} x=2 \\ y^2=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2;2) \\ N(2;-2) \end{cases} \Rightarrow \overline{OM}.\overline{ON}=0$. (1)

TH2: $d \not\perp Ox \Rightarrow d: y=kx-2k$.

Tọa độ *M*, *N* là nghiệm của $\begin{cases} y=kx-2k \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y^2}{2} \\ y=k.\frac{y^2}{2}-2k \end{cases}$

$\Rightarrow ky^2-2y-4k=0$. (2)

Để *d* cắt (*P*) tại *M*, *N* phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k \ne 0$.

Gọi $M\left(\frac{y_1^2}{2};y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{2};y_2\right)$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm của (2).

Ta có $\overline{OM}.\overline{ON}=\left(\frac{y_1y_2}{2}\right)^2+y_1y_2=(-2)^2+(-4)=0$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\angle MON=90^0 \Rightarrow \Delta OMN$ vuông tại *O*. Suy ra tâm *I* của đường tròn ngoại tiếp ΔOMN là trung điểm *MN* $\Rightarrow I \in d$.

dụ 6: Cho đường parabol có phương trình: $y^2=-4x$ và giả sử F là tiêu điểm của nó. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng đi qua F và cắt parabol tại hai điểm A, B thì các tiếp tuyến với parabol tại A, B vuông góc với nhau.

Giải:

Tiêu điểm của Parabol $F(-1;0)$. Đường thẳng (Δ) qua F có phương trình:

$a(x+1)+by=0$.

Đường thẳng y = 0 chỉ cắt Parabol tại 1 điểm, không thoả mãn bài toán.

Chọn $a=1 \Rightarrow x=-1-by$.

Tung độ giao điểm của Parabol và đường thẳng (Δ) phải thoả mãn phương trình: $y^2=-4(-1-by) \Leftrightarrow y^2-4by-4=0$ luôn có 2 nghiệm $y_1 \ne y_2$ thoả mãn: $y_1y_2=-4$

Giả sử $A(x_1;x_2)$, $B(x_2;y_2)$ là các giao điểm.

Phương trình tiếp tuyến với parabol tại A, B lần lượt là $y_1y=-2(x_1+x)\,(d_1)$ và $y_2y=-2(x_2+x)\,(d_2)$

Ta có các vectơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là

$\overline{n_1}=(2;y_1), \overline{n_2}=(2;y_2) \Rightarrow n_1n_2=4+y_1y_2=0$ hay $(d_1) \perp (d_2)$

Dạng 3: Các bài toán định tính về đường conic

dụ 1: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y^2=16x$ và điểm $A(1;4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC}=90^0$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

Hai điểm B, C $\in$ (P) $\Rightarrow B\left(\frac{b^2}{16};b\right), C\left(\frac{c^2}{16};c\right)$ $(b \ne c, b \ne 4, c \ne 4)$

$\overline{AB}=\left(\frac{b^2}{16}-1;b-4\right), \overline{AC}=\left(\frac{c^2}{16}-1;c-4\right)$

$AB \perp AC \Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{AC}=0 \Leftrightarrow (b+4)(c+4)+256=0$

$\Leftrightarrow b+c=\frac{-272-bc}{4}=-\left(68+\frac{bc}{4}\right)$

BC qua $B\left(\frac{b^2}{16};b\right)$ có 1 vtcp : $\overline{BC}=\frac{c-b}{16}(c+b;16)$.

Nên có phương trình BC:

$16\left(x-\frac{b^2}{16}\right)-(b+c)(y-b)=0 \Leftrightarrow 16x-(b+c)y+bc=0$

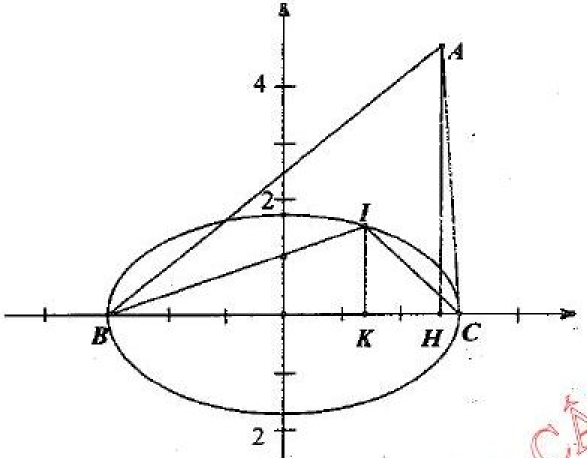
$\Leftrightarrow 4(4x+17y)+bc\left(\dfrac{y}{4}+1\right)=0$

BC luôn qua điểm cố định thoả : $\begin{cases}4x+17y=0\\ \dfrac{y}{4}+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=17\\ y=-4\end{cases}$

Vậy BC luôn qua $I(17;-4)$ cố định.

Thí dụ 2: Cho tam giác ABC có $B(-3;0)$, $C(3;0)$ và AH = 3*r* (với AH là đường cao, *r* là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tâm là I). Chứng minh I thuộc một đường cong cố định khi A thay đổi (vẫn thỏa mãn điều kiện trên).

Giải:



Gọi $I(x;y)$. Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC.AH=\dfrac{1}{2}(AB+BC+CA).IK$ và $AH=3IK$. Suy ra

$AB+AC=2BC \Leftrightarrow \sin C+\sin B=2\sin A \Leftrightarrow \cot\dfrac{B}{2}.\cot\dfrac{C}{2}=3 \Leftrightarrow \dfrac{BK}{IK}.\dfrac{CK}{IK}=3$

$\Leftrightarrow BK.CK=3IK^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1.$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E): $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ và đường thẳng $\Delta: 3x+4y=12$. Từ điểm M bất kì trên Δ kẻ tới (E) các tiếp tuyến MA, MB. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$

Tiếp tuyến tại A có dạng $\dfrac{xx_1}{4}+\dfrac{yy_1}{3}=1$

Tiếp tuyến đi qua M nên $\dfrac{x_0x_1}{4}+\dfrac{y_0y_1}{3}=1 \qquad (1)$

Ta thấy tọa độ của A và B đều thỏa mãn (1) nên đường thẳng AB có pt $\dfrac{xx_0}{4}+\dfrac{yy_0}{3}=1$ do M thuộc Δ nên $3x_0+4y_0=12 \Leftrightarrow 4y_0=12-3x_0$

$\Rightarrow \dfrac{4xx_0}{4}+\dfrac{4yy_0}{3}=4 \Rightarrow \dfrac{4xx_0}{4}+\dfrac{y(12-3x_0)}{3}=4$

Gọi $F(x;y)$ là điểm cố định mà AB đi qua với mọi M thì

$(x-y)x_0+4y-4=0 \Rightarrow \begin{cases}x-y=0\\ 4y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$

Vậy AB luôn đi qua điểm cố định F(1;1)

Thí dụ 4: Cho elip (E) : $4x^2+16y^2=64$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm. M là điểm bất kì trên (E).Chứng tỏ rằng tỉ số khoảng cách từ M tới tiêu điểm F_2 và tới đường thẳng $x=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ có giá trị không đổi.

Giải:

Ta có $F_1(-\sqrt{12};0), F_2(\sqrt{12};0)$.

Giả sử $M(x_0;y_0)$ thuộc (E), H là hình chiếu của M trên đường thẳng $x=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$.

Ta có $MF_2=a-\dfrac{cx_0}{a}=\dfrac{8-\sqrt{3}x_0}{2}$

$MH=\dfrac{8-\sqrt{3}x_0}{\sqrt{3}}$. Vậy $\dfrac{MF_2}{MH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ không đổi

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đècác vuông góc Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, b>0)$. Giả sử A, B là hai điểm thay đổi trên (E) sao cho OA vuông góc với OB.

a. Tính $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}$ theo a và b.

b. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB. Tìm tập hợp các điểm H khi A, B thay đổi trên (E).

Giải:

a. Giả sử đường thẳng đi qua OA có phương trình: $y=kx$

Nếu k = 0, hiển nhiên $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

Nếu $k\neq 0$. Khi đó gọi toạ độ của A, B tương ứng là $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$. Ta có:

$1=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{k^2x_0^2}{b^2} \Rightarrow x_0^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2+k^2a^2} \Rightarrow OA^2=x_0^2+k^2x_0^2=(1+k^2).\dfrac{a^2b^2}{b^2+k^2a^2} \qquad (1)$

Do OA ⊥ OB nên đường thẳng đi qua OB có dạng $y = -\frac{1}{k}x$

Từ đó: $1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{k^2b^2} \Rightarrow x_1^2 = \frac{k^2a^2b^2}{a^2 + k^2b^2} \Rightarrow OB^2 = x_1^2 + \frac{x_1^2}{k^2} = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2 + k^2b^2}$ (2)

Từ (1) và (2) có: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$

b. Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$ không đổi ⇒ OH có độ dài không đổi.

Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}}$

Thí dụ 6: Cho đường tròn: $(C): (x+2)^2 + y^2 = 36$ và điểm $F_2(2;0)$. Xét các đường tròn tâm M đi qua F_2 và tiếp xúc với (C). Tìm quỹ tích tâm M

Giải:

Trước hết ta xét vị trí tương đối giữa F_2 và (C), ta có: $IF_2 = 4 < R = 6$ nên F_2 nằm bên trong đường tròn và sự tiếp xúc nói đến ở đây chính là tiếp xúc trong. Ta có: $MF_2 + MI = MI + MK = IK = R = 6$

Vậy quỹ tích điểm M chính là Elip có 2 tiêu điểm là I và K (K là điểm tiếp xúc của 2 đường tròn).

Trục thực có độ dài: 2a = 6 nên a = 3.

Nhưng: $F_2(2;0)$ nên c = 2. Và ta có: $b^2 = 5$ hay Elip có phương trình là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hypebol (H) có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Giả sử d là một tiếp tuyến thay đổi và F là một trong hai tiêu điểm của (H), kẻ FM ⊥d. Chứng minh rằng M luôn nằm trên một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó

Giải:

(H) có một tiêu điểm $F(\sqrt{13};0)$. Giả sử pttt d: ax + by + c = 0.

Khi đó: $9a^2 - 4b^2 = c^2$ (*)

Phương trình đường thẳng qua F vuông góc với (d) là (D):

$b(-x - \sqrt{13}) - ay = 0$

Toạ độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} ax + by = -c \\ bx - ay = \sqrt{13}b \end{cases}$

Bình phương hai vế của từng phương trình rồi cộng lại và kết hợp với (*) ta được $x^2 + y^2 = 9$

dụ 8: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Chứng minh rằng (P) giao (E) tại 4 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đi qua 4 điểm đó.

Giải:

Hoành độ giao điểm của (E) và (P) là nghiệm của phương trình

$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0$ (*)

xét $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$, f(x) liên tục trên R có

$f(-1)f(0) < 0,\ f(0)f(1) < 0,\ f(1)f(2) < 0,\ f(2)f(3) < 0$

suy ra (*) có 4 nghiệm phân biệt, do đó (E) cắt (P) tại 4 điểm phân biệt

Toạ độ các giao điểm của (E) và (P) thỏa mãn hệ $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 16x = 8y \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 16x - 8y - 9 = 0$ (**)

(**) là phương trình của đường tròn có tâm $I = \left(\frac{8}{9};\frac{4}{9}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{161}}{9}$

Do đó 4 giao điểm của (E) và (P) cùng nằm trên đường tròn có phương trình (**)

dụ 9: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy cho parabol (P): $y^2 = 4x$. M là một điểm di động trên (*P*). M ≠ 0, T là một điểm trên (*P*) sao cho T ≠ 0, OT vuông góc với OM.

Chứng minh rằng khi M di động trên (*P*) thì đường thẳng MT luôn đi qua một điểm cố định.

Chứng minh rằng khi M di động trên (*P*) thì thì trung điểm I của MT chạy trên 1 parabol cố định

Giải:

Giả sử $M\left(\frac{y_1^2}{4};y_1\right)$; $T\left(\frac{y_2^2}{4};y_2\right)$ với $y_1, y_2 \neq 0;\ y_1 \neq y_2$.

$OT \perp OM \Leftrightarrow \overline{OT}.\overline{OM} = 0 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{4}.\frac{y_1^2}{4} + y_1.y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1.y_2 + 16 = 0$ (1)

Phương trình đường thẳng MT:

$\frac{x - \frac{y_1^2}{4}}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow 4x - y_1^2 = (y_1 + y_2)(y - y_1)$

$\Leftrightarrow 4x - (y_1 + y_2)y - 16 = 0 \Leftrightarrow 4(x - 4) - (y_1 + y_2)y = 0$

Nên đường thẳng MT luôn đi qua điểm cố định $J(4;0)$

b. Gọi $I(x_0, y_0)$ là trung điểm MT thì $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{8}\left(y_1^2 + y_2^2\right) & (1) \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra

$$x_0 = \frac{1}{8}\left[(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2\right] = \frac{1}{8}\left[(2y_0)^2 - 2\ (-16)\right] = \frac{1}{2}.y_0^2 + 4 \Rightarrow y_0^2 = 2x_0 - 8$$

Từ đó ⇒ I chạy trên parabol $(P): y^2 = 2x - 8$ cố định trong mặt phẳng toạ độ Oxy

Thí dụ 10:

1. Cho điểm A (4;0) và đường thẳng $\Delta: 4x - 9 = 0$. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M có tỷ số khoảng cách từ đó đến điểm A và từ đó đến đường thẳng Δ bằng $\frac{4}{3}$ là một Hypebol. Hãy viết phương trình của Hypebol đó.
2. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px\ (p > 0)$ và đường thẳng d di động nhưng luôn đi qua tiêu điểm F của Parabol. Gọi M, N là các giao điểm của parabol với đường thẳng d. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giải:

1. Giả sử điểm $M(x;y)$ khi đó $AM = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

Khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ: $4x - 9 = 0$ là $d(M;D) = \frac{|4x - 9|}{4}$

Ta có

$$\frac{AM}{d(M;\Delta)} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |4x - 9| \Leftrightarrow 7x^2 - 9y^2 = 63 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là Hypebol có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

2. Parabol $y^2 = 2px$ đường chuẩn là

Δ: $x = -\frac{p}{2}$.

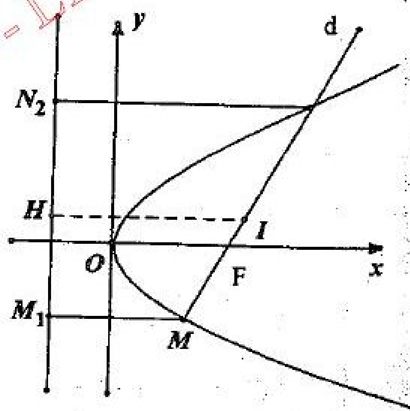
Đường tròn đường kính MN có tâm là trung điểm I của MN và bán kính

$R = \frac{MN}{2}$

Gọi M_1; N_1, H thứ tự là hình chiếu của các điểm M, N và I.

Theo định nghĩa của Parabol có

$\begin{cases} MM_1 = MF \\ NN_1 = NF \end{cases}$



$\Rightarrow MM_1 + NN_1 = MF + NF = MN.$

Mà trong hình thang vuông MM_1N_1N thì $MM_1 + NN_1 = 2\ IH$.

Do đó $IH = \frac{MN}{2}$

Vậy đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc với đường chuẩn của Parabol

ạng 4: Bài toán tìm điểm và bài toán cực trị liên quan tới 3 đường conic

ụ 1: Cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm các điểm M thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 120^0

Giải:

Ta có a = 10; b = 5; $c = 5\sqrt{3}$

dụng định lý côsin trong tam giác MF_1F_2 [$F_1(-5\sqrt{3};0)$, $F_2(5\sqrt{3};0]$

$F_1F_2^2 = F_1M^2 + F_2M^2 - 2F_1MF_2M\cos 120^0 = (F_1M + F_2M)^2 - F_1MF_2M$

$c^2 = 4a^2 - (a^2 - e^2x_M^2) \Rightarrow x_M = 0 \Rightarrow y_M = \pm 5)$.

Vậy M(0;± 5)

ụ 2: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip: $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, F_1; F_2 lần lượt là điểm phải và trái của (E). Tìm điểm M trên (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$

Giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$. Vì $MF_1 - MF_2 = 2$ nên:

$$\left(a + \frac{cx_0}{a}\right) - \left(a - \frac{cx_0}{a}\right) = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y_0{}^2 = 4\left(1 - \frac{x_0^2}{8}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow y_0 = \pm\sqrt{3}$$

$\Rightarrow M_1(\sqrt{2};\sqrt{3}); M_2(\sqrt{2};-\sqrt{3})$

ụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và hai điểm A(0; 2), $B(-2;1)$. Tìm điểm $C \in (E)$ sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Giải:

Phương trình cạnh AB: $x - 2y + 4 = 0$.

Gọi $C(2\cos t; \sin t)$, $t \in [0;2\pi)$. Diện tích ΔABC lớn nhất $\Leftrightarrow d(C;AB)$ lớn nhất.

$$d(C;AB) = \frac{|2\cos t - 2\sin t + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{5}} \le \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Dấu "=" khi $\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{4}$. Vậy $C\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng *Oxy*, cho elip (*E*) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, có các tiêu điểm là F_1, F_2. Tìm tọa độ các điểm *M* nằm trên elip (*E*) sao cho $MF_1 \perp MF_2$.

Giải:

Từ phương trình của elip ta có $a=2, b=1 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

Vậy hai tiêu điểm của elip là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$; $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc elip, khi đó ta có $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1$ (1)

$MF_1 \perp MF_2$, suy ra *M* nằm trên đường tròn tâm *O* bán kính $R=\frac{F_1F_2}{2}=\sqrt{3}$, do đó ta có phương trình $x_0^2+y_0^2=3$ (2)

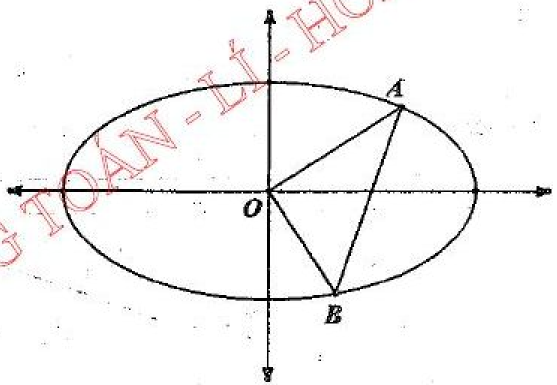
Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $\begin{cases} x_0^2=\frac{8}{3} \\ y_0^2=\frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy có 4 điểm *M* thỏa mãn yêu cầu bài toán, *M* có tọa độ là:

$\left(\sqrt{\frac{8}{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{8}{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{8}{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{8}{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Thí dụ 5: Cho (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm các điểm A, B thuộc (E) sao cho OAB là tam giác vuông tại O, và có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:



TH1. Nếu A, B là hai đỉnh của (E) thì $S_{OAB}=1$.

TH2. Ta có (OA): $y=kx$, (OB): $y=-\frac{1}{k}x$ $(k \neq 0)$.

Suy ra $A\left(\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}};\frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$ và $B\left(-\frac{2k}{\sqrt{4+k^2}};\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\right)$,

hoặc $A\left(-\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}};-\frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$ và $B\left(-\frac{2k}{\sqrt{4+k^2}};\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\right)$,

hoặc $A\left(\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}};\frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$ và $B\left(\frac{2k}{\sqrt{4+k^2}};-\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\right)$,

hoặc $A\left(-\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}};-\frac{2k}{\sqrt{1+4k^2}}\right)$ và $B\left(\frac{2k}{\sqrt{4+k^2}};-\frac{2}{\sqrt{4+k^2}}\right)$.

Khi đó: $S_{OAB}^2=\frac{4(1+k^2)^2}{(1+4k^2)(4+k^2)}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{4(1+t)^2}{(1+4t)(4+t)}$, $(t=k^2>0)$. Ta có $f'(t)=\frac{36t^2-36}{(4t^2+17t+4)^2}$,

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

t	0	1	+∞
f'(t)		0	
f(t)	↘	$\frac{16}{25}$	↗

Suy ra $\min S_{OAB}=\frac{4}{5}$ khi $A\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ và $B\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, hoặc $A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ và $B\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, hoặc $A\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ và $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, hoặc $A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ và $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Thí dụ 6: Cho đường thẳng (Δ) có phương trình $x-\sqrt{2}y+2=0$ và elip (E) có phương trình: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Giả sử đường thẳng (Δ) cắt (E) tại hai điểm B và C.

Tìm điểm A thuộc elip (E) để tam giác ABC cân tại A.

Tìm điểm A thuộc elip (E) để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Có hai điểm thoả mãn là: $A_1\left(\frac{2-\sqrt{39}}{5};\frac{1+2\sqrt{39}}{5\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\frac{2+\sqrt{39}}{5};\frac{1-2\sqrt{39}}{5\sqrt{2}}\right)$.

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)\in(E)$ là điểm cần tìm.

Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (Δ) là: $AH = \dfrac{\left|x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2\right|}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác ABC lớn nhất khi AH lớn nhất. Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski chứng minh $\left(x_0 - \sqrt{2}y_0\right)^2 \le 16$. Từ đó suy ra: $AH \le 2\sqrt{3}$.

Đáp số: $A\left(2; -\sqrt{2}\right)$

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip $(E): 5x^2 + 16y^2 = 80$ và hai điểm A(–5; –1), B(–1; 1). Một điểm M di động trên (E). Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔMAB.

Giải:

Phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 3 = 0$ và $AB = 2\sqrt{5}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow 5x_0^2 + 16y_0^2 = 80$.

Ta có: $d(M; AB) = \dfrac{\left|x_0 - 2y_0 + 3\right|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\left|x_0 - 2y_0 + 3\right|}{\sqrt{5}}$

Diện tích ΔMAB: $S = \dfrac{1}{2}.AB.d(M; AB) = \left|x_0 - 2y_0 - 3\right|$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacópski cho 2 cặp số $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{2}\right)$, $(\sqrt{5}x_0; 4y_0)$ có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}.\sqrt{5}x_0 - \frac{1}{2}.4y_0\right)^2 \le \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)\left(5x_0^2 + 16y_0^2\right) = \frac{9}{20}.80 = 36$$

$\Leftrightarrow \left|x_0 - 2y_0\right| \le 6 \Leftrightarrow -6 \le x_0 - 2y_0 \le 6 \Leftrightarrow 3 - 6 \le x_0 - 2y_0 + 3 \le 6 + 3$

$\Leftrightarrow -3 \le x_0 - 2y_0 + 3 \le 9 \Rightarrow \left|x_0 - 2y_0 + 3\right| \le 9$

$$\Rightarrow \max\left|x_0 - 2y_0 + 3\right| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}x}{1}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4y}{-\dfrac{1}{2}} \\ x_0 - 2y_0 + 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 = -8y_0 \\ x_0 - 2y_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{8}{3} \\ y_0 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy: $\max S_{MAB} = 9$ khi $M\left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$

Thí dụ 8: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm $A(3; -2)$, $B(-3; 2)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất

Giải:

Ta có PT đường thẳng $AB: 2x + 3y = 0$

Gọi C(x; y) với $x > 0, y > 0$. Khi đó ta có $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C, AB) = \frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}\left|2x + 3y\right| = 3\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right| \le 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)} = 3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $C\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Thí dụ 9: Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và hai đường thẳng $(d_1): x - ky = 0$, $(d_2): kx + y = 0$. Đường thẳng d_1 cắt elip (*E*) tại *A* và *C*, (d_2) cắt elip (*E*) tại *B* và *D*. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Giải:

Tọa độ giao điểm của d_1 và (*E*) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ky \\ y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{4 + k^2}} \end{cases} \Rightarrow AC^2 = \frac{16(k^2 + 1)}{4 + k^2}$$

Tọa độ giao điểm của d_2 và (*E*) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = -kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -kx \\ x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{1 + 4k^2}} \end{cases} \Rightarrow BD^2 = \frac{16(k^2 + 1)}{1 + 4k^2}$$

Vì $d_1 \perp d_2$ nên $AC \perp BD \Rightarrow 4S^2 = AC^2.BD^2 = \dfrac{16^2(1 + k^2)^2}{(4 + k^2)(1 + 4k^2)}$

Đặt $x = k^2 \ge 0$, xét $f(x) = \dfrac{16^2(1 + x)^2}{(4 + x)(1 + 4x)}$, $f'(x) = \dfrac{(x + 1)(9x - 9)}{(1 + 4x)^2(x + 4)^2}$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Chú ý rằng: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{4}$

Bảng biến thiên:

x	0		1		+∞
f'(x)		–	0	+	
f(x)	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{4}{25}$	↗	$\frac{1}{4}$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \underset{[0;+\infty)}{\text{Max}}\, f(x) = \dfrac{1}{4}$ khi $x = 0 \Leftrightarrow k = 0$

$\underset{[0;+\infty)}{\text{Min}}\, f(x) = \dfrac{4}{25}$ khi $x = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

Vậy $\text{Max } S_{ABCD} = 4$ khi $k = 0$, $\text{Min } S_{ABCD} = \dfrac{16}{5}$ khi $k = \pm 1$.

Thí dụ 10: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm toạ độ hai điểm M, N $\in$ (P) sao cho $\overline{IM} = 4\overline{IN}$.

Giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$, $N(x_1;y_1)$ là hai điểm thuộc (P), khi đó ta có: $x_0 = y_0^2; x_1 = y_1^2$

$\overline{IM} = (x_0;y_0-2) = (y_0^2;y_0-2)$; $\overline{IN} = (y_1;y_1-2) = (y_1^2;y_1-2)$; $4\overline{IN} = (4y_1^2;4y_1-8)$

Theo giả thiết: $\overline{IM} = 4\overline{IN}$, suy ra:

$$\begin{cases} y_0^2 = 4y_1^2 \\ y_0 - 2 = 4y_1 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1;\ y_0 = -2;\ x_0 = 4 \\ y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 9;\ y_0 = 6;\ x_0 = 36 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 cặp điểm cần tìm: $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

Hoặc

$$\text{Gọi: } \begin{cases} M(m^2;m) \\ N(n^2;n) \end{cases} \in (P) \Rightarrow \begin{cases} \overline{IM} = (m^2;m-2) \\ \overline{IN} = (m^2;m-2) \\ \overline{IM} = 4\overline{IN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m - 2 = 4n - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 2n \\ m = 4n - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(36;6) \\ N(9;3) \end{cases} \\ \begin{cases} m = -2n \\ m = 4n - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(4;-2) \\ N(1;1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Thí dụ 11: Cho $(P): y^2 = x$ và đường thẳng $d: x - y - 2 = 0$ cắt (P) tại hai điểm A và B. Tìm điểm C thuộc cung AB sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất

Giải:

Tọa độ A;B là nghiệm hệ: $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;-1);\ B(4;2)$

Điểm $C(y_o^2;y_o) \in (P)$. Khoảng cách từ C tới đường thẳng d là

$$h = d(C,d) = \frac{|y_o^2 - y_o - 2|}{\sqrt{2}}$$

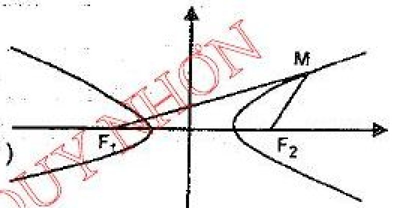
Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h.AB = \frac{3}{2}|y_o^2 - y_o - 2|$

+ Xét hàm số $f = |y_o^2 - y_o - 2|$ với $-1 \le y_o \le 2$

Suy ra $\text{Max } f = \frac{9}{4}$. Tại $C\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

Thí dụ 12: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hypebol $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm trên (H) điểm M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc bằng 60^0.

Giải:



Ta có $F_1F_2^{\ 2} = (2c)^2 = 4c^2 = 4(a^2+b^2) = 40$

$F_1F_2^{\ 2} = MF_1^{\ 2} + MF_2^{\ 2} - 2MF_1MF_2.\cos\widehat{F_1MF_2}$

$= (MF_1 - MF_2)^2 + MF_1.MF_2$ (Do $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$)

$|MF_1 - MF_2| = 2a = 2$

Mặt khác lại có $MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| = |1 + \sqrt{10}x_M|$; $MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x_M\right| = |1 - \sqrt{10}x_M|$

Khi đó ta được $40 = 4 + |1 - 10x_M^{\ 2}| \Leftrightarrow x_M^{\ 2} = \frac{37}{10} \Rightarrow y_M^{\ 2} = \frac{273}{10}$

Vậy $M\left(\pm\sqrt{\frac{37}{10}};\pm\sqrt{\frac{273}{10}}\right)$ là các điểm cần tìm.

Thí dụ 13: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho Parabol $(P): y = x^2$, ta lấy $A(-1;1)$, $B(3;9)$. Gọi (D) là miền phẳng giới hạn bởi đoạn AB và (D). Chứng minh rằng với M bất kì thuộc cung nhỏ AB của (P) thì $\frac{S_{ABM}}{S_D} \le \frac{3}{4}$, ở đó S_D là diện tích miền (D), S_{ABM} là diện tích tam giác ABM.

Giải:

$$S_D = \left(\frac{AA_1 + BB_1}{2}\right)[3-(-1)] - \int_{-1}^{3} x^2dx = \frac{32}{3} \text{ (đvdt)} \quad (1)$$

$$S_{ABM} = \left(\frac{AA_1 + BB_1}{2}\right).4 - \left(\frac{AA_1 + MM_1}{2}\right)(m+1) - \left(\frac{MM_1 + BB_1}{2}\right)(3-m)$$

$$= 20 - \frac{1}{2}(1+m^2)(m+1) - \frac{1}{2}(m^2+9)(3-m)$$

$$= -2m^2 + 4m + 6 = -2(m-1)^2 + 8 \le 8 \text{ (dvdt)} \quad (2)$$

Vậy, từ (1) và (2) suy ra $\frac{S_{ABM}}{S_D} \le \frac{3}{4}$ (đpcm)

Thí dụ 14: Đường thẳng d cắt Parabol $(P): y = -x^2 + 2x + 3$ tại hai điểm phân biệt A, B lần lượt có hoành độ $x_1; x_2$ giả sử $x_1 < x_2$ và $AB = 2$. Tìm $x_1; x_2$ để hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và Parabol có diện tích lớn nhất.

Giải:

Xét đường thẳng $y = ax + b$ không song song với trục tung

(Vì Parabol có trục đối xứng $x_0 = 1$ song song trục tung)

Hoành độ $x_1; x_2$ của hai điểm A, B xác định từ phương trình:

$-x^2 + 2x + 3 = ax + b \Leftrightarrow -x^2 + (2-a)x + 3 - b = 0 \quad (1)$

Hay $\left[-x^2 + (2-a)x + 3 - b = -(x - x_1)(x - x_2)\right]$

Điều kiện: $(2-a)^2+4(3-b)>0$.

Nhận xét $\forall x\in[x_1;x_2]$ thì $-(x-x_1)(x-x_2)>0$

Nên diện tích hình phẳng:

$$S=-\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1).(x-x_2)dx=-\left\{\int_{x_1}^{x_2}\left[x^2-(x_1-x_2)x+x_1x_2\right]dx\right\}$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-(x_1+x_2)\frac{x_2}{2}+x_1x_2x\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{(x_2-x_1)^3}{6}$$

Diện tích S lớn nhất khi (x_2-x_1) lớn nhất

Do $AB=2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2}$

$\Leftrightarrow(x_2-x_1)^2=\dfrac{4}{1+a^2}$ lớn nhất khi a = 0

Mà từ phương trình (1): $x_1+x_2=2-a\Rightarrow x_2+x_1=2$ vì a = 0

Ta có: đường thẳng d // trục Ox nên $AB=2=|x_2-x_1|\Leftrightarrow x_2-x_1=2$ (do giả thiết $x_1<x_2$)

Có hệ phương trình: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1-x_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\end{cases}$

Vậy $\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\end{cases}$ thì $S=\dfrac{4}{3}$ lớn nhất.

Thí dụ 15: Trên trục toạ độ Oxy cho parabol (*P*): $y=-\dfrac{x^2}{16}$ và đường thẳng Δ: $3x-4y+19=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm I thuộc đường thẳng Δ có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với parabol (*P*)

Giải:

Nhận thấy đường thẳng Δ không có điểm chung với parabol (P)

Gọi Δ' là đường thẳng tiếp xúc với Parabol (P) và song song với đường thẳng Δ

Suy ra phương trình Δ' là $3x-4y+m=0$ (với $m\neq19$)

Hệ phương trình: $\begin{cases}-\dfrac{x^2}{16}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{m}{4}\\-\dfrac{x}{8}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$ có nghiệm (I)

Hệ (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\m=9\end{cases}$

Phương trình đường thẳng Δ': $3x-4y+9=0$ và toạ độ tiếp điểm $M_0\left(-6;-\dfrac{9}{4}\right)$

Gọi d là đường thẳng qua điểm M_0 và vuông góc với Δ' $\Rightarrow d:\begin{cases}M_0\left(-6;-\dfrac{9}{4}\right)\\\vec{n}_d=(4;3)\end{cases}$

Phương trình đường thẳng $d: 4x+3y+\dfrac{123}{4}=0$

I là giao điểm của d và Δ nên toạ độ I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x-4y+19=0\\4x+3y+\dfrac{123}{4}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{36}{5}\\y=-\dfrac{13}{20}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{36}{5};-\frac{13}{20}\right)\Rightarrow M_0I=2$$

Phương trình đường tròn tâm I, bán kính $R=IM_0$ có dạng

$$\left(x+\frac{36}{5}\right)^2+\left(y+\frac{13}{20}\right)^2=4$$

Ta chứng minh: đường tròn (C) có phương trình trên là đường tròn có bán kính nhỏ nhất so với các đường tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán

Thật vậy: Lấy điểm I_1 bất kì trên (Δ), M_1 bất kì trên parabol (P)

$H=I_1M_1\cap\Delta'$ ta có: $I_1M_1\geq I_1H\geq IM_0\Rightarrow$ IM_0 là nhỏ nhất

Do đó đường tròn bán kính IM_0 là đường tròn có bán kính nhỏ nhất

Vậy đường tròn cần tìm: $\left(x+\dfrac{36}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{13}{20}\right)^2=4$

Thí dụ 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất

Giải:

Cách 1:

Do $x_A,x_B>0$ và ΔOAB cân tại O nên A, B đối xứng nhau qua O và $x_A=x_B>0$, $y_B=-y_A$

Do $A\in(E)$ nên $\dfrac{x_A^2}{4}+\dfrac{y_A^2}{1}=1$

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}AB.d(O,AB)=\dfrac{1}{2}2|y_A|.|x_A|=|x_Ay_A|$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $1=\dfrac{x_A^2}{4}+\dfrac{y_A^2}{1}\geq2\sqrt{\dfrac{x_A^2}{4}.y_A^2}=|x_Ay_A|=S_{OAB}$

S lớn nhất khi và chỉ khi : $\begin{cases}\dfrac{x_A^2}{4}=\dfrac{1}{2}\\y_A^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=\sqrt{2}\\y_A=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

WWW.DAYKEMQUYNHON.UCOZ.COM WWW.FACEBOOK.COM/DAYKEM.QUYNHON

Vậy : $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $B\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $B\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Cách 2:

Gọi OH là đường cao ta có $OH = x_A,\ x_A > 0$ và $AH = |y_A|$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OH.2.AH = x_A.|y_A| = |y_A|.\sqrt{4-4y_A^2} \le \frac{4y_A^2 + 4 - 4y_A^2}{4} = 1$$

$$S_{Max} = 1 \Leftrightarrow y_A = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_A = \sqrt{2}$$

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $B\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $B\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Tìm những điểm nằm trên elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

a. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
b. Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^0.

Bài 2: Cho elip (E) : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $d : x - \sqrt{2}y + 2 = 0$, d cắt (E) tại hai điểm B, C.

Tìm tọa độ điểm $A \in (E)$ sao cho diện tích tam giác ABC là lớn nhất.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ có các tiêu điểm F_1, F_2 (F_1 có hoành độ âm). Đường thẳng *d* đi qua F_2 và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất cắt (E) tại *A* và *B*. Tính diện tích tam giác ABF_1.

Bài 4: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng *d*: $3x + y - 4 = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với *d* và cắt (E) tại hai điểm *A*, *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 3.

Bài 5: Trong mặt phẳng (Oxy) cho điểm $A(3;0)$ và elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $y = 2x$.

7: Trong mặt phẳng hệ toạ độ *Oxy*, cho e líp $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ với hai tiêu iểm F_1, F_2. Điểm P thuộc elip sao cho góc $\widehat{PF_1F_2} = 120^0$. Tính diện tích tam giác PF_1F_2.

8: Trong mặt phẳng Oxy, cho Elip (E) và đường thẳng d có phương trình: $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $d : x - y\sqrt{2} + 2 = 0$. Gọi giao điểm của (E) và d là A; B. Tìm toạ độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất

9: Trong mặt phẳng Oxy, cho (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Chứng minh rằng: Đường thẳng d luôn cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm điểm C thuộc (E) sao cho diện tích ΔABC bằng 6

10: Trong mặt phẳng với hệ Oxy, cho Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình ường thẳng d song song với Ox cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$.

11: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm A(–3; 0), I(–1; 0). Tìm tọa độ điểm B, C trên (E) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

12: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I\left(\frac{9}{2};\frac{9}{10}\right)$. Xác định hai điểm A và B thuộc elip sao cho I là trung điểm của AB

13: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 13$. Lập phương trình chính tắc của hypebol có hai tiệm cận vuông góc với nhau và cắt đường tròn (C) tại bốn điểm lập thành hình chữ nhật có diện tích bằng 24.

14: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y^2 = 8x$ có tiêu điểm F, Δ là đường thẳng đi qua F và cắt (P) tại hai điểm M, N phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích FM.FN.

15: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của Elip (E) biết rằng có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12\left(2+\sqrt{3}\right)$

16: Trên mặt phẳng toạ độ cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và 2 đường thẳng :

$d_1 : mx - ny = 0,\ d_2 : nx + my = 0.\ \left(m^2 + n^2 > 0\right)$

Tìm toạ độ của các giao điểm M, P của d_1 với (E) và các giao điểm N, Q của d_2 với (E)

Tìm điều kiện của m, n để diện tích tứ giác MNPQ đạt Max, Min.

Bài 17: Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho (E) là một elip di động nhưng luôn nhận hai tiêu điểm của hypebol (H): $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ làm các tiêu điểm và luôn có điểm chung với đường thẳng (Δ): $x-y+6=0$. Tìm giá trị bé nhất của độ dài trục lớn của elip (E).

Bài 18: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hypebol (H) có phương trình: $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ và điểm M(2;1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, biết rằng đường thẳng đó cắt (H) tại hai điểm A, B mà M là trung điểm của AB.

Bài 19: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Hai điểm A,B là các điểm trên (E) sao cho: $AF_1+BF_2=8$. Tính AF_2+BF_1 với F_1F_2 là các tiêu điểm.

Bài 20: Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng *d*: 3*x* + *y* – 4 = 0 và elip (E) : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với *d* và cắt (E) tại hai điểm *A*, *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 3.

Bài 21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ và điểm C(2;0). Tìm tọa độ điểm A, B thuộc (E), biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục Ox và tam giác ABC đều .

Bài 22: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) và đường thẳng d có phương trình: (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; d : 3x + 4y = 0

a. Chứng minh rằng đường thẳng d cắt elip (E) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm toạ độ hai điểm đó (với hoành độ của điểm A nhỏ hơn hoành độ của điểm B).

b. Tìm điểm $M(x;\ y)$ thuộc (E) sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 12.

Bài 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ và hai điểm A(2;– 2), B(– 4;2). Tìm điểm M trên (E) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 24: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ 0xy, cho elip (E) có tiêu điểm thứ nhất $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M\left(1;\frac{4\sqrt{33}}{5}\right)$. Hãy xác định toạ độ các đỉnh của (E).

Bài 25: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. Hai điểm M(–2;m), N(2;n) di động và thoả mãn tích khoảng cách từ hai tiêu điểm F_1,F_2 của (E) đến đường thẳng *MN* bằng 3. Tính $\cos\widehat{MF_1N}$.

26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho elip (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ và (0; 2). Tìm B,C thuộc (E) đối xứng với nhau qua Oy sao cho tam giác ABC đều

27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2=16$. Viết phương trình chính tắc của (E) có tâm sai $e=\frac{1}{2}$ biết (E) cắt (C) tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB song song với trục hoành và AB = 2BC.

28: Trong mặt phẳng Oxy, cho Elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a > b > 0) biết $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ hình chữ nhật cơ sở cắt Ox tại A, A', cắt Oy tại B, B'. Lập phương trình Elip biết diện tích hình tròn nội tiếp hình thoi ABA'B' có diện tích bằng 4π.

29: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 24.

HƯỚNG DẪN GIẢI

1:

Ta có $F_1\left(-2\sqrt{2};0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{2};0\right)$. Gọi M(x ;y) là điểm cần tìm.

Khi đó $\overrightarrow{F_1M}=(x+2\sqrt{2};y);\overrightarrow{F_2M}=(x-2\sqrt{2};y)$.

Theo bài ra ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow x^2+y^2-8=0 & (1)\\ M\in(E)\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1 & (2)\end{cases}$

Từ (1),(2) $\Rightarrow x^2=\frac{63}{8}\Rightarrow M\left(\pm\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

ọi P(x;y) là điểm cần tìm, ta có

$\overrightarrow{F_1P}=(x+2\sqrt{2};y);\quad \overrightarrow{F_2P}=(x-2\sqrt{2};y)$

$$\cos60^0=\frac{\overrightarrow{F_1P}.\overrightarrow{F_2P}}{|\overrightarrow{F_1P}|.|\overrightarrow{F_2P}|}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{x^2+y^2-8}{9-\frac{8}{9}x^2}\Leftrightarrow 26x^2+18y^2=225\qquad(3)$$

iểm $P\in(E)\Rightarrow x^2+9y^2=9$ (4)

ừ (3), (4) $\Rightarrow x^2=\frac{69}{8}\Rightarrow P\left(\frac{\pm\sqrt{69}}{2\sqrt{2}};\frac{\pm1}{2\sqrt{6}}\right)$

2:

(E) và d cố định nên B, C cố định. Diện tích tam giác ABC lớn nhất khi (A, d) lớn nhất.

Gọi $A(x_0;y_0) \in (E)$, ta có : $x_0^2 + 2y_0^2 = 8$ (1)

Ta có : $d(A,d) = \dfrac{\left|1.x_0 + 1.(-\sqrt{2}y_0) + 1.2\right|}{\sqrt{3}}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$\left|1.x_0 + 1.(-\sqrt{2}y_0) + 1.2\right| \le \sqrt{(1+1+1)(x_0^2 + 2y_0^2 + 2^2)} = \sqrt{3(8+4)} = 6$$

$$\Rightarrow d(A,d) = \frac{\left|1.x_0 + 1.(-\sqrt{2}y_0) + 1.2\right|}{\sqrt{3}} \le \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{Max}d(A,d) = \frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2y_0^2 = 8 \\ \dfrac{x_0}{1} = \dfrac{-\sqrt{2}y_0}{1} = \dfrac{2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow A(2;-\sqrt{2})$$

Bài 3:

$(E): \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ có $c = \sqrt{8-4} = 2 \Rightarrow F_1(-2;\ 0),\ F_2(2;\ 0).$

Từ giả thiết $\Rightarrow d: y = x - 2$ hay $x - y - 2 = 0.$

Từ hệ $\begin{cases} y = x - 2 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0;\ -2),\ B\left(\dfrac{8}{3};\ \dfrac{2}{3}\right).$

$$S_{F_1AB} = \frac{1}{2}AB.d(F_1;\ AB) = \frac{1}{2}.\frac{8}{3}\sqrt{2}.2\sqrt{2} = \frac{16}{3}.$$

Bài 4:

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng *d* nên có phương trình $x - 3y + m = 0.$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (*E*):

$4x^2 + (x+m)^2 = 36 \Leftrightarrow 5x^2 + 2mx + m^2 - 36 = 0$ (1)

Đường thẳng Δ cắt (*E*) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1), B(x_2;\ y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = 720 - 16m^2 > 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5}$ (2)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{10}}{15}.\sqrt{720 - 16m^2}$$

$$d(O,\Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{10}} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d(O,\Delta) = 3$$

$\Leftrightarrow 16m^4 - 720m^2 + 8100 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ (thỏa điều kiện (2))

Vậy phương trình đường thẳng Δ: $x - 3y \pm \dfrac{3\sqrt{10}}{2} = 0$

Bài 5:

Ta có $A(3;0) \in (E)$; $B, C \in (E)$: $AB = AC$

Chứng minh được: $B(x_0;y_0) \Rightarrow C(x_0;-y_0)$; $(x_0 < 3)$

H là trung điểm của BC $\Rightarrow H(x_0;0) \Rightarrow BC = 2|y_0| = \dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x_0^2}$;

$AH = |3 - x_0| = 3 - x_0$

ΔABC vuông cân tại A $\Leftrightarrow AH = \dfrac{1}{2}BC$

$$\Leftrightarrow 3 - x_0 = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x_0^2} \Leftrightarrow 9(3 - x_0)^2 = (3 - x_0)(3 + x_0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \text{ (loại)} \\ x_0 = \dfrac{12}{5} \Rightarrow |y_0| = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $\left[\begin{array}{l} B\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right), C\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right) \\ B\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{3}{5}\right), C\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{3}{5}\right) \end{array}\right.$

Bài 6:

M nằm trong (E), do đó mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (E) tại hai điểm.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

d vuông góc Ox [illegible] d: x = 2 ⇒ trung điểm của A, B là I(2; 0) không thuộc đường thẳng y = 2x

d có hệ số góc a suy ra $d: y = ax - 2a + 1.$

Tọa độ AB là nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = ax - 2a + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = ax - 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ax - 2a + 1 \\ (25a^2 + 9)x^2 - 50a(2a-1)x + 25(2a-1)^2 - 25.9 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_A + x_B = \frac{50(2a^2 - a)}{25a^2 + 9} \Rightarrow \text{AB có trung điểm là } I\left(\frac{25(2a^2 - a)}{25a^2 + 9};\frac{9 - 18a}{25a^2 + 9}\right)$$

I thuộc đường thẳng

$$\Leftrightarrow y = 2x \Leftrightarrow 50(2a^2 - a) = 9(1 - 2a) \Leftrightarrow (2a-1)(50a+9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{9}{50} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow d: y = \frac{1}{2}x;\ y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25}$$

Bài 7:

Ta có $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 10 \\ c = 4 \Rightarrow F_1F_2 = 8 \end{cases}$

Theo định nghĩa elip và định lí côsin ta có:

$$\begin{cases}PF_1+PF_2=2a=10\\ PF_2^2=PF_1^2+F_1F_2^2-2PF_1.F_1F_2.\cos120^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}PF_2=10-PF_1\\ (10-PF_1)^2=PF_1^2+8^2+PF_1.8\end{cases}$$

$$\begin{cases}PF_1=\dfrac{9}{7}\\ PF_2=\dfrac{61}{7}.\end{cases}\Rightarrow S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}PF_1.F_1F_2.\sin120^0=\frac{1}{2}.\frac{9}{7}.8.\frac{\sqrt3}{2}=\frac{18\sqrt3}{7}\ (\text{đvdt})$$

Bài 8:

Tìm toạ độ giao điểm: $A\left(\sqrt3-1;\frac{\sqrt2+\sqrt6}{2}\right)$ và $B\left(-\sqrt3-1;\frac{\sqrt2-\sqrt6}{2}\right)\Rightarrow AB=3\sqrt2$

Đặt $x=2\sqrt2\sin t\ \&\ y=2\cos t,\quad \forall t\in[0;2\pi]$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.CH=\frac{3\sqrt2}{2}CH$

(CH là đường cao từ C tới đường thẳng ABC)

$$CH=d(C;d)=\frac{\left|2\sqrt2\sin t-2\sqrt2\cos t+2\right|}{\sqrt3}=\frac{\left|4\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+2\right|}{\sqrt3}\le2\sqrt3$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow t=\frac{3\pi}{4}$ hay $C=\left(2;-\sqrt2\right)$

Bài 9:

Tọa độ giao điểm của d và E là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+4y-12=0\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$

Chứng tỏ d và (E) cắt nhau tại $A(4;0);\ B(0;3)\Rightarrow AB=5$

Gọi $C(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}=1$ (1). Ta có $d(C,AB)=\frac{|3x_0+4y_0-12|}{5}=h$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.h=\frac{1}{2}.5.\frac{|3x_0+4y_0-12|}{5}=\frac{1}{2}|3x_0+4y_0-12|$$

Theo giả thiết suy ra $|3x_0+4y_0-12|=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3x_0+4y_0=24 & (2)\\ 3x_0+4y_0=0 & (3)\end{array}\right.$

- Từ (1) và (2) ta được PT $2y_0^2-12y_0+27=0$, PT này vô nghiệm
- Từ (1) và (3) ta được PT $32y_0^2=144\Leftrightarrow y_0=\pm\frac{3}{\sqrt2}\Rightarrow x_0=\mp2\sqrt2$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$C=\left(2\sqrt2;-\frac{3}{\sqrt2}\right)$ và $C=\left(-2\sqrt2;\frac{3}{\sqrt2}\right)$.

ài 10:

Đường thẳng (d) song song với Ox có phương trình $y=m(m\ne0)$ (d) cắt (E) ại hai điểm A, B khi và chỉ khi phương trình : $\frac{x^2}{4}+m^2=1$ có hai nghiệm $x_A,\ x_B\Leftrightarrow-1<m<1$

Ta có $A(x_A;m),B(x_B;m).OA\perp OB\Leftrightarrow\overline{OA}.\overline{OB}=0\Leftrightarrow x_A.x_B+m^2=0$

$\Leftrightarrow4\left(m^2-1\right)+m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{2\sqrt5}{5}$

Vậy có hai đường thẳng thoả mãn là: $y=\pm\frac{2\sqrt5}{5}$

ài 11:

Ta có IA = 2

Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có PT: $(x+1)^2+y^2=4$

Do B, C trên (E) nên tọa độ B, C là nghiệm của hệ $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ (x+1)^2+y^2=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+18x+9=0\\ (x+1)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\vee x=\dfrac{-3}{5}\\ (x+1)^2+y^2=4\end{cases}$$

Với $x=-3\Rightarrow y=0$ (loại) do B hoặc C trùng A

Với $x=\frac{-3}{5}\Rightarrow y=\pm\frac{4\sqrt6}{5}\Rightarrow B\left(\frac{-3}{5};\frac{4\sqrt6}{5}\right),\ C\left(\frac{-3}{5};-\frac{4\sqrt6}{5}\right)$

hoặc $C\left(\frac{-3}{5};\frac{4\sqrt6}{5}\right),B\left(\frac{-3}{5};-\frac{4\sqrt6}{5}\right)$

ài 12:

Giả sử $A(x;y)\in(E)\Rightarrow9x^2+25y^2=225$; B đối xứng với A qua $I\left(\frac{9}{2};\frac{9}{10}\right)$ nên :

$B\left(9-x;\frac{9}{5}-y\right)$ $B\in(E)\Leftrightarrow(27-3x)^2+(9-5y)^2=225$

Đặt : $a=2x;b=5y$ ta được hệ :

$$\begin{cases}a^2+b^2=225\\ (27-a)^2+(9-b)^2=225\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=225\\ b=5-3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-27a+180=0\\ b=5-3a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=15\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=12\\ b=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=\dfrac{9}{5}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\text{ các điểm }A(5;0);B\left(4;\frac{9}{5}\right)$$

Bài 13:

Phương trình chính tắc của hypebol (H) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; a>0, b>0$.

Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là: $y=\frac{b}{a}x; y=-\frac{b}{a}x$

Hai tiệm cận vuông góc với nhau $\Leftrightarrow a=b$

Phương trình (H): $x^2-y^2=a^2$

Giao điểm của (H) và đường tròn (C) có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2-y^2=a^2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{a^2+13}{2} \\ y^2=\frac{13-a^2}{2} \end{cases}$$

Các giao điểm có tọa độ $A(x;y), B(x;-y), C(-x;-y), D(-x;y)$

ABCD là hình chữ nhật có diện tích là: $4|xy|$

Giả thiết: $16x^2y^2=24^2 \Leftrightarrow a^2=5$

Phương trình chính tắc của hypebol cần tìm là: $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$.

Bài 14:

(P) tiêu điểm F(2;0), do M, N phân biệt thuộc (P)

nên $M\left(\frac{m^2}{8};m\right), N\left(\frac{n^2}{8};n\right),\ m\neq n$

Do F nằm giữa M, N nên hai điểm M, N có tung độ trái dấu, giả sử $m>0, n<0$.

- Nếu $x_M=2$ thì $M(2;4), N(2;-4)$ nên $FM.FN=16$
- Nếu $x_M\neq 2$ thì $x_N\neq 2$ và $m\neq 4,\ n\neq -4$

$\overline{FM}=\left(\frac{m^2-16}{8},m\right), \overline{FN}=\left(\frac{n^2-16}{8},n\right)$, do F, M, N thẳng hàng nên

$$\frac{m^2-16}{n^2-16}=\frac{m}{n} \Leftrightarrow n(m^2-16)=m(n^2-16) \Leftrightarrow (m-n)(mn+16)=0 \Leftrightarrow mn=-16$$

Ta có

$$FM.FN=\left(\frac{m^2}{8}+2\right)\left(\frac{n^2}{8}+2\right)=\frac{m^2n^2}{64}+\frac{1}{4}(m^2+n^2)+4\geq\frac{16^2}{64}+\frac{1}{4}2\sqrt{m^2n^2}+4=16$$

Dấu bằng xảy ra khi $m=4, n=-4$ (loại), do đó trong trường hợp này thì $FM.FN>16$

Vậy FM.FN nhỏ nhất bằng 16 khi $M(2;4), N(2;-4)$.

15:

Gọi phương trình Elip cần tìm là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$ với hai tiêu điểm là

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)\ (c^2=a^2-b^2, c>0)$ và hai đỉnh trên trục nhỏ là:

$$B_1(0;-b), B_2(0;b)$$

Theo giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} c^2=a^2-b^2 \\ b=2c\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4(a+b)=12(2+\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=\frac{3}{4}a^2 \\ b^2=3c^2 \\ a+b=3(2+\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3\sqrt{3} \\ c=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là (E): $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

16:

viết phương trình đường thẳng d_1 và d_2 dưới dạng tham số:

$$d_1: \begin{cases} x=nt \\ y=mt \end{cases} \quad (1), \quad d_2: \begin{cases} x=ml \\ y=-nl \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Toạ độ của M và P là nghiệm của hệ (E) và (1)

$\Rightarrow 4n^2t^2+9m^2t^2=36$

$\Leftrightarrow (4n^2+9m^2).t^2=36 \Leftrightarrow t=\pm\frac{6}{4n^2+9m^2}$

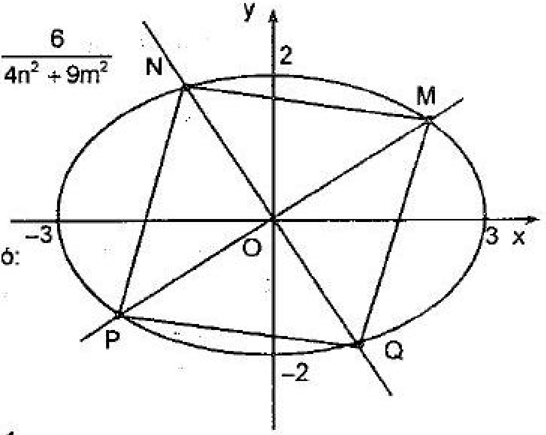
$\Rightarrow M\left(\frac{6n}{4n^2+9m^2};\frac{6m}{4n^2+9m^2}\right)$.

$P\left(\frac{-6n}{4n^2+9m^2};\frac{-6m}{4n^2+9m^2}\right)$

Thay n bởi m và m bởi – n ta có:

$\Rightarrow N\left(\frac{6m}{4m^2+9n^2};\frac{-6n}{4m^2+9n^2}\right)$.

$Q\left(\frac{-6m}{4m^2+9n^2};\frac{6n}{4m^2+9n^2}\right)$



Ta có: MP // NQ $\Rightarrow$ SMNPQ = $\frac{1}{2}$MP.NQ

$$MP=\sqrt{\frac{144(m^2+n^2)}{4n^2+9m^2}}; NQ=\sqrt{\frac{144(m^2+n^2)}{9n^2+4m^2}} \Rightarrow S=\frac{72(n^2+m^2)}{\sqrt{(9n^2+4m^2)(4n^2+9m^2)}}$$

Ta có $(9n^2+4m^2)(4n^2+9m^2)\geq(6n^2+6m^2)^2 \Rightarrow S\leq\frac{72(n^2+m^2)}{6(n^2+m^2)}=12$

Vậy Max(S) = 12. Dấu "=" xảy ra ⇔ $m = 0 \vee n = 0$.

Ta lại có $\sqrt{(9n^2+4m^2)(4n^2+9m^2)} \le \frac{13}{2}(m^2+n^2) \Rightarrow S \ge \frac{144(m^2+n^2)}{13(m^2+n^2)} = \frac{144}{13}$

Vậy Min(S) = $\frac{144}{13}$. Dấu "=" xảy ra ⇔ $m = \pm n$.

Bài 17:

Các tiêu điểm của (E) gồm: $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$. Gọi *a* là nửa độ dài trục lớn của (E), điều kiện $a > 3 \Rightarrow$ phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-9} = 1$

Tọa độ giao điểm giữa (E) và (Δ) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(x+6)^2}{a^2-9} = 1 \\ y = x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a^2-9)x^2 + 12a^2x + a^2(45-a^2) = 0 \quad (1) \\ y = x+6. \end{cases}$$

(E) có điểm chung với (Δ) ⇔ (1) có nghiệm ⇔ $\Delta' \ge 0$

$\Leftrightarrow (6a^2)^2 - (2a^2-9)a^2(45-a^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2(2a^4 - 63a^2 + 405) = a^2(a^2-9)(2a^2-45) \ge 0$

$\Leftrightarrow a^2 \ge \frac{45}{2} \Leftrightarrow a \ge \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Giá trị bé nhất của độ dài trục lớn của (E) là $\min 2a = 3\sqrt{10}$

Bài 18:

Giả sử d qua M cắt (H) tại A, B : với M là trung điểm AB ;A, B ∈ (H) : ta có

$$\begin{cases} 3x_A^2 - 2y_A^2 = 6 \quad (1) \\ 3x_B^2 - 2y_B^2 = 6 \quad (2) \end{cases}$$

M là trung điểm AB nên : $x_A + x_B = 4$ (3) và $y_A + y_B = 2$ (4)

(1) – (2) ta có : $3(x^2_A - x^2_B) - 2(y^2_A - y^2_B) = 0$ (5)

Thay (3) và (4) vào (5) ta có :

$3(x_A - x_B) - (y_A - y_B) = 0 \Leftrightarrow 3(2x_A - 4) - (2y_A - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x_A - y_A = 5$

Tương tự : $3x_B - y_B = 5$

Vậy phương trình d : $3x - y - 5 = 0$

Bài 19:

Theo bài ra ta có: $a = 5$:

Theo định nghĩa Elíp $AF_1 + AF_2 = 2a$ và $BF_1 + BF_2 = 2a$

$\Rightarrow AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 4a = 20$.

Mà $AF_1 + BF_2 = 8 \Rightarrow AF_2 + BF_1 = 12$

20:

vuông góc với đường thẳng d nên có phương trình $x - 3y + m = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E):

$4x^2 + (x+m)^2 = 36 \Leftrightarrow 5x^2 + 2mx + m^2 - 36 = 0$ (1)

Đường thẳng Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = 720 - 16m^2 > 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5}$ (2)

$AB = \sqrt{(x_2-x_2)^2 + (y_2-y_1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{10}}{15}\sqrt{720-16m^2}$

$d(O,\Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d(O,\Delta) = 3$. Từ đó ta có phương trình

$16m^4 - 720m^2 + 8100 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$ (thỏa điều kiện (2))

Vậy phương trình đường thẳng Δ: $x - 3y \pm \frac{3\sqrt{10}}{2} = 0$

21:

Gọi $A(x_0;y_0)$, vì $A \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$ (1)

A, B đối xứng nhau qua trục Ox nên $B(x_0;-y_0)$

$AB^2 = 4y_0^2$ và $AC^2 = (x_0-2)^2 + y_0^2$

Tam giác ABC đều nên AB = AC = BC

Suy ra $4y_0^2 = (x_0-2)^2 + y_0^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \\ 4y_0^2 = (x_0-2)^2 + y_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (loại)

Vậy $A(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7})$ và $B(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7})$ hoặc $A(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7})$ và $B(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7})$

22:

Toạ độ A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

Vậy d cắt (E) tại 2 điểm phân biệt $A\left(-2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $B\left(2\sqrt{2};\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$

Ta có $M(x;y) \in (E) \Rightarrow x = 4\cos t$ và $y = 3\sin t$ với $t \in [0;2\pi]$

Ta có $AB = 5\sqrt{2}$, theo giả thiết

$$12 = S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}5\sqrt{2}\ d(M,(AB)) = \frac{1}{2}5\sqrt{2}\left|\frac{12\cos t + 12\sin t}{5}\right| = 12\left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\Rightarrow \left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$$

$$\Rightarrow t = \pi/4;\ t = 5\pi/4$$

Vậy có 2 điểm M thoả mãn là: $M_1\left(2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $M_2\left(-2\sqrt{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Bài 23:

Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y+2}{2+2} \Leftrightarrow 2x+3y+2=0$

$AB = 2\sqrt{13}$, $M(x_0,y_0) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}=1$, $d(M,AB) = \frac{|2x_0+3y_0+2|}{\sqrt{13}}$

Diện tích $S_{MAB} = \frac{1}{2}AB.d(M,AB) = |2x_0+3y_0+2|$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki

$$(2x_0+3y_0)^2 = \left(\frac{x_0}{3}.6+\frac{y_0}{\sqrt{5}}.3\sqrt{5}\right)^2 \le \left(\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}\right)(36+45) = 81$$

Suy ra $-9 \le 2x_0+3y_0 \le 9 \Leftrightarrow -7 \le 2x_0+3y_0+2 \le 11 \Rightarrow |2x_0+3y_0+2| \le 11$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{x_0}{18}=\frac{y_0}{15}\\ 2x_0+3y_0=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=2\\ y_0=\frac{5}{3}\end{cases}$

Vậy $\max S_{MAB} = 11$ khi và chỉ khi $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$

Bài 24:

(E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ nên $c=\sqrt{3}$

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

Ta có: $M\left(1;\frac{4\sqrt{33}}{5}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{528}{25b^2}=1\ (1)$ và $a^2=b^2+c^2=b^2+3$ thay vào

(1) ta được: $\frac{1}{b^2+3}+\frac{528}{25b^2}=1 \Leftrightarrow 25b^4-478b^2-1584=0$

$\Leftrightarrow b^2=22 \Rightarrow b=\sqrt{22}$

Suy ra: $a^2=25 \Rightarrow a=5$.

Vậy (E) có bốn đỉnh là: $(-5;0);(5;0);(0;-\sqrt{22});(0;\sqrt{22})$

25:

1: MN song song với Ox hay $m=n$. Khi đó phương trình $MN: y-m=0$

$$d(F_1;MN).d(F_2;MN) = |(m+1)(m-1)| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-1=3\\ m^2-1=-3\ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.$$

Với $m=2$ thì $M(-2;2);N(2;2)$ Từ đây tính được $\cos\widehat{MF_1N}=\frac{1}{\sqrt{65}}$

Với $m=-2$ thì $M(-2;-2);N(2;-2)$ Từ đây tính được $\cos\widehat{MF_1N}=\frac{1}{\sqrt{65}}$

2: MN không song song với Ox.

Ta có phương trình MN là $(n-m)x-4y+2m+2n=0$

Khi đó:

$$d(F_1;MN).d(F_2;MN) = \frac{|(3m+n)(3n+m)|}{16+(n-m)^2} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}nm=3\\ 6m^2+6n^2+4mn+48=0,\text{loại}\end{array}\right.$$

Ta có: $MN^2=16+(n-m)^2; MF_1^2=m^2+1; NF_1^2=n^2+9$

Do đó, $\cos\widehat{MF_1N}=\frac{m^2+n^2+10-(16+(n-m)^2)}{2MF_1NF_1}=0$

26:

Giả sử $B(m;n), C(-m;n)$.

Do B, C thuộc (E) và tam giác ABC đều nên ta được hệ :

$$\begin{cases}\frac{m^2}{16}+\frac{n^2}{4}=1\\ m^2+(n-2)^2=4m^2\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}m=\frac{17\sqrt{3}}{3}\\ m=-\frac{17\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Vậy $B\left(\frac{17\sqrt{3}}{3};\frac{-22}{13}\right), C\left(-\frac{17\sqrt{3}}{3};\frac{-22}{13}\right)$ hoặc $B\left(-\frac{17\sqrt{3}}{3};\frac{-22}{13}\right), C\left(\frac{17\sqrt{3}}{3};\frac{-22}{13}\right)$

27:

Giả sử Elip có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Theo bài ra có $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2=\frac{3}{4}a^2$.

Suy ra phương trình (E) $3x^2+4y^2=3a^2$.

Tọa độ các giao điểm A, B, C, D của Elip và (C) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ 3x^2+4y^2=3a^2\end{cases}$ (I)

Do (E) và (C) cùng nhận trục Ox và trục Oy làm trục đối xứng và AB song song trục Ox nên A, B đối xứng nhau qua trục Oy; B và C đối xứng nhau qua Ox.

$AB = 2BC \Leftrightarrow 2|x| = 2.2|y| \Leftrightarrow x^2 = 4y^2$ (*).

Từ (I) và (*) suy ra: $x^2 = \frac{64}{5}; y^2 = \frac{16}{5}; a^2 = \frac{256}{15}$.

Bài 28:

Diện tích hình tròn nội tiếp hình thoi ABA'B' bằng 4π

$\Rightarrow$ bán kính đường tròn r = 2

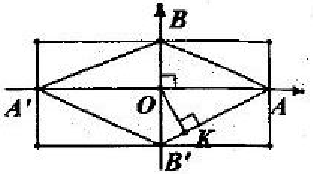
O là tâm hình tròn, kẻ $OK \perp AB' \Rightarrow r = OK = 2$

Xét tam giác vuông OAB' ta có: $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ (1)

Từ giả thiết:

$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}.\sqrt{a^2 - b^2}$

$\Leftrightarrow a^2 = 2a^2 - 2b^2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$ (2)



a^2 và b^2 được tìm từ hệ (1); (2)

$$\begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 12 \\ b^2 = 6 \end{cases}$$

Vậy Elip thoả yêu cầu bài toán co phương trình là: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$

Bài 29:

Theo đề bài ta có hệ:

$$\begin{cases} e = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 4ab = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9} \\ ab = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a^2 = 9\left(a^2 - b^2\right) \\ a^2b^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 = 9b^2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

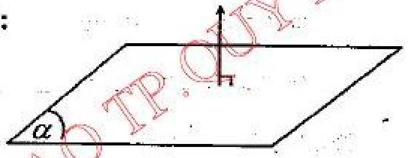
Vậy phương trình elip cần tìm là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

HẦN 2: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

§ 1: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

éc tơ pháp tuyến (vtpt) của mặt phẳng:



$\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng α

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ có giá vuông góc với mp}(\alpha) \end{cases}$$

ú ý:

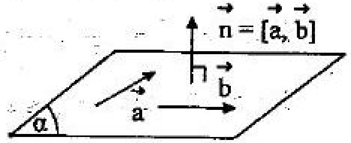
Một mặt phẳng có vô số vtpt, các véc tơ này cùng phương với nhau.

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vtpt của nó.

Cách tìm tọa độ một vtpt của mặt phẳng khi biết cặp vtcp của nó:

nh lý: Giả sử mặt phẳng (α) có cặp vtpt là: $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$ thì mp(α) có một vtpt là:

$$\vec{n} = \left[\vec{a}; \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$



hương trình của mặt phẳng :

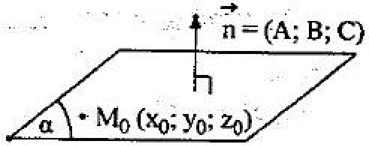
nh lý 1: Trong không gian với hệ Oxyz. Phương trình mặt phẳng α đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

nh lý 2: Trong không gian với hệ Oxyz.

Phương trình dạng:

$Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$



à phương trình tổng quát của một mặt phẳng .

u ý :

Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có một vtpt là $\vec{n} = (A; B; C)$

$M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

trường hợp đặc biệt:

hương trình các mặt phẳng tọa độ:

(Oxy): z = 0

(Oyz): x = 0

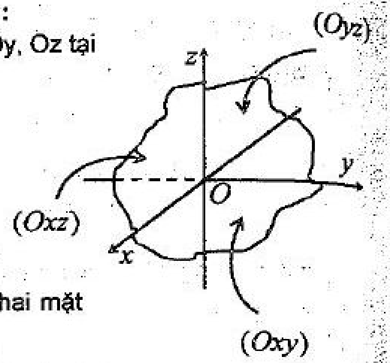
(Oxz): y = 0

b. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:

Phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz tại

$$\begin{cases} A(a;0;0) \\ B(0;b;0) \quad (a,b,c \neq 0) \\ C(0;0;c) \end{cases}$$

là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

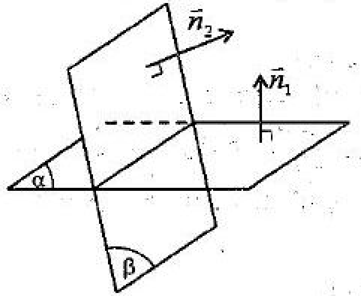


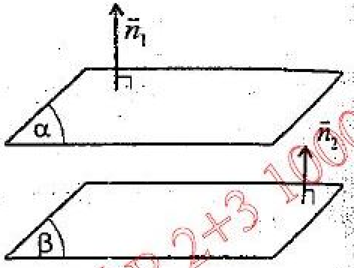
4. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

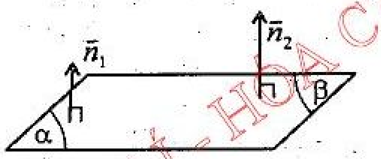
Định lý: Trong không gian với hệ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ xác định bởi phương trình:

$(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ có vtpt $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$

$(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có vtpt $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$







+ (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$

hay $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ hoặc $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ hoặc $\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A_1}{A_2}$

+ $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

+ $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

Đặc biệt: $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. Góc và khoảng cách

a. Góc giữa hai mặt phẳng:

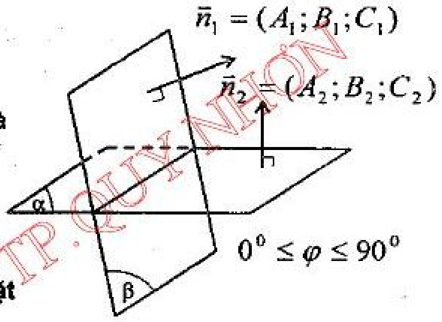
Định lý: Trong không gian với hệ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ xác định bởi phương trình:

$(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta có công thức:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

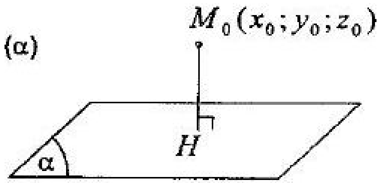

$\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$
$\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$
α
β
$0^0 \le \varphi \le 90^0$

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

ịnh lý: Trong không gian với hệ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$

Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính bởi công thức:

$$d(M_0;\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

ạng 1: Sử dụng phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết một vtpt

Phương trình mặt phẳng α đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$

Thường thì việc tìm điểm thuộc mặt phẳng không khó, cái khó là phải xác định được vtcp. Muốn tìm được vtcp phải căn cứ vào vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt phẳng, mặt phẳng với đường thẳng...

Với vtpt có thể cho ở các trường hợp sau:

ực tiếp:

Song song với mặt phẳng (Q) $\Rightarrow \overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{n_Q}$

Vuông góc với đường thẳng d $\Rightarrow \overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{u_d}$

Vuông góc với giá của vecto $\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{n_p}=\vec{v}$

án tiếp:

Vuông góc với hai mặt phẳng (α) và $(\beta) \Rightarrow \overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$

Song song với hai đường thẳng d_1 và $d_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$

Vuông góc với đường thẳng (α) và song song với đường thẳng d $\Rightarrow \overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{u_d}\right]$

Song song với giá của hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v} \Rightarrow \vec{n_p} = \left[\vec{u}, \vec{v}\right]$

Trường hợp mặt phẳng (P) chứa hai điểm A và B (cũng giống như chứa đường thẳng d) thì sẽ kết hợp các điều kiện để tìm vtpt của mặt phẳng (P)

Chú ý: Khi tính vtcp ở dạng gián tiếp trước hết phải kiểm tra xem hai vecto đó có cùng phương hay không, nếu không cùng phương thì tích có hướng của chúng mới là vtpt của mặt phẳng

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các mặt phẳng $(P_1): x+2y+3z+4=0$ và $(P_2): 3x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$, vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2)

Giải:

Vtpt của hai mặt phẳng là $\overrightarrow{n_{(P_1)}} = (1;2;3), \overrightarrow{n_{(P_2)}} = (3;2;-1)$

(P) qua $A(1;1;1)$, $(P) \perp (P_1), (P_2) \Rightarrow$ (P) có một vecto pháp tuyến:

$\overrightarrow{n_{(P)}} = \left[\overrightarrow{n_{(P_1)}}, \overrightarrow{n_{(P_2)}}\right] = (-8;10;-4) = -2(4;-5;2)$

Phương trình mặt phẳng (P):

$4(x-1) - 5(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y + 2z - 1 = 0.$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho điểm A(0; 1; 2) và hai đường thẳng

$$d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad d': \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với d và d'

Giải:

Vì $B(0;1;-1) \in d_1; C(1;-1;2) \in d_2$ và $B, C \notin (\alpha) \Rightarrow d_1, d_2 \,//\, (\alpha)$

Vecto chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là $\overrightarrow{u_1} = (2;1;-1)$ và $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;1)$

Mặt phẳng (α) song song với $\Rightarrow$ d và d' vecto pháp tuyến của (α) là

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1;-3;-5)$

Vì mặt phẳng (α) đi qua $A(0;1;2) \Rightarrow (\alpha): x+3y+5z-13=0$

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

Giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;4;-8) = 2(1;2;-4)$

phương trình mp (ABC) đi qua điểm A và có vtpt $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ nên có phương trình là: $1(x-0)+2(y-1)-4(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-4z+6=0$

dụ 4: Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases} \qquad \Delta_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2

Giải:

Chọn $M(0;-2;0) \in \Delta_1$ và Δ_1 có vtcp $\vec{u}_1 = (2;3;4)$, Δ_2 có vtcp $\vec{u}_2 = (1;1;2)$

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2

$\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có vtpt $\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2;0;-1)$

$\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) có phương trình là :

$2(x-0) + 0(y+2) - 1(z-0) = 0$ hay $2x - z = 0$

dụ 5: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}$. Chứng minh d_1 và d_2 song song với nhau . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2

Giải:

ứng minh d_1 và d_2 song song với nhau ,ta có

d_1 đi qua điểm $M(1;-2;-1)$ và có vtcp $\vec{u}_1 = (3;-1;2)$

d_2 có vtcp $\vec{u}_2 = (3;-1;2) = \vec{u}_1$ và $M_1 \notin d_2$

Vậy $d_1 \,//\, d_2$ (đpcm)

t phương trình mặt phẳng (P) chứa cả d_1 và d_2

ch 1:

Chọn hai điểm $N(-3;5;0)$ và $Q(12;0;10) \in d_2$.

Mặt phẳng (P) chứa $d_1 \,//\, d_2 \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) đi qua ba điểm M, N và Q

$\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có vtpt

$\vec{n}_P = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}\right] = (75;55;-85) = 5(15;11;-17)$ (với $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MQ}$ không cùng phương)

$\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) có phương trình là :

$15(x-1)+11(y+2)-17(z+1)=0 \Leftrightarrow (P): 15x+11y-17z-10=0$

ch 2:

Chọn $N(-3;5;0) \in d_2$. Mặt phẳng (P) chứa $d_1 \,//\, d_2$

$\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có vtpt $\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}] = (15;11;-17)$ (với $\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{MN}$ không cùng phương)

⇔ mặt phẳng (P) có phương trình là :

$$15(x-1)+11(y+2)-17(z+1)=0 \Leftrightarrow (P): 15x+11y-17z-10=0$$

Thí dụ 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ D đến mặt phẳng (P)

Giải:

Xét hai trường hợp

TH1: Mặt phẳng (P) // CD. Ta có: $\overline{AB}=(-3;-1;2), \overline{CD}=(-2;4;0)$

$\Rightarrow (P)$ có vtpt $\vec{n}=\left[\overline{AB},\overline{CD}\right]=(-8;-4;-14)=-2(4;2;7)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và có vtpt $\vec{n}=(4;2;7)$ nên có phương trình là

$(P): 4(x-1)+2(y-2)+7(z-1)=0 \Leftrightarrow 4x+2y+7z-15=0$

TH2: Mặt phẳng (P) qua $I(1;1;1)$ là trung điểm CD

Ta có $\overline{AB}=(-3;-1;2)$, $\overline{AI}=(0;-1;0) \Rightarrow (P)$ có vtpt $\vec{n}=(2;0;3)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm I và có vtpt $\vec{n}=(2;0;3)$ nên có phương trình là

$$(P): 2(x-1)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+3z-5=0$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P_1): 4x+2y+7z-15=0$ và

$$(P_2): 2x+3z-5=0$$

Dạng 2: Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn để viết phương trình mặt phẳng

LÝ THUYẾT:

Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt 3 trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(a;0;0)\in Ox$; $B(0;b;0)\in Oy$ và $C(0;0;c)\in Oz$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow bcx+acy+abz=abc$ với $a^2+b^2+c^2>0$

(phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn)

Để viết được phương trình mặt phẳng (P) thông thường giả thiết cho các điều kiện (thường là 3 điều kiện). Từ đó thiết lập các hệ với 3 ẩn a, b, c giải hệ này tìm được a, b, c. Thay vào (P) ta được phương trình mặt phẳng (P) cần tìm

Các điều kiện có thể cho như đi qua điểm, khoảng cách, góc, tích vô hướng hoặc bất đẳng thức kết hợp...

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: **(ĐH – B 2012)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(0;0;3), M(1;2;0). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.

Giải:

ách 1:

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng với Ox $\Rightarrow B(b;0;0)$.

C là giao điểm của mặt phẳng với Oy $\Rightarrow C(0;c;0)$.

Vậy mặt phẳng (P) có dạng : $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{3}=1$ và trọng tâm tam giác ABC là : $G\left(\frac{b}{3};\frac{c}{3};1\right)$

$\overline{AM}=(1;2;-3)$. Phương trình đường thẳng AM : $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-3}$

Vì $G\in AM$ nên $\frac{b}{3}=\frac{c}{6}=\frac{-2}{-3}\Rightarrow b=2, c=4$

Vậy phương trình mặt phẳng (*P*) là $6x+3y+4z-12=0$

Cách 2:

Gọi B là giao điểm của mặt phẳng với Ox $\Rightarrow B(b;0;0)$.

C là giao điểm của mặt phẳng với Oy $\Rightarrow C(0;c;0)$.

Phương trình đường thẳng đi qua A nhận vecto $\overline{AM}=(1;2;-3)$ làm vtcp có phương trình AM : $\begin{cases}x=t\\y=2t\\x=3-3t\end{cases}$. Điểm $G\in AM\Rightarrow G(t;2t;3-3t)$

Tam giác ABC nhận G làm trọng tâm nên

$$\begin{cases}b=3t\\c=6t\\3=3(3-3t)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\c=4\\t=\frac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+4z-12=0$$

hí dụ 2: Trong hệ trục Oxyz cho $M(2;4;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C tương ứng với hoành độ, tung độ và cao độ dương sao cho 4OA = 2OB = OC.

Giải:

Ba điểm A, B, C là điểm nằm trên Ox, Oy, Oz tương ứng có hoành độ, tung độ và cao độ dương và 4OA = 2OB = OC suy ra $A(a;0;0)$, $B(0;2a;0)$ và $C(0;0;4a)$ với $a>0$

Phương trình (ABC) : $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{4a}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-4a=0$

Mặt phẳng (ABC) qua $M(2;4;1) \Leftrightarrow 4.2+2.4+1-4a=0 \Leftrightarrow a=\frac{17}{4}$

Vậy phương trình (ABC) là $4x+2y+z-17=0$.

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm B(0; 3; 0), M(4; 0; –3). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa B, M và cắt các trục Ox, Oz lần lượt tại các điểm A và C sao cho thể tích khối tứ diện OABC bằng 3 (O là gốc toạ độ).

Giải:

Gọi a, c lần lượt là hoành độ, cao độ của các điểm A, C. Do OABC là hình tứ diện theo giả thiết nên $ac \neq 0$.

Vì $B(0;3;0) \in Oy$ nên $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{3}+\frac{z}{c}=1$.

Điểm $M(4;0;-3) \in (P) \Rightarrow \frac{4}{a}-\frac{3}{c}=1 \Leftrightarrow 4c-3a=ac \ (1)$

Thể tích $V_{OABC}=\frac{1}{3}OB.S_{\Delta OAC}=\frac{1}{3}.3.\frac{1}{2}|ac|=\frac{|ac|}{2}=3 \Leftrightarrow |ac|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab=6 \ (2) \\ ab=-6 \ (3)\end{array}\right.$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} ac=6 \\ 4c-3a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ c=-\frac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ c=3 \end{cases}$

Từ (1) và (3) ta có hệ $\begin{cases} ac=-6 \\ 4c-3a=-6 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn $(P_1): \frac{x}{-4}+\frac{y}{3}-\frac{2z}{3}=1; (P_2): \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$

Thí dụ 4: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho M(1;2;3). Lập phương trình (α) mặt phẳng đi qua M cắt ba tia Ox tại A, Oy tại B, Oz tại C sao cho thể tích tứ diện OABC nhỏ nhất.

Giải:

Mặt phẳng cắt 3 tia Ox, Oy, Oz tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ có dạng

$$(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ (a,b,c>0)$$

Do $M \in (\alpha)$ nên: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1.2.3}{a.b.c}}=3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow \frac{abc}{6} \geq 27.$$

Vậy $V \geq 27$ và $V_{min}=27$ khi $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases}$.

Mặt phẳng cần tìm $(\alpha): \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1 \Leftrightarrow (\alpha): 6x+3y+2z-18=0$

dụ 5: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A(0;2;0), B(0;0;–1) và thuộc Ox. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) biết khoảng cách từ C tới mặt phẳng $(P): 2x+2y-z=0$ bằng khoảng cách từ C tới đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{2}$.

Giải:

Gọi $C(a;0;0) \in Ox$, chọn điểm $M(1;0;-2) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MC}=(a-1;0;2); \overrightarrow{u_\Delta}=(1;2;2)$

Ta có $\begin{cases} d(C;(P))=\frac{|2a|}{3} \\ d(C;(\Delta))=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MC};\overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{|\overrightarrow{u}|} \\ \left[\overrightarrow{MC};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(-4;4-2a;2(a-1)) \end{cases}$

Theo giả thiết

$d(C;(\Delta))=d(C;(P)) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8a^2-24a+36}}{3}=\frac{|2a|}{3} \Leftrightarrow a=3 \Rightarrow C(3;0;0)$

Phương trình mp(P): $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1 \Leftrightarrow 2x+3y-6z-6=0$

dụ 6: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(-2;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho tam giác ABC có trực tâm là M.

Giải:

Giả sử (P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Nếu (P) đi qua O thì $A \equiv B \equiv C$ nên không tồn tại tam giác ABC.

Nếu (P) không đi qua O thì $abc \neq 0$ nên mặt phẳng $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì (P) đi qua M nên $\frac{-2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}=1 \ (1)$

M là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow \begin{cases} MA \perp BC \\ MB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3c \\ a=-\frac{3}{2}c \end{cases}$

Thế vào (1) ta được $\frac{4}{3c}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{c}=1 \Leftrightarrow c=\frac{14}{3} \Rightarrow a=-7, b=14$

Vậy phương trình (P) là $\frac{x}{-7}+\frac{y}{14}+\frac{3z}{14}=1 \Leftrightarrow -2x+y+3z-14=0$

khác: Chứng minh được $OM \perp (ABC)$

Vậy (P) là mặt phẳng qua M và có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{OM}=(-2;1;3)$

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$-2(x+2)+(y-1)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow -2x+y+3z-14=0$$

Thí dụ 7: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho các điểm *A*(2;0;0), *H*(1;1;1). Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *A*, *H* sao cho (*P*) cắt O*y*, O*z* lần lượt tại B, C thỏa mãn diện tích của tam giác *ABC* bằng $4\sqrt{6}$

Giải :

Giả sử $B(0;b;0)\in Oy;\ C(0;0;c)\in Oz$.

Phương trình mặt phẳng $(P):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Vì H thuộc (P) nên : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \Leftrightarrow 2(b+c)=bc \quad (1)$

$\overline{AB}=(-2;b;0);\overline{AC}=(-2;0;c)$

$\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=(bc;2c;2b)\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+4b^2+4c^2}=4\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow b^2c^2+4(b+c)^2-8bc=384 \Leftrightarrow b^2c^2-4bc-192=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bc=16 \\ bc=-12 \end{array}\right.$

Với bc = 16

Ta có : $\begin{cases} b+c=8 \\ bc=16 \end{cases} \Leftrightarrow b=c=4 \Rightarrow (P_1):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+y+z-4=0$

Với bc = −12 Ta có $\begin{cases} b+c=-6 \\ bc=-12 \end{cases} \Rightarrow$ b, c là nghiệm phương trình:

$x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{21}$

$(P_2):\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3+\sqrt{21}}-\dfrac{z}{3-\sqrt{21}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}+\dfrac{(3-\sqrt{21})y}{12}+\dfrac{(3+\sqrt{21})z}{12}=1$

$\Leftrightarrow 6x+(3-\sqrt{21})y+(3+\sqrt{21})z-12=0$

$(P_2):\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3-\sqrt{21}}-\dfrac{z}{3+\sqrt{21}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}+\dfrac{(3+\sqrt{21})y}{12}+\dfrac{(3-\sqrt{21})z}{12}=1$

$\Leftrightarrow 6x+(3+\sqrt{21})y+(3-\sqrt{21})z-12=0$

Thí dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm M(1; 2; 1), N(−1; 0; −1). Viết phương trình mp(P) đi qua M, N cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A và B (khác 0) sao cho $\dfrac{AM}{BN}=\sqrt{3}$

Giải:

Giả sử (P) cắt Ox; Oy ; Oz lần lượt tại A(a ; 0 ; 0) ; B(0; b ; 0) ; C(0; 0 ; c)

Nên (P) có dạng $(P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Vì (P) đi qua M ; N nên ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \\ -\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{b}=2 \Leftrightarrow b=1$

Mặt khác $AM=\sqrt{3}BN \Leftrightarrow AM^2=3BN^2 \Leftrightarrow (a-1)^2+4+1=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 \end{array}\right.$

Với $a=3 \Rightarrow c=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow (P):\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{1}-\dfrac{z}{\frac{3}{4}}=1 \Leftrightarrow (P):x+3y-4z-3=0$

Với $a=-1 \Rightarrow \dfrac{1}{c}=0$ (loại)

Vậy phương trình mặt phẳng $(P):x+3y-4z-3=0$

Thí dụ 9: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai điểm $A(-3;0;0)$ và $B(-2;2;0)$. Xác định toạ độ điểm C thuộc trục tung Oy sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B đồng thời mặt phẳng (P) tạo với mặt phẳng Oxy một góc $\dfrac{\pi}{6}$.

Giải:

Gọi C(0; c; 0) thuộc trục tung Oy, ta có $\overline{AB}=(1;2;0);\overline{AC}=(3;c;0)$

Khi đó điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$ cùng phương, tức là $\dfrac{3}{1}=\dfrac{c}{2} \Leftrightarrow c=6 \Rightarrow$ *C*(0; 6;0)

Mặt phẳng (*P*) chứa đường thẳng AB, không vuông góc với mặt phẳng (Oxy), nên mp(*P*) cắt trục Oz tại D(0; 0; d) $(d\neq 0)$, cắt trục Oy tại C, cắt trục Ox tại A, mp(*P*) có phương trình : $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{d}=1$

Gọi $\vec{n}=\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{d}\right);\vec{k}=(0;0;1)$ là véc tơ pháp tuyến của mp(*P*) và mp(O*xy*)

Theo giả thiết mp(*P*) hợp với mp(O*xy*) một góc $\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left|\cos(\vec{n};\vec{k})\right|=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\left|0+0+\frac{1}{d}\right|}{1.\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{d^2}}}=\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{5d^2+36}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3(5d^2+36)=(12)^2 \Leftrightarrow d^2=\frac{12}{5} \Leftrightarrow d=\pm\frac{6}{\sqrt{15}}$$

Các mặt phẳng thoả mãn là

$(P_1):2x-y-\sqrt{15}z+6=0$ hoặc $(P_2):2x-y+\sqrt{15}z+6=0$

Thí dụ 10: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(4;1;1)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C với OA = a, OB = b, OC = c và $a, b, c > 0$ sao cho:

a. Tứ diện OABC có thể tích nhỏ nhất.

b. OA + OB + OC nhỏ nhất.

c. $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ nhỏ nhất.

Giải:

a. Làm tương tự bài 6 ta có $V \ge 18$ và $\begin{cases} a = 12 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm là $(\alpha): \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$

b. **Nhắc lại:** BĐT Bunhiacốpski : $|ax+by+cz| \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$ hay $(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$. Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$

Vì $M(4;1;1) \in mp(\alpha)$ ta có: $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski ta có :

$$4^2=\left(\sqrt{\frac{4}{a}}.\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{b}}.\sqrt{b}+\sqrt{\frac{1}{c}}.\sqrt{c}\right)^2 \le \left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \Leftrightarrow a+b+c \ge 16)^2$$

Vậy $(a+b+c)_{min}=16$ khi $\dfrac{\sqrt{\frac{4}{a}}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{b}}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{c}}}{\sqrt{c}} \Leftrightarrow \dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$

Thay $\dfrac{1}{b}$ và $\dfrac{1}{c}$ bằng $\dfrac{2}{a}$ vào (1) ta có a = 8, b = 4 và c = 4

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm $(\alpha): \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}=1$

c. Vì $M(4;1;1)$ mp(α) ta có: $\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ (1)

Áp dụng BĐT Bu nhiacốpski ta có

$$1=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left|\frac{1}{a}.4+\frac{1}{b}.1+\frac{1}{c}.1\right| \le \sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(4^2+1^2+1^2)}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \ge \dfrac{1}{18}$. Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{1}{4a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$.

Thay $\dfrac{1}{b}$ và $\dfrac{1}{c}$ bằng $\dfrac{1}{4a}$ vào (1) ta có $a=\dfrac{9}{2}$, b = 18 và c = 18

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm $(\alpha): \dfrac{2x}{9}+\dfrac{y}{18}+\dfrac{z}{18}=1$

í dụ 11: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình: (P): $x+4y-2z-6=0$, (Q): $x-2y+4z-6=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa giao tuyến của (P), (Q) và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp O.ABC là hình chóp đều.

Giải:

Chọn hai điểm M(6;0;0) và N(2;2;2) thuộc giao tuyến

Mặt phẳng (R) cắt các trục tọa độ tại A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) nên có phương trình: $(R): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. (1)

Hình chóp O.ABC là hình chóp tam giác đều, ta được:

$OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$. (2)

Mặt phẳng (P) chứa giao tuyến khi nó chứa các điểm N, M, ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a}=1 \\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=6 \\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3} \\ |b|=|c|=6 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=6.$$

Vậy mặt phẳng (R): $x+y+z-6=0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

í dụ 12: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{1-z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và cắt chiều dương các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích bằng 6.

Giải:

Chọn hai điểm M(1;1;1) và N(0;0;2) thuộc *d*

Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) với a, b, c > 0 nên có phương trình:

$(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (P): bcx+acy+abz=abc$

(1)

Thể tích tứ diện OABC bằng 6, ta được:

$V_{OABC}=6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}OA.OB.OC=6 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}a.b.c=6 \Leftrightarrow abc=36.$ (2)

Mặt phẳng (P) chứa d khi nó chứa các điểm N, M ta được:

$$\begin{cases} 2ac=abc \\ bc+ac+ab=abc \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c=2 \\ 2b+2a+ab=36 \\ ab=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a+b=9 \\ ab=18 \end{cases}.$$

Từ hệ trên, suy ra a, b là nghiệm của phương trình:

$$t^2-9t+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=3 \\ t_2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases} \\ \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Với a = 3, b = 6 và c = 2 thay vào (1), ta được:

(P_1): $6.2x + 3.2y + 3.6z = 3.6.2 \Leftrightarrow (P_1): 2x + y + 3z - 6 = 0$.

Với a = 6, b = 3 và c = 2 thay vào (1), ta được:

(P_2): $3.2x + 6.2y + 6.3z = 6.3.2 \Leftrightarrow (P_2): x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Vậy tồn tại hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 13: Trong không gian tọa độ Oxyz cho 2 điểm I(0;0;1) và K(3;0;0). Viết phương trình mặt phẳng qua I, K và tạo với mặt phẳng (xOy) một góc bằng 30^0

Giải:

Giả sử mặt phẳng cần có dạng $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a,b,c \neq 0)$

Do $I \in (\alpha) \Rightarrow c = 1$ và do $K \in (\alpha) \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$

$$\Rightarrow \overline{n_\alpha} = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{b};1\right) \text{ và } \overline{n_{(x0y)}} = \vec{k} = (0;0;1) \Rightarrow \cos 30^0 = \frac{\overline{n_\alpha}.\overline{n_{(x0y)}}}{\left|\overline{n_\alpha}\right|.\left|\overline{n_{(x0y)}}\right|} \Rightarrow b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{3} \pm \frac{y}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{1} = 1$$

Dạng 3: Ứng dụng phương trình đặc biệt của mặt phẳng để viết phương trình mặt phẳng

Lý thuyết:

Phương trình mặt phẳng (P) có vtpt $\bar{n} = (A;B;C)$ luôn có dạng

$(P): Ax + By + Cx + D = 0 \quad (*)$

Trong đó D là hằng số cần phải tìm

Với dạng bài toán này người ta thường cho trước dữ kiện để xác định được vtpt và điều kiện còn lại để tìm D.

Để tìm D người ta cho trước điều kiện để dẫn tới một phương trình một ẩn, giải phương trình này ta được D, thay vào (*) ta được phương trình mặt phẳng (P) cần tìm

Các điều kiện có thể cho thường là các dạng sau như tiếp xúc với mặt cầu, song song và cách đều 2 mặt phẳng

Phương pháp: (trường hợp tiếp xúc với mặt cầu, các trường hợp khác tương tự)

- **Bước 1:** Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) và vtpt **hoặc** vtcp
- **Bước 2:** Từ điều kiện cho trước xác định vtpt $\bar{n}_P$, giả sử $\bar{n}_P = (a;b;c)$ khi đó mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz + D' = 0$ với $D' \neq 0 \quad (1)$
- **Bước 3:** Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P)) = R$, từ đây được phương trình theo D, giải phương trình (tại tuyệt đối) được D' thay vào (1) ta được phương trình mặt phẳng (P) cần tìm
- **Bước 4:** Kết luận (thường có hai mặt phẳng thỏa mãn)

Chú ý: Điều kiện cho trước là

Song song với mặt phẳng (Q) cho trước $\Rightarrow \bar{n}_P = \bar{n}_Q$

Vuông góc với đường thẳng d cho trước $\Rightarrow \bar{n}_P = \bar{u}_d$

Song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 cho trước $\Rightarrow \bar{n}_P = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$

Vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) cho trước $\Rightarrow \bar{n}_P = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$

Song song với đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q) cho trước $\Rightarrow \bar{n}_P = [\bar{u}_d, \bar{n}_Q]$

Chú ý :

Nếu mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có vtpt là $\overline{MI}$

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là : $(Q): 4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$

Giải:

Mặt phẳng (Q) có vtpt $\bar{n}_Q = (4;3;-12)$.

Mặt cầu (S) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính R = 4

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)

$\Rightarrow$ mặt phẳng (P) luôn có dạng $4x + 3y - 12z + D' = 0$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.2 - 12.3 + D'|}{\sqrt{16+9+144}} = 4 \Leftrightarrow |D' - 26| = 52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D' = 26 \\ D' = 78 \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn đầu bài là :

(P_1): $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc (P_2): $4x + 3y - 12z - 26 = 0$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz . Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với trục Oz, vuông góc với mặt phẳng (P): x + y + z = 0 và tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$

Giải:

Mặt phẳng (P) có vtpt $\bar{n}_P = (1;1;1)$.

Mặt cầu (S) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

$\Rightarrow$ mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;-2)$ và có bán kính R = 3

Mặt phẳng (α) song song với trục Oz và vuông góc với mặt phẳng (P)

$\Leftrightarrow \bar{n}_\alpha = [\vec{k}, \bar{n}_P] = (1;-1;0)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (α) luôn có dạng $x - y + D' = 0$

Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.1-1.(-1)+D'|}{\sqrt{1+1}} = 3 \Leftrightarrow |D'+2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow D = -2 \pm 3\sqrt{2}$$

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn đầu bài là:

$(\alpha_1): x-y-2+3\sqrt{2}=0$ hoặc $(\alpha_2): x-y-2-3\sqrt{2}=0$

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ O xyz cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ và điểm $M(4;3;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) và đi qua điểm M

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;-2)$ và bán kính $R = 3$

Vì $M(4;3;0) \in (S)$ nên mặt phẳng (P) đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) và nhận $\overrightarrow{IM} = (1;2;2)$ làm vtpt có phương trình là $x+2y+2z+D=0$

(P) đi qua M nên $4+2.3+2.0+D=0 \Rightarrow D=-10 \Rightarrow (P): x+2y+2z-10=0$

Thí dụ 4: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

$\Delta_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;-2)$, bán kính $R = 3$

Đường thẳng $(\Delta_1),(\Delta_2)$ lần lượt có các véctơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1), \vec{v}=(1;-1;1)$

mp(P) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = [\vec{u},\vec{v}] = (0;-1;-1) \Rightarrow (P): y+z+m=0 \ (m \in \mathbb{R})$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)

$$\Leftrightarrow d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3\sqrt{2}+3 \\ m=3-3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy có hai mặt phẳng là $(P_1): y+z+3+3\sqrt{2}=0; (P_2): y+z+3-3\sqrt{2}=0$

Thí dụ 5: Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình là (P) : $3x-y+4z+2=0$ và (Q) : $3x-y+4z+8=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) song song và cách đều (P), (Q)

Giải:

Vì $\vec{n}_P = \vec{n}_Q = (3;-1;4)$ và $2 \neq 8$ nên (P) // (Q), chọn điểm M(0; 2; 0) $\in$ (P) và điểm N(0; 8; 0) $\in$ (Q)

Mặt phẳng (α) song song với (P) và (Q) luôn có dạng $3x-y+4z+D'=0$

Vì (α) cách đều (P) và (Q) nên $d(M,(\alpha)) = d(N,(\alpha))$

$$\Leftrightarrow \frac{|3.0-2+4.0+D'|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{|3.0-8+4.0+D'|}{\sqrt{9+1+16}} \Leftrightarrow |D'-2| = |D'-8| \Leftrightarrow D' = 4$$

Vậy mặt phẳng (α) có phương trình là: $3x-y+4z+4=0$

Thí dụ 6: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$ và (Q): $x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Giải:

Mặt phẳng (P) và (Q) có vtpt lần lượt là $\overrightarrow{n_P} = (1;1;1)$; $\overrightarrow{n_Q} = (1;-1;1)$

Mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) nên có vtpt là

$\overrightarrow{n_R} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = (2;0;-2) = 2(1;0;-1)$

Phương trình (R) có dạng : $x-z+D=0$.

Theo giả thiết ta có : $d(0;(R)) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow D = \pm 2\sqrt{2}$

Phương trình $(R): x-z+2\sqrt{2}=0$ hay $(R): x-z-2\sqrt{2}=0$

Cách khác: Xem ở dạng 4

Thí dụ 7: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;2;0)$ và $C(0;0;4)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y+3z-4=0$ và cắt mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC theo một đường tròn có chu vi bằng 2π.

Giải:

Chu vi đường tròn (C) bằng 2π suy ra đường tròn có bán kính là $r = 1$.

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ngoại tiếp OABC khi đó $d=0; a=b=1; c=2$; tâm $I(1;1;2)$ bán kính $R=\sqrt{6}$

Khoảng cách từ $I(1;1;2)$ tới mặt phẳng chứa đường tròn (C) hay khoảng cách từ $I(1;1;2)$ tới (P) là $d_{(I,P)} = \sqrt{R^2-r^2} = \sqrt{5}$

(P) có phương trình dạng $x+2y+3z+c=0$ khi đó $c = -9 \pm \sqrt{70}$

Vậy (P): $x+2y+3z-9\pm\sqrt{70}=0$

Thí dụ 8: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) và đường thẳng d có phương trình lần lượt là $(S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$, $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 2.

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ có bán kính $R = 3$, đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (1;2;-2)$

Mặt phẳng (P) vuông góc với d nên vtpt của (P) là $\vec{n}=(1;2;-2)$

Giả sử (P) có phương trình : $x+2y-2z+D=0$

Ta có $d(I,(P))=\sqrt{R^2-4}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{|5+D|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|5+D|=3\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5+D=3\sqrt{5}\\5+D=-3\sqrt{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=3\sqrt{5}-5\\D=-3\sqrt{5}-5\end{array}\right.$$

Vậy có hai mp thỏa mãn đề bài là: $\left[\begin{array}{l}(P):\quad x+2y-2z+3\sqrt{5}-5=0\\(P):\quad x+2y-2z-3\sqrt{5}-5=0\end{array}\right.$

Thí dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=1\end{cases}$; $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. Viết phương trình mp(*P*) song song với d_1 và d_2, sao cho khoảng cách từ d_1 đến (*P*) gấp hai lần khoảng cách từ d_2 đến (*P*).

Giải:

Ta có : d_1 đi qua điểm A(1;2;1) và vtcp là : $\vec{u_1}=(1;-1;0)$

d_2 đi qua điểm $B(2;1;-1)$ và vtcp là: $\vec{u_2}=(1;-2;2)$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mp(P), vì (P) song song với d_1 và d_2 nên

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-2;-2;-1)\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(P):2x+2y+z+m=0$

Ta có $d\left(d_1;(P)\right)=d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|7+m|}{3}$; $d\left(d_2;(P)\right)=d\left(B;(P)\right)=\dfrac{|5+m|}{3}$

Theo giả thiết $d\left(d_1;(P)\right)=2.\,d\left(d_2;(P)\right)\Leftrightarrow|7+m|=2.|5+m|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7+m=2(5+m)\\7+m=-2(5+m)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-\dfrac{17}{3}\end{array}\right.$$

Với $m=-3\Rightarrow mp(P_1):2x+2y+z-3=0$

Với $m=-\dfrac{17}{3}\Rightarrow mp(P_2):2x+2y+z-\dfrac{17}{3}=0$

Thí dụ 10: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình $(S):x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z-16=0$; $(P):2x+y-2z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (Q) bằng 3.

Giải:

$(S):x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z-16=0\Rightarrow$ (S) có tâm $I(2;2;-1)$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $2x+y-2z+D=0$ điều kiện $D\neq1(*)$

$d(I,(P))=3\Leftrightarrow\dfrac{|2.2+1.2-2(-1)+D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=3\Leftrightarrow|D+8|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-17\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $D=-17$

Vậy phương trình của $(Q):2x+y-2z-17=0$

Thí dụ 11: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha):2x+y-z+17=0$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1;1;0)$; $B(0;0;1)$ và vuông góc với (α).

b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (α) và cắt mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$ theo đường tròn có chu vi bằng 6π.

Giải:

a. $(P)\perp(\alpha)$ và (P) đi qua A và B nên (P) có 2vtcp là $\vec{n_\alpha};\overrightarrow{AB}$.

Vậy $\vec{n_P}=\left[\vec{n}.\overrightarrow{AB}\right]=(1;1;4)$

Vậy mặt phẳng $(P):\begin{cases}\text{qua } A\\\text{có vtpt } \vec{n_P}\end{cases}\Rightarrow(P):x+y+4z=0$

b. Vì $(Q)\,/\!/\,(\alpha)$ nên $(Q):2x+2y-z+m=0$ $(m\neq17)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và $R=5$

Đường tròn (C) có chu vi bằng 6 $\Leftrightarrow2\pi.r=6\Rightarrow r=3$

$\Leftrightarrow d(I/(Q))=4\Leftrightarrow\dfrac{|2.1+2(-2)-3+m|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\m=17\ (\text{là }\alpha)\end{array}\right.$

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(Q):2x+2y-z-7=0$

Thí dụ 12: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q):x+y-z-2=0$ và cách nó một khoảng $h=\sqrt{3}$

Giải:

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) có dạng $x+y-z+C=0$

Lấy điểm $M(2;0;0)\in(Q)$.

Ta có $d\left[(P),(Q)\right]=d\left[M,(P)\right]=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-5\end{array}\right.$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) cần tìm là $x+y-z+1=0$; $x+y-z-5=0$

Dạng 4: Sử dụng phương trình tổng quát của mặt phẳng để viết phương trình mặt phẳng

Phương pháp:

Bước 1: Giả sử mặt phẳng cần tìm có dạng : $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng có vtpt $\bar{n}=(A;B;C)$

Bước 2: Từ điều kiện giả thiết dẫn tới một hệ ba phương trình 4 ẩn là A, B, C và D

Bước 3: Từ 2 trong 3 phương trình ta rút C và D theo A và B thế vào phương trình còn lại, từ đó sẽ dẫn tới hai dạng phương trình là

TH 1: $\alpha A+\beta B=0$, chọn $A=\beta, B=-\alpha\Rightarrow C,D\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm

TH 2: $\alpha A^2+\beta AB+\gamma B^2=0\overset{B\neq 0}{\Leftrightarrow}\alpha\left(\frac{A}{B}\right)^2+\beta\frac{A}{B}+\gamma=0\ldots(*)$ quay lại **TH 1** $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm

Để đơn giản, khi giải phương trình $(*)$ ta có thể chọn luôn

$$B=1\Rightarrow\alpha A^2+\beta A+\gamma=0$$

Chú ý:

- Đối với **TH1** khi rơi vào trường hợp đặc biệt là $\alpha A=0\Rightarrow A=0$ thì ta chọn $B=1$ (vì $\beta=0$) và ngược lại
- Thông thường để sử dụng phương pháp này thì bao giờ cũng phải có ba điều kiện thì sẽ tương đương với một hệ bốn ẩn, ba phương trình và ta làm như trên
- Để giảm độ phức tạp ta sẽ dùng phương pháp **"dồn ẩn"** như sau

  Giả sử $A\neq 0$ khi đó ta chia hai vế cho A ta được $x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0$.

  Đặt $\frac{B}{A}=b,\frac{C}{A}=c,\frac{D}{A}=d$

  Khi đó ta được $x+by+cz+d=0\ \left(b^2+c^2\neq 0\right)$, thì khi gặp ba điều kiện của giả thiết ta được ba phương trình ba ẩn, bấm máy tính là xong, tuy nhiên chúng ta phải thử trước nhé, biết đâu $A=0$... thì sao?
- Vì $\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$ tức là ít nhất một trong ba hệ số A, B và C phải khác 0 nên ta có thể tính A và D theo B và C **hoặc** A và C theo B và D **hoặc** A và B theo C và D **hoặc** B và C theo A và D điều này không ảnh hưởng gì tới kết quả của bài toán
- Phương pháp này có lợi thế là giải quyết hầu hết các bài toán về viết phương trình mặt phẳng, nhưng chúng ta không nên lạm dụng quá phương pháp này bởi độ tính toán phức tạp, mà nên dùng phương pháp này đối với những bài toán về khoảng cách, góc, diện tích, thể tích ... Còn các bài toán khác đơn giản nên dùng cách đơn giản hơn để giải, đừng quá máy móc về phương pháp. Ở đây chúng ta đưa ra phương pháp tổng quát giải quyết hầu hết các bài toán, nhưng chỉ mang tính chất "mô phỏng" phương pháp tổng quát (không tính phương pháp chùm) để các bạn hiểu và vận dụng phương pháp, còn các bài toán đơn giản hãy dùng phương pháp đơn giản

DỤ MINH HỌA

dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $A(0;1;2)$ và hai đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $d':\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=2+t\end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với *d* và *d'*

Giải:

Giả sử mặt phẳng (α) có dạng : $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M\Leftrightarrow A.0+B.1+C.2+D=0\ \ (1)$

Mặt phẳng (α) song song với đường thẳng *d*

$\Leftrightarrow\vec{n}_\alpha.\overline{u_d}=0\Leftrightarrow A.2+B.1+C.(-1)=0\ \ (2)$

Mặt phẳng (α) song song với đường thẳng *d'*

$\Leftrightarrow\vec{n}_\alpha.\overline{u_{d'}}=0\Leftrightarrow A.1+B.(-2)+C.1=0\ \ (3)$

Từ (1) và (2) ta được $C=2A+B, D=-4A-3B$ thế vào (3) ta được $A=3B$ chọn $A=1, B=3\Rightarrow C=5, D=-13$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $x+3y+5z-13=0$

dụ 2: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Giải:

Giả sử mặt phẳng (R) có dạng : $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$

Mặt phẳng (R) vuông góc với mặt phẳng (P)

$\Leftrightarrow\vec{n}_R.\vec{n}_P=0\Leftrightarrow A.1+B.1+C.1=0\ \ (1)$

Mặt phẳng (R) vuông góc với mặt phẳng (Q)

$\Leftrightarrow\vec{n}_R.\vec{n}_Q=0\Leftrightarrow A.1+B.(-1)+C.1=0\ \ (2)$

Khoảng cách $d\left(0;(R)\right)=2\Leftrightarrow\frac{|D|}{\sqrt{2}}=2\Leftrightarrow D=\pm 2\sqrt{2}\ \ \ (3)$

Cộng (1) và (2) ta được $A+C=0$, chọn $A=1\Rightarrow C=-1, B=0$ kết hợp với (3) a được hai phương trình mặt phẳng cần tìm là $(R_1): x-z+2\sqrt{2}=0$ và $(R_2): x-z-2\sqrt{2}=0$

dụ 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P)

đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ D đến mặt phẳng (P)

Giải:

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng : $ax+by+cz+d=0 \quad (a^2+b^2+c^2\neq 0)$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;1) \Leftrightarrow a.1+b.2+c.1+d=0 \quad (1)$

Mặt phẳng (P) đi qua $B(-2;1;3) \Leftrightarrow a.(-2)+b.1+c.3+d=0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được $c=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b, d=-\frac{5}{2}(a+b)$

Nên mặt phẳng (P) có phương trình là $ax+by+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right)z-\frac{5}{2}(a+b)=0$

Theo giả thiết $d\left[C,(P)\right]=d\left[D,(P)\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|a.2+b.(-1)+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right).1-\frac{5}{2}a-\frac{5}{2}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right)^2}}=\frac{\left|a.0+b.3+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right).1-\frac{5}{2}a-\frac{5}{2}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow |a-3b|=|a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a=4b\\2b=0\end{array}\right.$$

Với $2a=4b$ chọn $a=4, b=2 \Rightarrow c=7, d=-15 \Rightarrow (P_1): 4x+2y+7z-15=0$

Với $2b=0$ chọn

$b=0, a=1 \Rightarrow c=\frac{3}{2}, d=-\frac{5}{2} \Rightarrow (P_2): x+\frac{3}{2}z-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow (P_2): 2x+3z-5=0$

Nhận xét:

- Trong thí dụ 6 dạng 1 bài toán đã được trình bày ở dạng đặc biệt là xét hai trường hợp, điều này chỉ đúng khi $d\left[C,(P)\right]=d\left[D,(P)\right]$, và được giải bằng phương trình mặt phẳng dạng tổng quát như trong ví dụ này, tuy nhiên nếu thay đổi giả thiết là $d\left[C,(P)\right]=kd\left[D,(P)\right]$, $(0<k\neq 1)$ thì chỉ có thể giải bằng phương pháp tổng quát

Thí dụ 4: Trong không gian tọa độ Oxyz, lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;0;3)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$

Giải:

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng : $ax+by+cz+d=0 \quad (a^2+b^2+c^2\neq 0)$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;2;1) \Leftrightarrow a.0+b.(-1)+c.2+d=0 \quad (1)$

Mặt phẳng (P) đi qua $B(-2;1;3) \Leftrightarrow a.1+b.0+c.3+d=0 \quad (2)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và có bán kính $R=\sqrt{2}$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu

$$\Leftrightarrow d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|a.1+b.2+c.(-1)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{2} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta được $c=-a-b, d=2a+3b$ thế vào (3) và rút gọn ta được

$$3a^2+8b^2+11ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=-1\\\frac{a}{b}=-\frac{8}{3}\end{array}\right.$$

1: $\frac{a}{b}=-1$. Chọn $a=1, b=-1 \Rightarrow c=0, d=-1$, suy ra phương trình

$$(P_1): x-y-1=0$$

2: $\frac{a}{b}=-\frac{8}{3}$. Chọn $a=8, b=-3 \Rightarrow c=-5, d=7$, suy ra phương trình

$$(P_2): 8x-3y-5z+7=0$$

dụ 5: Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua giao tuyến của (P) và mặt phẳng Oxy và (P) tạo với 3 mặt phẳng tọa độ một tứ diện có thể tích bằng $\frac{125}{36}$.

Giải:

Phương trình mặt phẳng Oxy: z = 0. Đường thẳng d là giao của (P) và (Oxy)

d: $\left\{\begin{array}{l}2x-y+z-5=0\\z=0\end{array}\right.$. Chọn hai điểm $M(0;-5;0)$ và $N\left(\frac{5}{2};0;0\right)$ thuộc d

Giả sử mặt phẳng (Q) có dạng $Ax+By+Cz+D=0 \ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

Phương trình mặt phẳng (Q) chứa d nên chứa hai điểm M và N

Điểm $M(0;5;0)\in(Q) \Leftrightarrow -5B+D=0 \quad (1)$

Điểm $N\left(\frac{5}{2};0;0\right)\in(Q) \Leftrightarrow \frac{5}{2}A+D=0 \quad (2)$

Từ (1) chọn $B=-1 \Rightarrow D=-5$ thay vào (2) ta được

$A=2 \Rightarrow (Q): 2x-y+Cz-5=0$

Giao điểm A, B, C của (P) và 3 trục Ox, Oy, Oz lần lượt có tọa độ:

$A\left(\frac{5}{2};0;0\right)$, $B(0;-5;0)$, $C\left(0;0;\frac{5}{C}\right)$

Thể tích tứ diện OABC bằng

$\frac{125}{36} \Leftrightarrow V=\frac{1}{6}.OA.OB.OC=\frac{1}{6}.\frac{5}{2}.5.\left|\frac{5}{C}\right|=\frac{125}{36} \Leftrightarrow |C|=3 \Leftrightarrow C=\pm 3$

Vậy có 2 phương trình mặt phẳng thỏa mãn là $(P_1): 2x - y + 3z - 5 = 0$ hoặc $(P_2): 2x - y - 3z - 5 = 0$

***Thí dụ 6:* (ĐH – A 2002)** Trong không gian với hệ toạ độ vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \qquad \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2

Giải:

Chọn hai điểm $M\left(\frac{4}{3}; 0; \frac{8}{3}\right)$ và $N(0; -2; 0) \in \Delta_1$

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng : $Ax + By + Cz + D = 0 \ \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right)$

Mặt phẳng (P) đi qua $M\left(\frac{4}{3}; 0; \frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow A.\frac{4}{3} + B.0 + C.\frac{8}{3} + D = 0 \ (1)$

Mặt phẳng (P) đi qua $N(0; -2; 0) \Leftrightarrow A.0 + B.(-2) + C.0 + D = 0 \ (2)$

Từ (1) và (2) ta được $C = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{4}B$ và $D = 2B$

Nên mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_P = \left(A; B; -\frac{1}{2}A - \frac{3}{4}B\right)$

Đường thẳng Δ_2 có vtcp $\overrightarrow{u_2} = (1;1;2)$, mặt phẳng (P) song song với đường thẳng $\Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_P.\overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow A.1 + B.1 + \left(-\frac{1}{2}A - \frac{3}{4}B\right).2 = 0 \Leftrightarrow -5B = 0$ chọn $A = 1$;

$B = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}, D = 0$

Vậy mặt phẳng (P) có phương trình là $x - \frac{1}{2}z = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0$

Thí dụ 7: Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x - z - 6 = 0 \end{cases}$ sao cho giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ là đường tròn có bán kính $r = 1$.

Giải:

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0 \ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Chọn hai điểm $M(2; 0; -2), N(3; 1; 0) \in d$

Mặt phẳng (P) chứa d

nên $M, N \in (P) \Rightarrow \begin{cases} A.2 + B.0 + C.(-2) + D = 0 \\ A.3 + B.1 + C.0 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{A + B}{2} \\ D = -3A - B \end{cases}$

Suy ra mặt phẳng có phương trình là $Ax + By - \frac{A + B}{2}z - 3A - B = 0$

Mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$ có tâm $I(-1; 1; -1)$ và bán kính $R = 2$

Mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính $r = 1$

$$\Leftrightarrow d(I, P) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\left|A.(-1) + B.1 - \frac{A + B}{2}.(-1) - 3A - B\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \left(\frac{A + B}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|7A + 5B|}{\sqrt{5A^2 + 5B^2 + 2AB}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 17A^2 - 10AB - 7B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{A}{B} = 1 \\ \frac{A}{B} = -\frac{7}{17} \end{array}\right.$$

TH 1: $\frac{A}{B} = 1$. Chọn $A = B = 1 \Rightarrow C = -1, D = -4 \Rightarrow (P_1): x + y - z - 4 = 0$

TH 2: $\frac{A}{B} = -\frac{7}{17}$. Chọn $A = 7, B = -17 \Rightarrow C = 5, D = -5 \Rightarrow (P_2): 7x - 17y + 5z - 4 = 0$

Thí dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $M(1,1,5)$; $N(2,1,6)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và tạo với đường thẳng d một góc φ sao cho $\cos\varphi = \frac{\sqrt{17}}{9}$.

Giải:

Gọi $\bar{n} = (a; b; c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)
(điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 > 0$)
Phương trình mặt phẳng (P) đi qia điểm M có dạng
$(P): ax + by + cz - a - b - 5c = 0$
Vì (P) đi qua $N(2; 1; 6)$ nên ta có: $a + c = 0$

Ta có $\sin\varphi = \frac{8}{9}$. Do đó ta có : $\frac{|a + 2b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{9}$

Từ đó suy ra $3|a + 2b - 2c| = 8\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Thay $c = -a$ ta có $3|3a + 2b| = 8\sqrt{2a^2 + b^2}$

Bình phương hai vế: $9\left(9a^2 + 12ab + 4b^2\right) = 64\left(2a^2 + b^2\right)$

$\Leftrightarrow 47a^2 - 108ab + 28b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(47a-14b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ 47a = 14b \end{array}\right.$

Với $a = 2b$, $c = -a$, chọn $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$ ta có phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 7 = 0$

Với $47a = 14b$, $c = -a$, chọn $a = 14$, $b = 47$, $c = -14$ ta có phương trình mặt phẳng $(P): 14x + 47y - 14z + 9 = 0$

Vậy có hai phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 7 = 0$ hoặc $(P): 14x + 47y - 14z + 9 = 0$

Thí dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa *d* và tạo với Δ một góc 30^0.

Giải:

Mặt phẳng (*P*) chứa *d* ⇒ (P) đi qua $M(2;-1;-1) \Rightarrow$ (*P*) có dạng

$Ax + By + Cz - 2A + B + C = 0 \; (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

$d \subset (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow A + B - C = 0$ (1)

Theo giả thiết $\angle(\Delta; (P)) = 30^0 \Leftrightarrow \sin(\Delta; (P)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|A + B + 2C|}{\sqrt{6}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(A + B + 2C)^2 = 3(A^2 + B^2 + C^2)$. (2)

Từ (1) có $C = A + B$ thay vào (2): $2A^2 + 5AB + 2B^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = -2B \\ A = -\frac{B}{2} \end{array}\right.$

+ Khi $A = -2B$. Chọn $B = -1$, $A = 2$, $C = 1 \Rightarrow (P): 2x - y + z - 4 = 0$.

+ Khi $A = -\frac{B}{2}$. Chọn $B = -2$, $A = 1$, $C = -1 \Rightarrow (P): x - 2y - z - 5 = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P): 2x - y + z - 4 = 0$ hoặc $(P): x - 2y - z - 5 = 0$

Thí dụ 10: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $A(1;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z + 1 = 0$. Mặt phẳng (α) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P), cắt đường thẳng BC tại I sao cho IB = 2IC. Viết phương trình mặt phẳng (α).

Giải:

Gọi mặt phẳng (α) có phương trình là $ax + by + cz + d = 0$ với a; b; c không cùng bằng 0

Mp (α) đi qua $A(1;1;-1)$ nên ta có: $a + b - c + d = 0$ (1)

Mp (α) ⊥ $mp(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$ nên 2 VTPT vuông góc nhau

$\Leftrightarrow a - 2b + 2c = 0$ (2)

Theo giả thiết IB = 2IC ⇒ khoảng cách từ B tới mp (α) bằng 2 lần khoảng cách từ C tới (α)

$\Leftrightarrow \frac{|a + b + 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2\frac{|-a + 2b - 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a - 3b + 6c - d = 0 \\ -a + 5b - 2c + 3d = 0 \end{array}\right.$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có 2 trường hợp sau :

TH1: $\begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \\ 3a - 3b + 6c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-1}{2}a \\ c = -a \\ d = \frac{-3}{2}a \end{cases}$. Chọn $a = 2 \Rightarrow b = -1; c = -2; d = -3$

Ta có phương trình mp (α) là $2x - y - 2z - 3 = 0$

TH2: $\begin{cases} a + b - c + d = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \\ -a + 5b - 2c + 3d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a \\ c = a \\ d = \frac{-3}{2}a \end{cases}$. Chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3; c = 2; d = -3$

Ta có phương trình mp (α) là $2x + 3y + 2z - 3 = 0$

Vậy tìm được 2 mp (α) thỏa mãn là

$2x - y - 2z - 3 = 0$ hoặc $2x + 3y + 2z - 3 = 0$

Thí dụ 11: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(4;-2;2)$ và đường thẳng Δ có phương trình: $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với Δ.

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cách Δ một khoảng bằng $\frac{9}{\sqrt{5}}$.

Giải:

Ta có:

Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với Δ nên $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_\Delta} = (2;1;2)$ có phương trình $d: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Cách 1:

Lấy điểm $N(0;-4;-2)$ thuộc d và $A(3;2;1)$ thuộc Δ.

Mặt phẳng (P) cần dựng sẽ song song với Δ nên chứa d và do đó nó đi qua điểm N.

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình: (P):

$Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Vì M, N thuộc (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4A - 2B + 2C + D = 0 \\ -4B - 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = -B - 2C \\ D = 4B + 2C \end{cases}$

Để $d(\Delta,(P))=\frac{9}{\sqrt5}$ điều kiện là: $d(A,(P))=\frac{9}{\sqrt5}\Leftrightarrow\frac{|3A+2B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{9}{\sqrt5}$

$\Leftrightarrow 5(3A+2B+C+4B+2C)^2=81(A^2+B^2+C^2)$

$\Leftrightarrow 5(A+2B+C)^2=9(A^2+B^2+C^2)$

$\Leftrightarrow 5(2A+4B+2C)^2=9(4A^2+4B^2+4C^2)$

$\Leftrightarrow 5(-B-2C+4B+2C)^2=9(-B-2C)^2+9(4B^2+4C^2)$

$\Leftrightarrow 45B^2=45B^2+36BC+72C^2\Leftrightarrow BC+2C^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=0\\C=-2B\end{array}\right.$

+ Với C = 0 thì 2A = –B và D = 4B = –8A
  nên: (P_1): Ax – 2Ay – 8A = 0 ⇔ (P_1): x – 2y – 8 = 0.

+ Với B = –2C thì A = 0 và D = –6C
  nên: (P_2): –2Cy + Cz – 6C = 0 ⇔ (P_2): 2y – z + 6 = 0.
  Vậy tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Độc lập với câu a: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:
(P): Ax + By + Cz + D = 0, với $A^2+B^2+C^2>0$.

Lấy điểm $A(3;2;1)$ thuộc Δ và vì M thuộc (P) nên: $4A-2B+2C+D=0$ (1)

Mặt phẳng (P) cần dựng sẽ song song với Δ nên:

$\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow 2A+B+2C=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}B=-2A-2C\\D=-8A-6C\end{cases}$.

Để $d(\Delta,(P))=\frac{9}{\sqrt5}$ điều kiện là: $d(A,(P))=\frac{9}{\sqrt5}\Leftrightarrow\frac{|3A+2B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{9}{\sqrt5}$

$\Leftrightarrow\frac{|3A+2(-2A-2C)+C-8A-6C|}{\sqrt{A^2+(-2A-2C)^2+C^2}}=\frac{9}{\sqrt5}\Leftrightarrow\frac{|-9A-9C|}{\sqrt{5A^2+4AC+5C^2}}=\frac{9}{\sqrt5}$

$\Leftrightarrow 4AC=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=0\\A=0\end{array}\right.$.

+ Với C = 0 thì B = –2A và D = –8A nên:
  (P_1): Ax – 2Ay – 8A = 0 ⇔ (P_1): x – 2y – 8 = 0.

+ Với A = 0 thì B = –2C và D = –6C nên:
  (P_2): –2Cy + Cz – 6C = 0 ⇔ (P_2): 2y – z + 6 = 0.
  Vậy tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thí dụ 12: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm *A*(13; –1; 0), *B*(2; 1; –2) *C*(1; 2; 2) và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *A*, song song với *BC* và tiếp xúc mặt cầu (*S*).

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính R = 9

Giả sử (P) có vtpt $\bar n=(A;B;C)$, $(A^2+B^2+C^2\neq0)$

(P) // BC nên $\bar n\perp\overline{BC}=(-1;1;4)\Rightarrow\bar n.\overline{BC}=0\Leftrightarrow A=B+4C\Rightarrow\bar n=(B+4C;B;C)$

(P) đi qua A(13; –1; 0) ⇒ phương trình (P): $(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d[I,(P)]=R\Leftrightarrow\frac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C=0\Leftrightarrow(B+2C)(B-4C)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B+2C=0\\B-4C=0\end{array}\right.$

Với B + 2C = 0 chọn $\begin{cases}B=2\\C=-1\end{cases}$, ta được phương trình (P): –2x + 2y – z + 28 = 0

Với B – 4C = 0 chọn $\begin{cases}B=4\\C=1\end{cases}$, ta được phương trình (P): 8x + 4y + z – 100 = 0

Cả hai mặt phẳng (P) tìm được ở trên đều thỏa yêu cầu bài toán.

Thí dụ 13: Trong không gian Oxyz cho điểm $A(3;-2;-2)$ và mặt phẳng $(P):x-y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (P) biết rằng mặt phẳng (Q) cắt hai trục Oy, Oz lần lượt tại điểm phân biệt M và N sao cho OM = ON.

Giải:

Giả sử $\overrightarrow{n_Q}$ là một vecto pháp tuyến của (Q). Khi đó $\overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{n_P}(1;-1;-1)$

Mặt phẳng (Q) cắt hai trục Oy và Oz tại $M(0;a;0),N(0;0;b)$ phân biệt sao cho

OM = ON nên $|a|=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\neq0\\a=-b\neq0\end{array}\right.$

Nếu a = b thì $\overline{MN}=(0;-a;a)//\bar u(0;-1;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}\perp\bar u$ nên $\overrightarrow{n_Q}=\left[\bar u,\overrightarrow{n_P}\right]=(2;1;1)$.

Khi đó mặt phẳng $(Q):2x+y+z-2=0$ và (Q) cắt Oy, Oz tại $M(0;2;0)$ và $N(0;0;2)$ (thỏa mãn)

Nếu a = –b thì $\overline{MN}=(0;-a;-a)//\bar u(0;1;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}\perp\vec u$ nên $\overrightarrow{n_Q}=\left[\bar u,\overrightarrow{n_P}\right]=(0;1;-1)$.

Khi đó mặt phẳng (Q): y – z = 0

(Q) cắt Oy, Oz tại $M(0;0;0)$ và $N(0;0;0)$ (loại).

Vậy $(Q):2x+y+z-2=0$.

Thí dụ 14: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ và điểm A(2;1;2). Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ A đến (P) bằng $\frac{1}{\sqrt3}$.

Giải:

Đường thẳng Δ đi qua điểm *M*(1;1;2) và có vtcp là $\bar u=(2;-1;1)$.

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là vtpt của (P). Vì $\Delta\subset(P)\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{u}\Rightarrow\vec{n}.\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow 2a-b+c=0\Leftrightarrow b=2a+c\Rightarrow\vec{n}=(a;2a+c;c)$,

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có vtpt $\vec{n}$ có phương trình :

$a(x-1)+(2a+c)(y-1)+c(z-2)=0\Leftrightarrow(P):ax+(2a+c)y+cz-3a-3c=0$

Theo giả thiết $d(A;(P))=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+(2a+c)^2+c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow(a+c)^2=0\Leftrightarrow a+c=0$ chọn $a=1,\ c=-1$

$\Rightarrow$ Phương trình $(P):x+y-z=0$

Thí dụ 15: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho hai đường thẳng *d* và *d'* lần lượt có phương trình: $d:\ x=\dfrac{y-2}{-1}=z$ và $d':\ \dfrac{x-2}{2}=y-3=\dfrac{z+5}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua *d* và tạo với *d'* một góc 30^0

Giải:

Đường thẳng *d* đi qua điểm $M(0;2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;1)$

Đường thẳng *d'* đi qua điểm $M'(2;3;-5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}=(2;1;-1)$.

$Mp(\alpha)$ phải đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}$ và $|\cos(\vec{n};\vec{u}')|=\cos60^0=\dfrac{1}{2}$.

Gọi $\vec{n}=(A;B;C)$ là vtpt của mặt phẳng (α) thì ta phải có: $\begin{cases}A-B+C=0\\ \dfrac{|2A+B-C|}{\sqrt{6}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}B=A+C\\ 2|3A|=\sqrt{6}\sqrt{A^2+(A+C)^2+C^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=A+C\\ 2A^2-AC-C^2=0\end{cases}$

Ta có $2A^2-AC-C^2=0\Leftrightarrow(A-C)(2A+C)=0\Leftrightarrow A=C$ hoặc $2A=-C$.

Nếu $A=C$ ta có thể chọn $A=C=1$, khi đó $B=2$, tức là $\vec{n}=(1;2;1)$ và $mp(\alpha)$ có phương trình $x+2(y-2)+z=0$ hay $x+2y+z-4=0$

Nếu $2A=-C$ ta có thể chọn $A=1,C=-2$, khi đó $B=-1$, tức là $\vec{n}=(1;-1;-2)$ và $mp(\alpha)$ có phương trình $x-(y-2)-2z=0$ hay $x-y-2z+2=0$

Thí dụ 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):ax+by+cz-1=0$ $(a^2+b^2\neq0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) biết (P) đi qua đường thẳng d và tạo với các trục Oy, Oz các góc bằng nhau.

Giải:

Đường thẳng d qua $M(0;2;1)$ có vtcp $\vec{u}=(1;-1;-1)$

Giả sử mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(a;b;c)$

Vì $d\subset(P)\Rightarrow\vec{n}.\vec{v}=0\Leftrightarrow a-b-c=0\Leftrightarrow a=b+c$

Theo giả thiết

$\widehat{(Oy,(P))}=\widehat{(Oz,(P))}\Leftrightarrow|\cos(\vec{j},\vec{n})|=|\cos(\vec{k},\vec{n})|\Leftrightarrow|b|=|c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=c\neq0\\ b=-c\neq0\end{array}\right.$

Nếu $b=c=1$ thì $a=2$ suy ra $(P_1):2x+y+z-1=0$ (loại vì $M\notin(P_1)$)

Nếu $b=-c=-1$ thì $a=0$ suy ra $(P_2):y-z-1=0$ (thỏa mãn)

Vậy (P) có phương trình $y-z-1=0$

Thí dụ 17: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P):5x-2y+5z-1=0$ và $(Q):x-4y-8z+12=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O, vuông góc với mặt phẳng (P) và tạo với mặt phẳng (Q) một góc 45^0

Giải:

Mặt phẳng (P) và (Q) có các VTPT lần lượt là: $\overline{n_1}=(5;-2;5),\overline{n_2}=(1;-4;-8)$

Mặt phẳng (R) cần lập phương trình có 1 VTPT là: $\overline{n_3}=(a;b;c),a^2+b^2+c^2>0$

Theo giả thiết: $(P)\perp(R)\Leftrightarrow\overline{n_1}\perp\overline{n_3}\Leftrightarrow5a-2b+5c=0$ (1)

Góc giữa (Q) và (R) bằng 45^0 nên:

$$\frac{|a-4b-8c|}{9\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow2|a-4b-8c|=9\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $7a^2+6ac-c^2=0\Leftrightarrow a=-c;c=7a$, do $a^2+b^2+c^2>0$

Với $a=-c$, chọn $a=1\Leftrightarrow c=-1$ và $b=0\Rightarrow(\alpha):x-z=0$

Với $c=7a$, chọn $a=1\Rightarrow c=7$ và $b=20\Rightarrow(\alpha):x+20y+7z=0$

Thí dụ 18: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\\ z=1\end{cases}$ và điểm $A(-1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 3.

Giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-1;1)$ và có vtcp $\vec{u}=(1;2;0)$.

Gọi $\vec{n}=(a,b,c)$ là vtpt của (P) với $a^2+b^2+c^2\neq0$.

Do (P) chứa (d) nên: $\vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow a+2b=0\Leftrightarrow a=-2b$ (1)

Phương trình (P) có dạng:

$$a(x-0)+b(y+1)+c(z-1)=0\Leftrightarrow ax+by+cz+b-c=0\qquad(2)$$

Theo giả thiết

$$d\left(A,(P)\right)=3\Leftrightarrow\frac{\left|-a+3b+2c\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3\Leftrightarrow\frac{\left|5b+2c\right|}{\sqrt{5b^2+c^2}}=3\Leftrightarrow\left|5b+2c\right|=3\sqrt{5b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow 4b^2-4bc+c^2=0\Leftrightarrow(2b-c)^2=0\Leftrightarrow c=2b$$

Do $b\neq 0$ nên thay (1), (3) vào (2) ta được phương trình

$$-2bx+by+2bz-b=0\Leftrightarrow 2x-y-2z+1=0$$

Vậy phương trình (P) là: $2x-y-2z+1=0$.

Thí dụ 19: Trong không gian Oxyz cho (P) và (Q) lần lượt có phương trình: $x+y-z-1=0$; $2x-y-2z+3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua A(1;0;0) vuông góc với (P) và tạo với (Q) một góc 60^0

Giải:

Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là vtpt của (R); $\vec{n}=(1;1;-1)$ là vtpt của (P); $\vec{v}=(2;-1;-2)$ là vtpt của (Q)

Theo giả thiết (R) vuông góc (P) và tạo (Q) một góc 60^0 nên:

$$\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ \cos 60^0=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=a+b\\ 3\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\left|2a-b-2c\right|\end{cases}$$

Suy ra: $3\sqrt{2a^2+2b^2+2ab}=6\left|b\right|\Leftrightarrow a^2+ab-b^2=0$

Chọn b = 2 ta được $a=-1\pm\sqrt{5}$

- Nếu $a=-1-\sqrt{5}$; $b=2$; $c=1-\sqrt{5}\Rightarrow(R):(-1-\sqrt{5})x+2y+(1-\sqrt{5})z+1+\sqrt{5}=0$
- Nếu $a=-1+\sqrt{5}$; $b=2$; $c=1+\sqrt{5}\Rightarrow(R):(-1+\sqrt{5})x+2y+(1+\sqrt{5})z+1-\sqrt{5}=0$

Thí dụ 20: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và $\Delta:\dfrac{x-6}{-3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua M(4; 3; 4) song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (*S*).

Giải:

Gọi $\overrightarrow{n_P}=(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là vtpt của (*P*).

Khi đó $(P):a(x-4)+b(y-3)+c(z-4)=0$.

Vì $(P)//\Delta$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_\Delta}$, trong đó $\overrightarrow{u_\Delta}=(-3;2;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Suy ra $-3a+2b+2c=0\Leftrightarrow a=\dfrac{2b+2c}{3}$ (1)

Mặt khác, (*P*) tiếp xúc với mặt cầu (*S*) nên $d(I,(P))=R$, trong đó I(1; 2; 3), R = 3 lần lượt là tâm và bán kính của (*S*).

Do đó $\dfrac{\left|-3a-b-c\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $(b+c)^2=\left(\dfrac{2b+2c}{3}\right)^2+b^2+c^2\Leftrightarrow 2b^2-5bc+2c^2=0$ (3)

Với $c=0\Rightarrow b=a=0$ (ktm)*

Với $c\neq 0$, ta có (3) $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-5\dfrac{b}{c}+2=0\Leftrightarrow\dfrac{b}{c}=2$ hoặc $\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$.

Với $\dfrac{b}{c}=2$ ta chọn $b=2$, $c=1\Rightarrow a=2$. Khi đó $(P):2x+2y+z-18=0$, (loại) vì chứa Δ.

Với $\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$ ta chọn $b=1$, $c=2\Rightarrow a=2$. Khi đó $(P):2x+y+2z-19=0$, thỏa mãn.

Vậy mặt phẳng cần tìm là: $(P):2x+y+2z-19=0$

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng liên quan tới cực trị

Dạng bài toán này khá mới và cũng gây không ít khó khăn cho các bạn học sinh, để làm tốt dạng này nên chú ý tính chất đường cao và hình chiếu, đôi khi kết hợp cả với đạo hàm, tam thức bậc hai, bất đẳng thức ...

DỤ MINH HỌA

dụ 1: Trong không gian với toạ độ Oxyz, cho điểm A(2;5;3) và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Giải:

ch 1: (Phương pháp đại số)

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_P=(A;B;C)$

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;0)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$

Vì (P) chứa d $\Rightarrow M\in(P)\Rightarrow A+2C+D=0$ (1)

và $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2A+B+2C=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases}C=-\dfrac{2A+B}{2}\\ D=A+B\end{cases}$

Suy ra mặt phẳng $(P):2Ax+2By-(2A+B)z+2A+2B=0$

1: $B=0$ thì $(P):2Ax-2Az+2A=0\Leftrightarrow x-z+1=0$ (vì $A\neq 0$)

Khi đó $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{\left|2-3+1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=0$ (loại)

TH 2: $B \neq 0$. Chọn $B = 1$ thì $(P): 2Ax + 2y - (2A+1)z + 2A + 2 = 0$

Khi đó

$$d(A,(P)) = \frac{|4A + 10 - 6A - 3 + 2A + 2|}{\sqrt{8A^2 + 4A + 5}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{8A^2 + 4A + 5}} = \frac{9}{\sqrt{2\left(2A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}} \leq \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$$

Vậy $d(A,(P))_{Max} \Leftrightarrow 2A + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}$

Với $A = -\frac{1}{4}, B = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}, D = \frac{3}{4} \Rightarrow (P): x - 4y + z - 3 = 0$

Cách 2: (Phương pháp hình học)

Gọi K là hình chiếu của A lên $(\alpha) \Rightarrow d(A,(\alpha)) = AK$. H là hình chiếu của A trên đường thẳng d

Theo tính chất đoạn vuông góc và đoạn xiên ta có nên $AH \geq AK$, ta có $AK_{max} \Leftrightarrow K \equiv H$

Do đó mặt phẳng (α) thỏa mãn khoảng cách từ A đến (α) là lớn nhất khi và chỉ khi (α) vuông góc với đường thẳng AH tại H

Ta có H là hình chiếu của A lên $d \Rightarrow H(1+2t; t; 2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-1; t-5; 2t-1)$

$\overrightarrow{u_d} = (2;1;2)$ mà $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow 2(2t-1) + t - 5 + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3;1;4)$

Vậy: Mặt phẳng (α) đi qua điểm *H* nhận vectơ $\overrightarrow{AH} = (1;-4;1)$ làm vtpt nên có phương trình là $(x-3) - 4(y-1) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0$.

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *M*, *N* sao cho khoảng cách từ $K(0;0;2)$ đến (*P*) đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng : $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và N nên ta có

$$\begin{cases} A.0 + B.(-1) + C.2 + D = 0 \quad (1) \\ A.(-1) + B.1 + C.3 + D = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta được $A = (2B + C), D = B - 2C$

$\Rightarrow (P): (2B + C)x + By + Cz + B - 2C = 0$

Khoảng cách từ K đến mp(P) là: $d(K,(P)) = \dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2 + 2C^2 + 4BC}}$

TH 1: Nếu $B = 0$ thì $d(K,(P)) = 0$ (loại)

2: Nếu $B \neq 0$ thì $d(K,(P)) = \dfrac{|B|}{\sqrt{4B^2 + 2C^2 + 4BC}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\frac{C}{B} + 1\right)^2 + 2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Dấu "=" xảy ra khi $B = -C$. Chọn $C = 1$ và $B = -1$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$

ú ý:

Cũng có thể dùng khảo sát hàm số tìm Max với **TH 2**

dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt có phương trình: $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và $d: \frac{x+1}{2} = y + 1 = z - 3$.

Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất

Giải:

Giả sử mặt phẳng (Q) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0 \; (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Chọn hai điểm $M(-1;-1;3), N(1;0;4) \in d$

Mặt phẳng (Q) chứa d nên

$$M,N \in (Q) \Rightarrow \begin{cases} A.(-1) + B.(-1) + C.3 + D = 0 \\ A.1 + B.0 + C.4 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1A - B \\ D = 7A + 4B \end{cases}$$

Suy ra mặt phẳng có phương trình là $Ax + By + (-2A - B)z + 7A + 4B = 0$ và có vtpt $\overrightarrow{n_Q} = (A; B; -2A - B)$

Mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P} = (1;2;-1)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (*P*) và (Q) ta có: $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \dfrac{|A + B|}{\sqrt{5A^2 + 2B^2 + 4AB}}$. Xét hai trường hợp

1: $A = 0$ khi đó $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \dfrac{|B|}{\sqrt{2B^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

2: $A \neq 0$ khi đó $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \dfrac{\left|1 + \frac{B}{A}\right|}{\sqrt{5 + 2\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 4\frac{B}{A}}}$. Đặt $x = \dfrac{B}{A}$ và $f(x) = \cos^2\alpha$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{9}{6} \cdot \dfrac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{5 + 2x^2 + 4x}}$, khảo sát hàm số này ta thấy

$\text{Min} f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} > \dfrac{\pi}{6}$

Vậy chỉ có **TH 1** thỏa mãn, tức là $A = 0$, chọn $B = 1 \Rightarrow C = 1, D = 4$

$\Rightarrow (P): y - z + 4 = 0$

ý: Ta có thể xét trường hợp $B = 0$, $B \neq 0$ hoặc $A + B = 0$, $A + B \neq 0$

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2-3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Thí dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(10;2;-1)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=1+3t\end{cases}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với Δ và khoảng cách từ Δ tới (P) là lớn nhất.

Giải:

Gọi *H* là hình chiếu của A trên Δ. Mặt phẳng (*P*) đi qua A và $(P)//\Delta$

Khi đó $d(\Delta,(P))=d(H,(P))=HI$ với *I* là hình chiếu của *H* lên (*P*)

Ta có $AH\ge HI\Rightarrow$ *HI* lớn nhất khi $A\equiv I$

Vậy (*P*) cần tìm là mặt phẳng đi qua A và nhận $\overline{AH}$ làm véc tơ pháp tuyến.

$H\in d\Rightarrow H(1+2t;t;1+3t)$ vì *H* là hình chiếu của *A* trên Δ nên

$AH\perp d\Leftrightarrow \overline{AH}.\bar{u}=0$ ($\bar{u}=(2;1;3)$ là véc tơ chỉ phương của Δ)

$\Rightarrow H(3;1;4)\Rightarrow \overline{AH}=(-7;-1;5)$

Vậy $(P):7(x-10)+(y-2)-5(z+1)=0\Leftrightarrow 7x+y-5z-77=0$

Thí dụ 5: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14$ và điểm $M(-1;-3;-2)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua sao cho (P) cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Giải:

Ta thấy M thuộc miền trong của (S) và (S) có tâm $I(-1;-2;-3),R=\sqrt{14}$.

Do đó, (P) qua M cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{R^2-IH^2}$ nhỏ nhất (H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P)) $\Leftrightarrow$ IH lớn nhất $\Leftrightarrow M\equiv H\Leftrightarrow \overline{IM}=(0;1;-1)$ là vtpt của (P).

Vậy (P) có phương trình là $y-z+1=0$.

Thí dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với d_1, cắt trục Oz và d_2 theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

Do mặt phẳng (*P*) vuông góc với d, nên có phương trình $2x-y+z+c=0$

Mặt phẳng (*P*) cắt Oz tại $A(0;0;-c)$, cắt d' tại $B(1-c;-2c;-2-c)$

Theo giả thiết

$$AB^2=5c^2-2c+5=5\left(c-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{124}{25}\ge\frac{124}{25}\Rightarrow AB_{min}=\frac{124}{25}\Leftrightarrow c=\frac{1}{5}$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(P):2x-y+z+\frac{1}{5}=0$

Thí dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$; $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mp$(Q):x+y-2z+3=0$ cắt d_1,d_2 theo đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

Vì (P) song song với mặt phẳng đã cho nên phương trình mặt phẳng $(P):x+y-2z+d=0$.

Tọa độ giao điểm *M* của $(P)\cap d_1$ là

$$\begin{cases}x+y-2z+d=0\\\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}=t\end{cases}\Rightarrow t=-d\Rightarrow M(-2d+1;-d-1;-d)$$

Tọa độ giao điểm *N* của $(P)\cap d_2$ là

$$\begin{cases}x+y-2z+d=0\\\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}=t'\end{cases}\Rightarrow t'=-d-3\Rightarrow N(-d-2;-2d-4;-d-3)$$

Ta có $MN=\sqrt{2d^2+27}\ge\sqrt{27}$. Do đó *MN* nhỏ nhất bằng $\sqrt{27}\Leftrightarrow d=0$

Với $d=0\Rightarrow M(-1;1;0),N(-2;-4;-3)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):\ x+y-2z=0$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;2;-1),B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm *A*, *B* và tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $I(-2;-1;0)$, bán kính $R=1$.

Bài 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD biết $A(1;2;1),B(-2;1;3),C(2;-1;1)$, $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) gấp 2 lần khoảng cách từ D đến (P).

Bài 3: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua $M(4;3;4)$, song song với đường thẳng Δ và tiếp xúc với mặt cầu (*S*).

Bài 4: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ và mặt phẳng $(P):x+z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(3;1-1)$ vuông góc với mặt phẳng (*P*) và tiếp xúc với mặt cầu *(S)*.

Bài 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz; cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$; hai điểm $M(0,-2,-1)$ và $N(1,0,-3)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và cắt mặt cầu (S) tại duy nhất một điểm.

BỒI DƯỠNG TOÁN - LÝ - HÓA CẤP 2+3 1000B TRẦN HƯNG ĐẠO TP.QUY NHƠN

Bài 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) chứa *d* và tạo với Δ một góc 30^0.

Bài 7: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm *A*(13; –1; 0), *B*(2; 1; –2), *C*(1; 2; 2) và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua *A*, song song với *BC* và tiếp xúc mặt cầu (*S*).

Bài 8: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$; $(P): 2x+2y-z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Bài 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=1\end{cases};\ d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{2}.$$

Viết phương trình mp(P) song song với d_1 và d_2, sao cho **khoảng cách từ d_1** đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ d_2 đến (P).

Bài 10: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z-2=0$; $(P): 2x+2y-z+5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Bài 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz; cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ và đường thẳng $(d):\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Bài 12: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1:\begin{cases}x=2t\\ y=1-t\ (t\in R)\\ z=t\end{cases},\ \Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$$

. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S), biết tiếp diện đó song song với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Bài 13: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm $B(0;3;0), M(4;0;-3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa B, M và cắt các trục Ox, Oz lần lượt tại các điểm A và C sao cho thể tích khối tứ diện OABC bằng 3 (O là gốc toạ độ).

Bài 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$ và $(Q): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(-2;1;0)$, song song với đường thẳng $d=(P)\cap(Q)$ và tạo với trục Oz góc 30^0.

ài 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình:

$$d_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=2+t\\ z=3-t\end{cases}\qquad d_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{5}$$

Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2?

ài 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$. Lập phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$ và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính bằng 2

ài 17: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(0;2;0) và hai đường thẳng

$$\Delta_1:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\ \ (t\in\mathbb{R});\\ z=-1+t\end{cases}\qquad \Delta_2:\begin{cases}x=3+2s\\ y=-1-2s\ \ (s\in\mathbb{R}).\\ z=s,\end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M song song với trục Ox, sao cho (P) cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B thoả mãn AB = 1.

ài 18: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (*P*) đi qua hai điểm $M(3;0;1), N(6;-2;1)$ và (*P*) tạo với mặt phẳng (*Oyz*) một góc φ thỏa mãn $\sin\varphi=\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

ài 19: Trong không gian Oxyz, cho 4 điểm A(1; 2; 3), B(–2; 2; –3), C(1; 1; –5), D(3; –1; –2) và một điểm M thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình mặt phẳng (ABM) biết thể tích khối tứ diện M.ABC gấp hai lần thể tích khối tứ diện M.ABD.

ài 20: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+2y-z+1=0$ và điểm A(1;1;2). Gọi d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Oyz). Lập phương trình mặt phẳng (α) qua d và cách A một khoảng bằng 1.

ài 21: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(-2;2;-2), B(0;1;-2)$ và $C(2;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với BC và cắt các trục $y'Oy$, $z'Oz$ theo thứ tự tại M, N khác gốc tọa độ O sao cho OM = 2ON.

22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z-4=0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với $(Q): x+2y-2z+2013=0$ và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có đường kính bằng 4.

ài 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;1;1), B(0;2;2) và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$

a. Trong mặt phẳng (OAB), tìm tọa độ trực tâm của tam giác OAB.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với đường thẳng d một góc 30^0.

Bài 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua O, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 5x-2y+5z=0$ và tạo với mặt phẳng $(R):\ x-4y-8z+6=0$ góc 45°.

Bài 25: Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho điểm $A(2;0;0)$, $H(1;1;1)$ viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điêm A, H sao cho mp (P) cắt trục Oy, Oz lần lượt tại B, C thỏa mãn diện tích tam giác ABC bằng $4\sqrt{6}$

Bài 26: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A(-1;0;1)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;2;3)$.

Bài 27: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$. Một mặt phẳng (Q) chứa d và cắt (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ cách gốc tọa độ O một khoảng ngắn nhất. Viết phương trình của mặt phẳng (Q).

Bài 28: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho các điểm A(0; 0; 2), B(3; 0; 5), C(1; 1; 0),D(5; 1; 2). Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A,B đồng thời cách đều hai điểm C và D

Bài 29: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x+2y-z+5=0$ và mặt cầu $(S): (x+4)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=15$. Viết phương trình mặt phẳng(Q) đi qua A(1; 0; –4), vuông góc với (P) đồng thời cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 4π.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Giả sử mặt phẳng (α) có 1 vtpt là $\vec{n}=(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$

Vì $A\in(\alpha)\Rightarrow pt(\alpha): a(x-1)+b(y-2)+c(z+1)=0$

Vì $B\in(\alpha)\Rightarrow c=0\Rightarrow pt(\alpha): ax+by-a-2b=0$

Vì (α) tiếp xúc với mặt cầu tâm $I(-2;-1;0)$, bán kính R = 1

$$\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R\Leftrightarrow \frac{|3a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\Leftrightarrow 4a^2+9ab+4b^2=0 \quad (1)$$

Nếu $b=0\Rightarrow a=0$ (loại)

Nếu $b\neq 0\Rightarrow (1)\Leftrightarrow 4\dfrac{a^2}{b^2}+9\dfrac{a}{b}+4=0\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{-9\pm\sqrt{17}}{8}$

Với $\dfrac{a}{b}=\dfrac{-9+\sqrt{17}}{8}\Rightarrow(\alpha): (-9+\sqrt{17})x+8y-7-\sqrt{17}=0$

Với $\dfrac{a}{b}=\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}\Rightarrow(\alpha): (-9-\sqrt{17})x+8y-7+\sqrt{17}=0$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn như trên

i 2:

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là vtpt của mặt phẳng(P)

Do (P) chứa A, B nên $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow -3a-b+2c=0\Leftrightarrow b=2c-3a$

Phương trình (P) đi qua điểm A và có vtpt $\vec{n}=(a;2c-3a;c)$ nên có phương trình

$\Leftrightarrow a(x-1)+(2c-3a)(y-2)+c(z-1)=0\Leftrightarrow ax+(2c-3a)y+cz+5a-5c=0$

Ta có

$$d(C,(P))=\frac{|10a-6c|}{\sqrt{a^2+(2c-3a)^2+c^2}};\ d(D,(P))=\frac{|-4a+2c|}{\sqrt{a^2+(2c-3a)^2+c^2}}$$

Theo giả thiết: $d(C,(P))=2d(D,(P))\Leftrightarrow|10a-6c|=2|-4a+2c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9a=5c\\a=c\end{array}\right.$

Với 9a = 5c chọn $a=5, c=9\Rightarrow(P): 5x+3y+9c-20=0$

Với a = c chọn $a=c=1\Rightarrow(P): x-y+z=0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P): 5x+3y+9c-20=0$ hoặc $(P): x-y+z=0$

i 3:

Gọi $\overrightarrow{n_P}=(a;\ b;\ c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là vectơ pháp tuyến của (*P*). Khi đó

$(P): a(x-4)+b(y-3)+c(z-4)=0$.

Vì $(P)//\Delta$ nên $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_\Delta}$, trong đó $\overrightarrow{u_\Delta}(-3;\ 2;\ 2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Suy ra: $-3a+2b+2c=0\Leftrightarrow a=\dfrac{2b+2c}{3}$ (1)

Mặt khác, (*P*) tiếp xúc với mặt cầu (*S*) nên $d(I,(P))=R$, trong đó $I(1;\ 2;\ 3)$, $R=3$ lần lượt là tâm và bán kính của (*S*).

Do đó $\dfrac{|-3a-b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $(b+c)^2=\left(\dfrac{2b+2c}{3}\right)^2+b^2+c^2\Leftrightarrow 2b^2-5bc+2c^2=0$ (3)

Với $c=0\Rightarrow b=a=0$ (loại)

Với $c\neq 0$, ta có $(3)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{b}{c}\right)^2-5\dfrac{b}{c}+2=0\Leftrightarrow\dfrac{b}{c}=2$ hoặc $\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$.

Với $\dfrac{b}{c}=2$, ta chọn $b=2, c=1\Rightarrow a=2$. Khi đó $(P): 2x+2y+z-18=0$, không thỏa mãn vì chứa Δ.

Với $\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{2}$, ta chọn $b=1, c=2\Rightarrow a=2$. Khi đó $(P): 2x+y+2z-19=0$, thỏa mãn.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(P): 2x+y+2z-19=0$

Bài 4:

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;0)$ và bán kính $R = 3$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_P = (1;0;1)$

Mặt phẳng (Q) đi qua M có dạng

$A(x-3)+B(y-1)+C(z+1)=0$ $\left(A^2+B^2+C^2 \neq 0\right)$ với VTPT là $\vec{n}_Q = (A;B;C)$

Do (Q) tiếp xúc với (S), suy ra

$$d(I,(Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|-4A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 3 \Leftrightarrow |-4A+B+C| = 3\sqrt{A^2+B^2+C^2} \quad (*)$$

Mặt khác $(Q) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_Q.\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow A+C=0 \Leftrightarrow C=-A$

Thay vào (*) ta được $|B-5A| = 3\sqrt{2A^2+B^2} \Leftrightarrow 8B^2-7A^2+10AB=0$ (**)

Chọn $B=1$, (**) $\Leftrightarrow 7A^2-10A-8=0 \Leftrightarrow A=2$ hoặc $A=\frac{-4}{7}$

Với $A=2 \Rightarrow C=-2$: được phương trình mặt phẳng (Q) là: $2x+y-2z-9=0$

Với $A=\frac{-4}{7} \Rightarrow C=\frac{4}{7}$: được phương trình mặt phẳng (Q) là:

$4x-7y-4z-9=0$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x+y-2z-9=0$ hoặc

$4x-7y-4z-9=0$.

Bài 5:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=3$.

Giả sử (P) có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P} = (a,b,c), a^2+b^2+c^2 \neq 0$.

Do (P) đi qua điểm M nên phương trình (P): $ax+b(y+2)+c(z+1)=0$

Mặt khác (P) đi qua điểm N suy ra $a+2b-2c=0 \Rightarrow a=2c-2b$.

Mặt phẳng (P) cắt (S) tại đúng một điểm khi và chỉ khi (P) tiếp xúc với (S)

$\Leftrightarrow d(I,(P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+3b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|b+4c|}{\sqrt{(2c-2b)^2+b^2+c^2}} = 3 \Leftrightarrow 44b^2-80bc+29c^2=0$$

$\Leftrightarrow (2b-c)(22b-29c)=0 \Leftrightarrow 2b=c; 22b=29c$

+ Nếu $2b-c=0$, chọn $b=1, c=2 \Rightarrow a=2 \Rightarrow (P): 2x+y+2z+4=0$

+ Nếu $22b=29c$, chọn $b=29, c=22 \Rightarrow a=-14 \Rightarrow (P): -14x+29y+22z+80=0$

Vậy mặt phẳng thỏa mãn

Bài 6:

(*P*) chứa *d* $\Rightarrow$ (P) đi qua $M(2;-1;-1) \Rightarrow$ phương (*P*) có dạng

$Ax+By+Cz-2A+B+C=0$ $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$.

$d \subset (P) \Rightarrow \vec{u}_d.\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow A+B-C=0$ (1)

Theo giả thiết $\angle(\Delta;(P)) = 30^\circ \Leftrightarrow \sin(\Delta;(P)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|A+B+2C|}{\sqrt{6}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(A+B+2C)^2 = 3(A^2+B^2+C^2)$. (2)

Từ (1) có $C=A+B$ thay vào (2): $2A^2+5AB+2B^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=-2B \\ A=-\frac{B}{2} \end{array}\right.$

- Khi $A=-2B$. Chọn $B=-1, A=2, C=1 \Rightarrow (P): 2x-y+z-4=0$.
- Khi $A=-\frac{B}{2}$. Chọn $B=-2, A=1, C=-1 \Rightarrow (P): x-2y-z-5=0$.

Bài 7:

Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;3) và bán kính R = 9

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n} = (A;B;C)$, $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$

(P) // BC nên $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC} = (-1;1;4) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow A=B+4C \Rightarrow \vec{n} = (B+4C;B;C)$

(P) đi qua $A(13;-1;0) \Rightarrow$ phương trình (P): $(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d[I,(P)] = R \Leftrightarrow \frac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}} = 9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C=0 \Leftrightarrow (B+2C)(B-4C)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B+2C=0 \\ B-4C=0 \end{array}\right.$

Với B + 2C = 0 chọn $\begin{cases} B=2 \\ C=-1 \end{cases}$, ta được phương trình (P): $-2x+2y-z+28=0$

Với B – 4C = 0 chọn $\begin{cases} B=4 \\ C=1 \end{cases}$, ta được phương trình (P): $8x+4y+z-100=0$

Cả hai mặt phẳng (P) tìm được ở trên đều thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 8:

Phương trình mặt cầu $(S) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = 3^2$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$

Do mặt phẳng (Q) song song với mp (P) nên có phương trình dạng:

$2x+2y-z+D=0$ $(D \neq 5)$

Do (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I,(Q)) = R = 3 \Leftrightarrow |D-1| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=10 \\ D=-8 \end{array}\right.$

Vậy (Q) có phương trình: $2x+2y-z+10=0$ hoặc $2x+2y-z-8=0$

Bài 9:

Ta có : d_1 đi qua điểm A(1;2;1) và vtcp là : $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;0)$

d_2 đi qua điểm $B(2;1;-1)$ và vtcp là: $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;2)$

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mp(P), vì (P) song song với d_1 và d_2 nên

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (-2;-2;-1) \Rightarrow$ phương trình mp(P) : $2x+2y+z+m=0$

$d\left(d_1;(P)\right) = d\left(A;(P)\right) = \dfrac{|7+m|}{3}$; $d\left(d_2;(P)\right) = d\left(B;(P)\right) = \dfrac{|5+m|}{3}$

vì $d\left(d_1;(P)\right) = 2.\,d\left(d_2;(P)\right) \Leftrightarrow |7+m| = 2.|5+m|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7+m=2(5+m) \\ 7+m=-2(5+m) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-\dfrac{17}{3} \end{array}\right.$$

Với $m=-3 \Rightarrow$ mp(P) : $2x+2y+z-3=0$

Với $m=-\dfrac{17}{3} \Rightarrow$ mp(P) : $2x+2y+z-\dfrac{17}{3}=0$

Bài 10:

Mặt cầu (S) $\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4^2$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;\ 2;3)$ và bán kính $R = 4$

Do mặt phẳng (Q) song song với mp (P) nên có phương trình dạng:

$2x-2y+z+D=0 \quad (D \neq -5)$

Vì (Q) cắt mặt cầu theo một đường tròn có bán kính đúng bằng R = 4 nên mặt phẳng (Q) đi qua tâm $I(-1;\ 2;3)$ suy ra D = 3

Vậy (Q) có phương trình: $2x-2y+z+3=0$

Bài 11:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=3$.

Gọi K là hình chiếu của I lên (P), H là hình chiếu của I lên d và r là bán kính đường tròn là giao của (P) với (S). Khi đó ta có $r=\sqrt{R^2-IK^2} \geq \sqrt{R^2-IH^2}$

Dấu bằng xảy ra khi $K \equiv H$, từ đó suy ra để (P) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì (P) phải vuông góc với IH.

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=3+t \\ y=3+t \\ z=2+2t \end{cases} \Rightarrow H(3+t,3+t,2+2t)$.

Do IH vuông góc với d nên ta có

$\overline{IH}.\overline{u_d}=0 \Leftrightarrow 2+t+2+t+2+4t=0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(2,2,0)$.

Do (P) vuông góc IH nên (P) nhận $\overline{IH}=(1,1,-1)$ và đi qua $H(2,2,0)$ có phương trình là: (P) : $1(x-2)+1.(y-2)-1.(z-0)=0 \Leftrightarrow x+y-z-4=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $x+y-z-4=0$

Bài 12:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;-2), R=3$

Δ_1, Δ_2 lần lượt có các véctơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;1), \vec{v}=(1;-1;1)$

mp(P) có véctơ pháp tuyến $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(0;-1;-1) \Rightarrow (P): y+z+m=0 \ (m \in \mathbb{R})$

$$d\left(I,(P)\right)=R \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{2}}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3\sqrt{2}+3 \\ m=3-3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy $(P_1): y+z+3+3\sqrt{2}=0; (P_2): y+z+3-3\sqrt{2}=0$

Bài 13:

Gọi a, c lần lượt là hoành độ, cao độ của các điểm A, C.

Vì $B(0;3;0) \in Oy$ nên $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{c}=1$.

Điểm $M(4;0;-3) \in (P) \Rightarrow \dfrac{4}{a}-\dfrac{3}{c}=1 \Leftrightarrow 4c-3a=ac$ (1)

Theo giả thiết $V_{OABC}=\dfrac{1}{3}OB.S_{\Delta OAC}=\dfrac{1}{3}.3.\dfrac{1}{2}|ac|=\dfrac{|ac|}{2}=3 \Leftrightarrow |ac|=6$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} ac=6 \\ 4c-3a=6 \end{cases} \vee \begin{cases} ac=-6 \\ 4c-3a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ c=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ c=3 \end{cases}$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $(P_1): \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{2z}{3}=1; (P_2): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$

Bài 14:

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d: $\overline{u_d}=(1;-2;-3)$

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ (với $a^2+b^2+c^2 \neq 0$) là vectơ pháp tuyến của (α)

vì $d//(\alpha) \Rightarrow \overline{n}.\overline{u_d}=0 \Leftrightarrow a-2b-3c=0 \Leftrightarrow a=2b+3c$

Ta có $\sin((\alpha),Oz)=\sin 30^0=\left|\cos(\vec{n},\overline{u_d})\right|$

$\Leftrightarrow 3c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3c^2=(2b+3c)^2+b^2$

$$\Leftrightarrow 5b^2+12bc+6c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-6-\sqrt{6}}{5}c \\ b=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{5}c \end{array}\right.$$

Với $b=\dfrac{-6-\sqrt{6}}{5}c \Rightarrow a=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{5}c$ chọn $a=3-2\sqrt{6}; b=-6-\sqrt{6}; c=5$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là: $(3-2\sqrt{6})x-(6+\sqrt{6})y+5z+12-3\sqrt{6}=0$

Với $b=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{5}c \Rightarrow a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{5}c$ chọn $a=3+2\sqrt{6}; b=-6+\sqrt{6}; c=5$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) là: $(3+2\sqrt{6})x+(-6+\sqrt{6})y+5c+12+3\sqrt{6}=0$

Bài 15:

Đường thẳng d_2 có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 2 + t' \\ z = 1 + 5t' \end{cases} \Rightarrow$ vectơ chỉ phương của d_1 và d_2 là: $\overline{u_{d_1}} = (1;1;-1), \overline{u_{d_2}} = (2;1;5)$

$\Rightarrow$ vptt của mp(α) là $\vec{n}_\alpha = \left[\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}\right] = (6;-7;-1)$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (α) có dạng $6x - 7y - z + D = 0$

Đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt đi qua 2 điểm $M(2;2;3)$ và $N(1;2;1)$

Mặt phẳng (α) cách đều d_1 và d_2

$\Rightarrow d(M,(\alpha)) = d(N,(\alpha))$

$\Leftrightarrow |12 - 14 - 3 + D| = |6 - 14 - 1 + D| \Leftrightarrow |-5 + D| = |-9 + D| \Leftrightarrow D = 7$

Vậy phương trình mp(α) là: $3x - y - 4z + 7 = 0$

Bài 16:

Mặt cầu (S) có tâm $J(1,0,-2)$ bán kính $R = 3$

+ Đường thẳng có vtcp $\vec{u} = (1,2,-2)$, (P) vuông góc với đường thẳng d nên (P) nhận $\vec{u}$ làm vtpt

Phương trình mp (P) có dạng : $x + 2y - 2z + D = 0$

+ (P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r = 2$ nên

$$d\left(J,(P)\right) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1 + 2.0 - 2.(-2) + D|}{3} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = -5 + 3\sqrt{5} \\ D = -5 - 3\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 mặt phẳng:

$(P_1): x + 2y - 2z - 5 + 3\sqrt{5} = 0$ hoặc $(P_2): x + 2y - 2z - 5 - 3\sqrt{5} = 0$

Bài 17:

Giả sử đã xác định được (P) thỏa mãn ycbt.

$A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1 + 2t; 2 - 2t; -1 + t)$; $B \in \Delta_2 \Rightarrow B(3 + 2s; -1 - 2s; s)$.

Suy ra $\overline{AB} = (2 + 2(s - t); -3 - 2(s - t); 1 + (s - t))$

$$\Rightarrow AB^2 = 9(s - t)^2 + 22(s - t) + 14 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} s - t = -1 \\ s - t = -\dfrac{13}{9}. \end{array}\right.$$

Với $s - t = -1 \Rightarrow \overline{AB} = (0;-1;0) \Rightarrow$ (P) có một vtpt $\overline{n_1} = \left[\overline{AB}; \overline{i}\right] = (0;0;1)$

suy ra $(P): z = 0$ (loại do (P) chứa trục Ox).

Với $s - t = -\dfrac{13}{9} \Rightarrow \overline{AB} = \left(\dfrac{-8}{9}; \dfrac{-1}{9}; \dfrac{-4}{9}\right)$, suy ra (P) có một vtpt

$$\overline{n_2} = \left[\overline{AB}; \overline{i}\right] = \left(0; \frac{-4}{9}; \frac{1}{9}\right)$$

Suy ra $(P): 4y - z - 8 = 0$ (thỏa mãn bài toán).

ài 18:

Gọi vtpt của (P) là $\vec{n} = (a;b;c), a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Vì $M \in (P)$ nên phương trình của (P) có dạng $a(x - 3) + by + c(z - 1) = 0$

Vì $N \in (P) \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \dfrac{3a}{2}$

$\sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{2}{7}$ (do $0 \le \varphi \le 90^0$)

Mặt phẳng (Oyz) có véctơ pháp tuyến $\vec{i} = (1;0;0)$

$$\cos\varphi = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{7} \quad (*)$$

Thế $b = \dfrac{3a}{2}$ vào (*) giải được $c = \pm 3a$

Với $c = 3a$; $b = \dfrac{3a}{2}$ chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3; c = 6$, $(P): 2x + 3y + 6z - 12 = 0$

Với $c = -3a$; $b = \dfrac{3a}{2}$ chọn $a = 2 \Rightarrow b = 3; c = -6$, $(P): 2x + 3y - 6z = 0$

ài 19:

Mặt phẳng (ABM) đi qua điểm A có phương trình dạng:

$a(x - 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

$B \in (ABM) \Leftrightarrow -3a + 0 - 6c = 0 \Leftrightarrow a = -2c$ (1)

Ta có: $V_{M.ABC} = 2V_{M.ABD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} d(C,(ABM)) \cdot S_{\Delta ABM} = \dfrac{2}{3} d(D,(ABM)) \cdot S_{\Delta ABM}$

$$\Leftrightarrow d(C,(ABM)) = 2d(D,(ABM)) \Leftrightarrow \frac{|0.a - b - 8c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2 \cdot \frac{|2a - 3b - 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\Leftrightarrow |b + 8c| = 2|2a - 3b - 5c|$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $|b + 8c| = 2|3b + 9c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = -2c \\ b = -\dfrac{26}{7}c \end{array}\right.$

Với $b = -2c$. Do $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$. Chọn $c = -1 \Rightarrow a = b = 2$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (ABM) là: $2x + 2y - z - 3 = 0$.

Với $b = -\dfrac{26}{7}c$. Do $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$. Chọn $c = -7 \Rightarrow b = 26, a = 14$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (ABM) là: $14x + 26y - 7z - 45 = 0$.

Vậy có hai mặt phẳng (ABM) thỏa mãn là

$2x + 2y - z - 3 = 0$ hoặc $14x + 26y - 7z - 45 = 0$

Bài 20:

Phương trình mp*(Oyz)*: $x = 0$ và $B(0;0;1)$, $C(0,-1;-1)$ thuộc d, phương trình mặt phẳng (α) có dạng : $ax+by+cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$. Do (α) đi qua B, C nên : $\begin{cases}c+d=0\\-b-c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-c\\b=-2c\end{cases}\Rightarrow(\alpha): ax+(-2c)y+cz-c=0$

$$d(A,\alpha)=1\Leftrightarrow\frac{|a-2c+2c-c|}{\sqrt{a^2+4c^2+c^2}}=1\Leftrightarrow|a-c|^2=a^2+5c^2\Leftrightarrow -ac=2c^2$$

Nếu $c=0$ chọn $a=1$ $\Rightarrow b=0, d=0\Rightarrow(\alpha): x=0$

Nếu $a=-2c$ chọn $c=1$ thì $a=-2, d=-1, b=-2\Rightarrow(\alpha): -2x-2y+z-1=0$

Bài 21:

Từ giả thiết ta có $M(0;m;0)$ và $N(0;0;n)$ trong đó $mn\neq 0$ và $m=\pm 2n$.

Do $(P)//BC$ và (P) đi qua M, N nên VTPT của (P) là

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}\right]=(m+n;-2n;-2m)$

TH1: $m=2n$ thì $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}\right]=(3n;-2n;-4n)$ $(n\neq 0)$.

(P) đi qua $A(-2;2;-2)$ $\Rightarrow(P): 3x-2y-4z+2=0$.

TH2: $m=-2n$ thì $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}\right]=(-n;-2n;4n)$ $(n\neq 0)$.

(P) đi qua $A(-2;2;-2)$ $\Rightarrow(P): x+2y-4z-10=0$. (loại vì $(P)\supset BC$)

Vậy $(P): 3x-2y-4z+2=0$.

Bài 22:

Mặt cầu (S) có tâm $J(1,0,-2)$ bán kính $R=3$

Ta có (P)//(Q) nên (P) có phương trình dạng : $x+2y-2z+D=0$

(P) cắt (S) theo đường tròn có bk $r=2$ nên $d\left(J,(P)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5}$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow\frac{|1+2.0-2.(-2)+D|}{3}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-5+3\sqrt{5}\\D=-5-3\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vậy có 2 mặt phẳng :

(P_1): $x+2y-2z-5+3\sqrt{5}=0$ hoặc (P_2) : $x+2y-2z-5-3\sqrt{5}=0$

Bài 23:

a. Ta có $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(1;1;1)\\\overrightarrow{OB}=(0;2;2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng $(OAB): y-z=0$

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với OB là $y+z-2=0$

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với OA là $x+y+z-4=0$

Tọa độ trực tâm của tam giác OAB là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y+z=2\\y-z=0\\x+y+z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\Rightarrow H(2;1;1)\\z=1\end{cases}$$

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là vtpt của mặt phẳng (P) ta có

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow a=b+c$ (1)

$$\sin 30^0=\frac{|a+2b-c|}{\sqrt{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}}\xleftrightarrow{(1)}\frac{|3b|}{\sqrt{12\left(b^2+bc+c^2\right)}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2-bc-c^2=0\xrightarrow[c\neq 0]{}2\left(\frac{b}{c}\right)^2-\left(\frac{b}{c}\right)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{b}{c}=1\\\frac{b}{c}=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$$

Với $\frac{b}{c}=1$, chọn $b=c=1, a=2$ ta có phương trình mặt phẳng $(P): 2x+y+z-4=0$

Với $\frac{b}{c}=\frac{-1}{2}$, chọn $b=-1, c=2, a=1$ ta có phương trình mặt phẳng $(P): x-y+2z-2=0$.

ài 24:

Mặt phẳng (P) đi qua O(0; 0; 0) nên có pt dạng :

$Ax+By+Cz=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow 5A-2B+5C=0\Leftrightarrow B=\frac{5}{2}(A+C)$ (1)

(P) tạo với (R) góc 45° nên

$$\cos 45^o=\frac{|A-4B-8C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{1+16+64}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|A-4B-8C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.9}\quad(2)$$

$$\text{Từ }(1),(2)\Rightarrow\sqrt{2}|A-10(A+C)-8C|=9\sqrt{A^2+\frac{25}{4}(A+C)^2+C^2}$$

$$\Leftrightarrow 21A^2+18AC-3C^2=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{A}{C}=-1\\\frac{A}{C}=\frac{1}{7}\end{array}\right.$$

chọn $A=-1, C=1\Rightarrow B=0\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là $x-z=0$

chọn $A=1, C=7\Rightarrow B=20\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là $x+20y+7z=0$

ài 25:

Mặt phẳng (P) cắt trục Oy tại B(0; b; 0), cắt trục Oz tại điểm C(0; 0; c)

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ điểm H thuộc mặt phẳng (P) nên : $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow 2(b+c)=bc$ (1)

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB};\overline{AC}\right]\right| \Leftrightarrow \sqrt{b^2c^2+4(b^2+c^2)}=8\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2+4(b^2+c^2)=64.6 \qquad (2)$$

Từ(1) và (2) ta có :

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}b+c=8\\ b+c=-6\end{array}\right.\\ bc=2(b+c)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b+c=8\\ bc=16\end{cases}\\ \begin{cases}b+c=-6\\ bc=-12\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=c=4\\ \begin{cases}b=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\\ c=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\end{cases} \& \begin{cases}b=\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\\ c=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Từ đó tìm được phương trình mặt phẳng (P)

Bài 26:

$\overline{AB}=(2;2;-2)$, $\overline{AC}=(0;2;2) \Rightarrow \left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=(8;-4;4)$ là vtpt của (ABC)

Phương trình (ABC): $2(x+1)-y+z-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+z+1=0$

Mặt phẳng trung trực của AB: $(P): x+y-z-1=0$.

Mặt phẳng trung trực của AC: $(Q): y+z-3=0$

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm chung của 3 mp (ABC), (P), (Q)

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x-y+z+1=0\\ x+y-z-1=0\\ y+z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=2\\ z=1\end{cases}$.

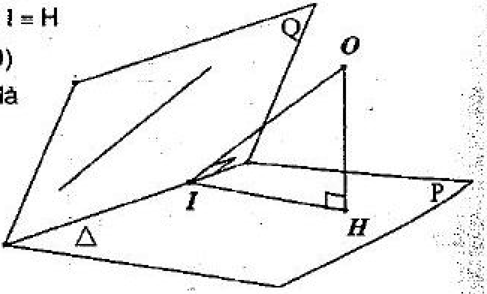
Vậy tâm $I(0;2;1)$

Bài 27:

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên (P) và Δ.

Ta có $d(O,\Delta)=OI \geq OH$ (không đổi)

Do đó $\min d(O,\Delta)=OH$ xảy ra khi $I \equiv H$



Đường thẳng OH đi qua O(0;0;0) và nhận VTPT của (P) là $\vec{n}=(1;2;1)$ làm VTCP

$$\Rightarrow OH: \begin{cases}x=t\\ y=2t\\ z=t\end{cases} \quad (1)$$

$(P): x+2y+z-6=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

Từ (1) ⇒ $H(1;2;1)$

Khi đó (Q) là mặt phẳng chứa d và đi qua H.

Ta có $M(1;1;2) \in (d)$, VTCP của d là $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\overline{HM}=(0;-1;1)$.

Suy ra VTPT của (Q) là $\overline{n_Q}=\left[\vec{u},\overline{HM}\right]=(-1;-1;-1)$, (Q) đi qua $M(1;1;2)$

Do đó $(Q): -1(x-1)-1(y-1)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+z-4=0$.

ài 28:

Mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách đều C, D là mặt phẳng song song với CD hoặc (P) đi qua trung điểm của CD

Mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với CD ⇒ (P) nhận $\overline{AB}(3;0;3)$, $\overline{CD}=(4;0;2)$ làm cặp véc tơ chỉ phương nên (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overline{AB},\overline{CD}\right]=(0;6;0)$ do đó (P) có phương trình $y=0$

Mặt phẳng (P) đi qua A, B và trung điểm I(3;1;1) của đoạn CD nên (P) nhận cặp vectơ $\overline{AB}(3;0;3)$, $\overline{AI}=(3;1;-1)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=\left[\overline{AB},\overline{AI}\right]=(-3;12;3)=3(-1;4;1)$ do đó (P): $x+4y-z+2=0$

Vậy có 2 mặt phẳng thoả mãn bài toán là: $y=0$ và $x+4y-z+2=0$

ài 29:

Mặt cầu (S) có tâm I(-4;1;1) và bán kính $R=\sqrt{15}$, $\vec{n}_P(1;2;-1)$ là véc tơ pháp tuyến của (P).

Gọi phương trình mặt phẳng (Q) qua A có dạng: A(x-1)+By+C(z+4)=0 với $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ và $\vec{n}_Q(A;B;C)$ là vtpt của (Q).

$(Q)\perp(P) \Leftrightarrow \vec{n}_Q.\vec{n}_P=0 \Leftrightarrow A+2B-C=0 \Leftrightarrow C=A+2B$ (1)

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến, ta có r = 2

Suy ra $d(I,(Q))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{15-4}=\sqrt{11}$ (2)

Mặt khác $d(I,(Q))=\dfrac{|-5A+B+5C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\dfrac{|11B|}{\sqrt{2A^2+5B^2+4AB}}=\sqrt{11} \Leftrightarrow A^2-3B^2+2AB=0$

A = 0 không thỏa mãn, chọn A = 1 ⇒ B = 1 hoặc $B=-\frac{1}{3}$.

Với A = 1; B = 1; C = 3.

Mặt phẳng (Q) có phương trình $(x-1)+y+3(z+4)=0 \Leftrightarrow x+y+3z+11=0$.

Với A = 1; $B=-\frac{1}{3}$; $C=\frac{1}{3}$.

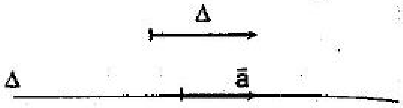
Mặt phẳng(Q) có phương trình $(x-1)-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}(z+4)=0 \Leftrightarrow 3x-y+z+1=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là $x+y+3z+11=0$ hoặc $3x-y+z+1=0$

§ 2: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng:



$\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng Δ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{u} \text{ có giá song song hoặc trùng với } \Delta \end{cases}$$

Chú ý:

- Một đường thẳng có vô số VTCP, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một đường thẳng Δ hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một VTCP của nó.

I. Phương trình của đường thẳng:

1. Phương trình tham số của đường thẳng:

Định lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a_1;a_2;a_3)$ làm vtcp là:

$$\Delta:\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Chú ý: Nếu giả thiết cho biết trước đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ ta bao giờ cũng được $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và một vtcp $\vec{u}=(a_1;a_2;a_3)$

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

Định lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{u}=(a_1;a_2;a_3)$ làm vtcp là:

$$\Delta:\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Chú ý: Nếu giả thiết cho biết trước đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$ ta bao giờ cũng được $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và một vtcp $\vec{u}=(a_1;a_2;a_3)$

3. Phương trình tổng quát của đường thẳng (tham khảo):

Trong không gian ta có thể xem đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng nào đó.

Xem $(\Delta)=\alpha\cap\beta$ với $\begin{cases} (\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ (\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ ta có định lý sau.

nh lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hệ phương trình

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \text{ với } A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$$

là phương trình tổng quát của một đường thẳng.

hú ý:

Nếu $\Delta:\begin{cases} (\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (\vec{n}_\alpha=(A_1;B_1;C_1)) \\ (\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (\vec{n}_\beta=(A_2;B_2;C_2)) \end{cases}$ thì Δ có một vtcp là :

$$\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta\right]=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

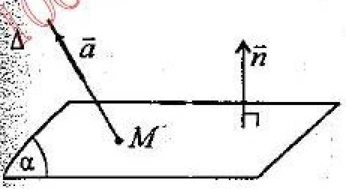
c biệt:

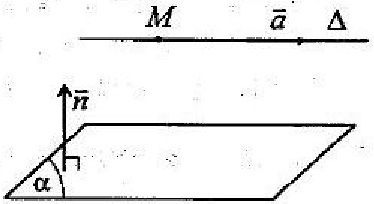
Trục Ox : $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ + Trục Oy : $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

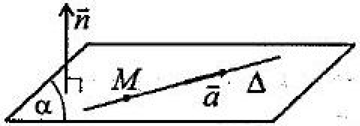
Trục Oz : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

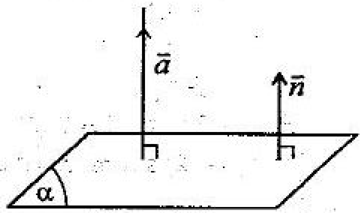






nh lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$ có vtcp $\vec{u}=(a_1;a_2;a_3)$ và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$

Khi đó:



Δ cắt $(\alpha) \Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$

$\Delta // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$

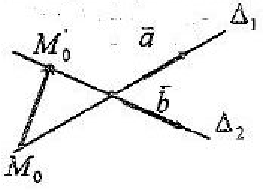
$\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

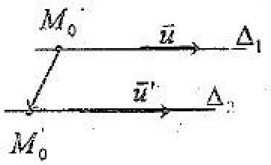
Đặc biệt: $\Delta \perp (\alpha) \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$

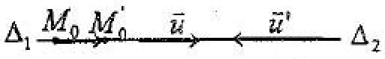
Chú ý: Muốn tìm giao điểm M của Δ và (α) ta giải hệ phương trình : $\begin{cases} pt(\Delta) \\ pt(\alpha) \end{cases}$ tìm x,y,z

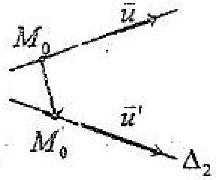
Suy ra: M(x,y,z)

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng :


M_0'
$\vec{a}$
Δ_1
$\vec{b}$
Δ_2
M_0


M_0
$\vec{u}$
Δ_1
$\vec{u}'$
Δ_2
M_0'


Δ_1
M_0
M_0'
$\vec{u}$
$\vec{u}'$
Δ_2


$\vec{u}$
M_0
$\vec{u}'$
M_0'
Δ_2

Định lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$\Delta_1 : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có vtcp $\vec{u} = (a;b;c)$ và một điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$

$\Delta_2 : \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$ có vtcp $\vec{u'} = (a';b';c')$ và một điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$

- + Δ_1 và Δ_2 cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0$
- + Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \\ a:b:c \neq a':b':c' \end{cases}$
- + $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' \neq (x_0'-x_0):(y_0'-y_0):(z_0'-z_0)$
- + $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' = (x_0'-x_0):(y_0'-y_0):(z_0'-z_0)$
- + Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

Chú ý: Muốn tìm giao điểm M của Δ_1 và Δ_2 ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$ tìm x,y,z

Suy ra: M(x,y,z)

III. Góc và khoảng cách

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

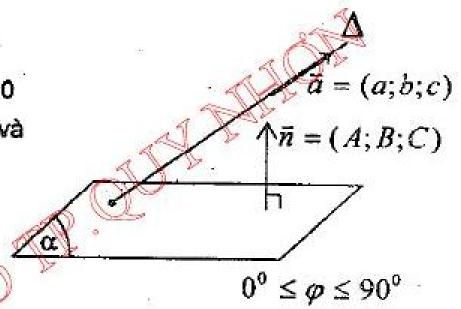
Định lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$\Delta : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

và mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng Δ và (α) ta có công thức:

$$\sin\varphi = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$


Δ
$\vec{a} = (a;b;c)$
$\vec{n} = (A;B;C)$
α
$0^0 \le \varphi \le 90^0$

óc giữa hai đường thẳng :

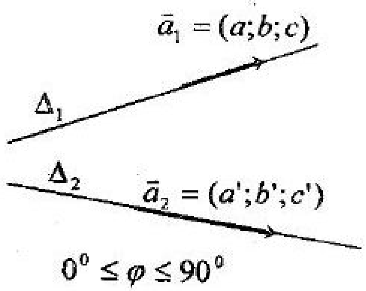
lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$\Delta_1 : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$\Delta_2 : \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng Δ_1 và Δ_2 ta có công thức:

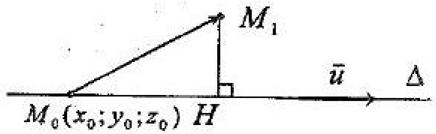
$$\cos\varphi = \frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$


$\vec{a}_1 = (a;b;c)$
Δ_1
Δ_2
$\vec{a}_2 = (a';b';c')$
$0^0 \le \varphi \le 90^0$

hoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a;b;c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_1 đến Δ ược tính bởi công thức:

$$d(M_1,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$


M_1
$\vec{u}$
Δ
$M_0(x_0;y_0;z_0)$
H

hoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

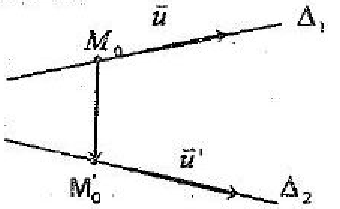
lý: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau:

có vtcp $\vec{u} = (a;b;c)$ và một điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$

có vtcp $\vec{u'} = (a';b';c')$ và một điểm $M_0'(x_0';y_0';z_0')$

i đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 ược tính bởi công thức

$$(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$$


$\vec{u}$
Δ_1
M_0
$\vec{u}'$
M_0'
Δ_2

Phần đọc thêm

Trong chương trình phổ thông hiện hành không nói về phương trình tổng quát nhưng lại nói là giao tuyến của hai mặt phẳng và một số tài liệu, sách tham khảo cũ vẫn dùng phương trình tổng quát và cách giải cũ vẫn còn để phương trình ở dạng tổng quát nhưng bây giờ lại yêu cầu viết phương trình ở dạng tham số hoặc chính tắc... Chính vì thế nếu học sinh sử dụng sách cũ hoặc phương pháp giải cũ thì sau khi tìm được phương trình ở dạng tổng quát hãy chuyển về phương trình ở dạng tham số hoặc chính tắc bằng cách sau

Chuyển phương trình tổng quát về dạng tham số

Khi giả thiết cho đường thẳng d ở dạng tổng quát $d:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$

hoặc giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha):\ a_1x+b_1y+c_1x+d_1=0$ và $(\beta):\ a_2x+b_2y+c_2x+d_2=0$

Phương pháp:

Cách 1:

Bước 1: Tìm vecto chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d

Cách 1.1: Vtcp $\vec{u}=\left[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta\right]$ với $\vec{n}_\alpha$ và $\vec{n}_\beta$ lần lượt là vtpt của (α) và (β)

Cách 1.2: Chọn hai điểm M và N phân biệt thuộc đường thẳng d, khi đó vtcp $\vec{u}$ cùng phương với vecto $\overrightarrow{MN}$ hay vecto $\overrightarrow{MN}$ chính là vtcp của d

Bước 2: Tìm một điểm bất kỳ thuộc d. Bằng cách cho một ẩn bằng 0 và giải hệ hai ẩn còn lại (tuy nhiên việc chọn ẩn nào bằng 0 là kinh nghiệm của mỗi người, thường việc chọn ẩn đó làm sao cho hai ẩn còn lại khi tính ra thường là các số nguyên, đương nhiên có thể cho một ẩn là bằng một hằng số bất kì không nhất thiết phải bằng 0)

Bước 3: Khi chọn ra một điểm và một vecto chỉ phương chúng ta được một phương trình tham số hoặc chính tắc

Giả sử điểm chọn là $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và một vtcp $\vec{u}=\overrightarrow{MN}=(a;b;c)$

$\Rightarrow$ phương trình tham số $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ với $t\in R$ là tham số

$\Rightarrow$ phương trình chính tắc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ (khi $a,b,c\neq 0$)

Với qui ước: Mẫu bằng 0 thì tử bằng 0

Cách 2: Đặt $x=t$ (hoặc $y=t$ hoặc $z=t$) tính hai ẩn còn lại theo t ta sẽ được một phương trình tham số

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x-3y+1=0\\3x-y-2z+7=0\end{cases}$. Chuyển Δ về dạng tham số

Giải:

Cách 1.1: Chọn một điểm $M(-1;0;2)\in\Delta$

và một vtcp $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(6;2;8)=2(3;1;4)$

ta được phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=-1+3t\\y=t\\z=2+4t\end{cases}$

ach 1.2: Chọn hai điểm $M(-1;0;2)$ và $N\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ thuộc Δ. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và có vtcp $\vec{u}=\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-2\right)=-\frac{1}{2}(3;1;4)$ ta được phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=-1+3t\\y=t\\z=2+4t\end{cases}$

Cách 2:

Đặt $y=t$ tính x,z theo t ta được phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=-1+3t\\y=t\\z=2+4t\end{cases}$

í dụ 2: Cho đường thẳng $d:\begin{cases}2x+4y-z-7=0\\4x+5y+z-14=0\end{cases}$. Chuyển d về dạng tham số

Giải:

Cách 1.1: Chọn một điểm $M\left(\frac{7}{2};0;0\right)\in\Delta$ và một vtcp

$\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(9;-6;-6)=3(3;-2;-2)$

ta được phương trình tham số $d:\begin{cases}x=\frac{7}{2}+3t\\y=-2t\\z=-2t\end{cases}$

ách 1.2: Chọn hai điểm $M\left(\frac{7}{2};0;0\right)$ và $N\left(0;\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$ thuộc Δ. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và có vtcp $\vec{u}=\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{6}(3;-2;-2)$ ta được phương trình tham số $d:\begin{cases}x=\frac{7}{2}+3t\\y=-2t\\z=-2t\end{cases}$

ách 2:

Đặt $y=t$ tính x,z theo t ta có $\begin{cases}2x-z=7-4t\\4x+z=14-5t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t\\z=t\end{cases}$

ta được phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$

Chuyển phương trình tham số về chính tắc và ngược lại

Từ phương trình tham số

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_0=at\\ y-y_0=bt\\ z-z_0=ct\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}$ chuyển Δ về dạng tham số

Giải:

Đặt $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}=t$ tính x,y,z theo t ta được phương trình tham số

$$\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\ y=3+4t\\ z=t\end{cases}$$

Hoặc: Nhìn vào phương trình đường thẳng Δ ta biết được một điểm $M(1;3;0)$ và một vtcp $\vec{u}=(2;4;1)$ thì được phương trình tham số Δ như trên

Chú ý:

- Khi giả thiết cho đường thẳng ở dạng chính tắc mà yêu cầu điểm thuộc đường thẳng thì chúng ta chuyển phương trình đường thẳng ở dạng chính tắc sang dạng tham số để thuận lợi cho việc tìm điểm
- Một đường thẳng có vô số vecto chỉ phương (vtcp), các vecto này sai khác nhau bởi một hằng số khác 0. Khi tìm được vecto chỉ phương mà các tọa độ có hệ số tỉ lệ nào đó thì chúng ta có quyền chọn vecto chỉ phương

Ví dụ 4: Khi tính được vecto chỉ phương là $\vec{u}=(3;-9;12)=3(1;-3;4)$ thì chúng ta có quyền chọn vecto chỉ phương là $\vec{u}=(1;-3;4)$ hoặc $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)=\frac{1}{2}(1;3;0)$ chọn $\vec{u}=(1;3;0)$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng

Để viết được một phương trình đường thẳng Δ ở dạng tham số (hoặc chính tắc) chúng ta "**Tìm một điểm và một vtcp hoặc hai điểm phân biệt bất kì thuộc đường thẳng Δ**", thường sẽ tìm được điểm dễ dàng, còn muốn tìm được vtcp các bạn phải nắm được vị trí tương đối của (đường thẳng với đường thẳng), (đường thẳng với mặt phẳng), (đường thẳng với mặt cầu). Đôi khi phải

kết hợp với giả thiết về góc, khoảng cách, diện tích, thể tích ... Để giải ẩn tìm vtcp của Δ

Thông thường vtcp cho ở hai dạng sau

Trực tiếp:

Có một vecto $\vec{u}=(a;b;c)$ cho trước

Song song với một đường thẳng d cho trước $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\vec{u}_d$

Vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\vec{n}_P$

Gián tiếp:

Có một cặp vecto chỉ phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cho trước $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

Vuông góc với hai đường thẳng *d*₁ và *d*₂ cho trước $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]$

Song song với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) cho trước $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_1,\vec{n}_2\right]$

Vuông góc với một đường thẳng *d* và song song với một mặt phẳng (*P*) $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]$

Vuông góc với một đường thẳng *d* và nằm trong mặt phẳng (*P*) $\Rightarrow\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]$

Nếu đi qua hai điểm phân biệt A và B $\Rightarrow\overline{u_\Delta}=\overline{AB}$

Chú ý:

Nếu giả thiết là vuông góc với một vecto $\vec{c}$ bất kì thì hiểu $\vec{c}$ là vtcp

Nếu giả thiết là song song với một vecto $\vec{d}$ thì hiểu $\vec{d}$ là vtpt

Trước khi tính tích có hướng nhớ phải kiểm tra các cặp vecto đó cùng phương hay không nếu không cùng phương thì đó mới là vtcp cần tìm

Nếu giả thiết không yêu nói viết phương trình ở dạng tham số hoặc chính tắc thì ta viết ở dạng nào cũng được

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Cho điểm $A(1;2;3)$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua *A*, vuông góc với *d*₁ và cắt *d*₂

Giải:

Đường thẳng d_2 có phương trình tham số $d_2:\begin{cases}x=1-t\\ y=1+2t\\ z=-1+t\end{cases}$

Đường thẳng d_1 có vtcp là: $\vec{u}=(2;-1;1)$. Gọi B là giao điểm của d với d_2 thì

$B\in d_2\Rightarrow B(1-t;1+2t;-1+t)\Rightarrow\vec{AB}=(-t;2t-1;t-4)$

Theo giả thiết $d\perp d_1\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{u}_1=0\Leftrightarrow t=-1$

Vậy đường thẳng Δ qua $A(1;2;3)$ có vtcp $\overrightarrow{AB}=(1;-3;-5)$

nên phương trình là: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-5}$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

Giải:

Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với Ox

$\Rightarrow M(m;0;0)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(m-1;-2;-3)$

$AM\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{a_d}=0\Leftrightarrow m=-1\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-2;-2;-3)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overrightarrow{AM}$ có phương trình là

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz* cho điểm $A(-4;-2;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-3+2t\\ y=1-t\\ z=-1+4t\end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm *A*, cắt và vuông góc với đường thẳng *d*

Giải:

Cách 1:

Lập mặt phẳng (P) đi qua $A(-4;2;4)$ và vuông góc với d :

$(P):2(x+4)-(y+2)+4(z-4)=0$ hay $(P):2x-y+4z-10=0$ (1).

Gọi H là giao của d với (P), thì tọa độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}2x-y+4z-10=0\\ x=-3+2t\\ y=1-t\\ z=-1+4t\end{cases}\Leftrightarrow 21t=21\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(-1;0;3),\overrightarrow{AH}=(3;2;-1)$$

Vậy đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng MH, qua M : $\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$

Cách 2:

Gọi B là điểm bất kỳ thuộc d, suy ra

$B(2t-3;1-t;4t-1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2t+1;3-t;4t-5)$

Đường thẳng d' cần lập chính là AB. Để d' vuông góc d thì : $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$

$2(2t+1)-1(3-t)+4(4t-5)=0\Leftrightarrow 21t-21=0\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow B(-1;0;3),\overrightarrow{AB}=(3;2;-1)$

Vậy đường thẳng d có phương trình : $\frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$.

Thí dụ 4: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng *d* có phương trình là

$(P):2x+y-2z+9=0$ và $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{1}$.

Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2

Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua giao điểm A của (P) và *d*, vuông góc với *d* và nằm trong (P)

Giải:

Tìm tọa độ điểm I sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2

Điểm I thuộc d nên $I(1-t;2t-3;t+3)$

Theo giả thiết khoảng cách từ I đến (P) bằng 2 thì :

$$\Leftrightarrow \frac{|2(1-t)+(2t-3)-2(t+3)+9|}{\sqrt{4+1+4}}=2\Leftrightarrow |-4t+2|=6$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-t=3\\ 1-t=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2\\ t=4\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}I_1(3;-7;1)\\ I_2(-3;5;7)\end{array}\right.$$

Lập Δ qua A nằm trong (P) và vuông góc với d .

Tìm tọa độ A là giao của d với (P) . Tọa độ của A là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases}2x+y-2z+9=0\\ x=1-t\\ y=2t-3\\ z=t+3\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2(1-t)+(2t-3)-2(t+3)+9=0\Leftrightarrow -2t+2=0\rightarrow t=1\Rightarrow A(0;-1;4)$

Do $\Delta\perp d\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}\perp\vec{u}$. Mặt khác d nằm trong (P) cho nên :

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}\perp\vec{n}\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}=[\vec{u},\vec{n}]=\left(\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\-2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-5;0;-5)//\vec{u}=(1;0;1)$$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;1)$ có phương trình là : $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=-1\\ z=4+t\end{cases}$ $(t\in R)$

Thí dụ 5: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d có phương trình là $(P):x+2y-3z+4=0$ và $d:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc và cắt đường thẳng d

Giải:

Gọi M là giao của d với (P), thì tọa độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x+2y-3z+4=0 \\ x=-2+t \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (t-2)+2(t+2)+3t+4=0 \Leftrightarrow 6t+6=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow M(-3;1;1)$$

Do đó : $\vec{n}=(1;2;-3),\vec{u}=(1;1;-1) \Rightarrow [\vec{n},\vec{u}]=\left(\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}\right)=(1;-2;-1)$

Đường thẳng d' qua M có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;-2;-1) \Rightarrow d':\begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases}$

Thí dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz.

Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$

a. Tìm giao điểm M của *d* và (P)

b. Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) sao cho Δ ⊥ d và khoảng cách từ M tới Δ bằng $\sqrt{42}$

Giải:

a. Ta có phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow$ toạ độ điểm M là nghiệm

của hệ $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2+t \\ z=-1-t \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$ (tham số t) $\Rightarrow M(1;-3;0)$

b. Lại có VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$, VTCP của *d* là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$.

Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-3;1)$

Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó

$\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}$ vuông góc với $\overrightarrow{u_\Delta}$ nên ta có phương trình: $2x-3y+z-11=0$ (1)

Lại có $N \in (P)$ (2) và giả thiết $MN=\sqrt{42}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ: $\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ 2x-3y+z-11=0 \\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được hai điểm $N(5;-2;-5)$ và $N(-3;-4;5)$

Nếu $N(5;-2;-5)$ ta có phương trình $\Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$

Nếu $N(-3;-4;5)$ ta có phương trình $\Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$

Thí dụ 8: Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$

a. Chứng tỏ d_1, d_2 chéo nhau ?

b. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ (là đường thẳng vuông góc chung của d_1, d_2).

Giải:

a. Chứng tỏ d_1, d_2 chéo nhau ?

Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1;0;-5)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;0;1)$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(0;4;5)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(0;-2;3)$.

Ta có : $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1;4;10)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{M_1M_2}=-1.\begin{vmatrix}0 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 0\end{vmatrix}+10\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{vmatrix}=2-12-20=-30\neq 0.$$

Chứng tỏ d_1, d_2 chéo nhau .

b. Lập phương trình đường vuông góc chung : Δ.

Lấy bất kỳ điểm A thuộc d_1 thì $A(t+1;0;t-5)$

và B thuộc d_2 thì $B(0;4-2t';5+3t')$

Khi đó : $\overrightarrow{AB}=(-1-t;4-2t';10+3t'-t)$. Để đường thẳng (AB) là đường vuông góc chung thì :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(-1-t)+1(10+3t'-t)=0 \\ -2(4-2t')+3(10+3t'-t)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t'-2t=-9 \\ 13t'-3t=-22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ t'=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;6;4) \\ A(4;0;-2) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (AB) đi qua $A(4;0;-2)$ có véc tơ chỉ phương

$\vec{u}=(2;-3;-2)//\overrightarrow{AB}$ có phương trình là : $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-3t \\ z=-2-2t \end{cases}$ $(t \in R)$.

Thí dụ 9: Cho hai đường thẳng : $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+3t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x+2y-z=0\\2x-y+3z-5=0\end{cases}$.

a. Xét vị trí tương đối của d và d'

b. Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d' và tính $d(d,d')$?

Giải:

a. Xét vị trí tương đối của d và d'

Ta có đường thẳng d' chuyển sang tham số d': $\begin{cases}x=2-t'\\y=-1+t'\\z=t'\end{cases}$

Đường thẳng d đi qua $M(1;2;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$

Đường thẳng d' đi qua $N(2;-1;0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(-1;1;1)$

Xét : $\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=\left(\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}\right)=(1;4;-3)\neq\vec{0}$.

Chứng tỏ d và d' chéo nhau .

b. Lập phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

Trên d chọn $A(1+t;2+2t;3+3t)$ và trên d' chọn $B(2-t';-1+t';t')$

Tính : $\overrightarrow{AB}=(1-t'-t;-3+t'-2t;-3+t'-3t)$

Để đường thẳng (AB) là đường vuông góc chung thì :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u'}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1(1-t'-t)+2(-3+t'-2t)+3(-3+t'-3t)=0\\-1(1-t'-t)+1(-3+t'-2t)+1(-3+t'-3t)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{7}{3}\Rightarrow A\left(\dfrac{6}{13};\dfrac{12}{13};\dfrac{18}{13}\right)\\t'=\dfrac{21}{13}\Rightarrow B\left(\dfrac{5}{13};\dfrac{8}{13};\dfrac{21}{13}\right)\end{cases}$$

Do đó đường thẳng (AB) qua A và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;-4;3)//\overrightarrow{AB}$ có phương trình là :

$$\Leftrightarrow(AB):\begin{cases}x=\dfrac{6}{13}-t\\y=\dfrac{12}{13}-4t\\z=\dfrac{18}{13}+3t\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{\dfrac{1}{169}+\dfrac{16}{169}+\dfrac{9}{169}}=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$$

Thí dụ 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$; $d_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$

và mặt phẳng $(P):x-y-2z+3=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết Δ nằm trên mặt phẳng *(P)* và Δ cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải:

Đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình tham số là

$$d_1:\begin{cases}x=-1+2t_1\\y=1-t_1\\z=1+t_1\end{cases}\text{ và }d_2:\begin{cases}x=1+t_2\\y=2+t_2\\z=-1+2t_2\end{cases}$$

Gọi $A=d_1\cap(P)$ suy ra $A(1;0;2)$; $B=d_2\cap(P)$ suy ra $B(2;3;1)$

Đường thẳng Δ thỏa mãn bài toán đi qua A và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$

Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$

Thí dụ 12:

Cho hai đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{-7}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ và $\Delta':\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Viết phương trình hình chiếu của Δ' theo phương của Δ trên mặt phẳng $(P):x+y+z+3=0$

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt GTNN . Biết A(3;1;1) và B(7;3;9).

Giải:

Viết phương trình hình chiếu của Δ' theo phương của Δ trên mặt phẳng (P)

Đường thẳng Δ đi qua $M(3;1;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-7;2;3)$.

Đường thẳng Δ' đi qua $N(7;3;3)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}=(1;2;-1)$.

$$\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\2&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\3&-7\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\-7&2\end{vmatrix}\right)=(8;4;16)//\vec{n}=(2;1;4)$$

Lập mặt phẳng (Q) chứa Δ' và song song với Δ, cho nên (Q) đi qua $N(7;3;3)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=(2;1;4)\Rightarrow(Q):2(x-7)+(y-3)+4(z-3)=0$ hay $(Q):2x+y+4z-29=0$.

Nếu d là hình chiếu vuông góc của Δ' theo phương Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+y+z+3=0$ và $(Q):2x+y+4z-29=0$.

Nếu lấy một điểm có tọa độ $C(x;y;z)$ thuộc d thì tọa độ của nó thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases}x+y+z+3=0\\2x+y+4z-29=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=32-3t\\y=-35+2t\\z=t\end{cases}\quad(t\in R).$$

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho : $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ đạt GTNN.

Nếu $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow x+y+z+3=0$ (1).

Ta có : $\overline{MA}=(x-3;y-1;z-1),\overline{MB}=(x-7;y-3;z-9)$

$\Rightarrow \overline{MA}+\overline{MB}=(10-2x;4-2y;10-2z)$

Vậy

$\left|\overline{MA}+\overline{MB}\right|=\sqrt{(10-2x)^2+(4-2y)^2+(10-2z)^2}=2\sqrt{1(5-x)^2+1(2-y)^2+1(5-z)^2}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacópski và kết hợp với (1) ta có :

$2\sqrt{1(5-x)^2+1(2-y)^2+1(5-z)^2}\ge 2[1(5-x)+1(2-y)+1(5-z)]^2$

$=2[12+3-(x+y+z+3)]^2=2.15^2$

Do đó $\left|\overline{MA}+\overline{MB}\right|$ đạt GTNN bằng 450 khi dấu đẳng thức xảy ra :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{5-x}=\dfrac{1}{2-y}=\dfrac{1}{5-z}\\x+y+z+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=2-y\\5-x=5-z\\x+y+z+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=3\\x=z\\x+y+z+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-3\Rightarrow M(0;-3;0)\\z=0\end{cases}$$

Thí dụ 13: Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1:\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};\ \Delta_2:\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$$

1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ_3 đối xứng với Δ_2 qua Δ_1
2. Xét mặt phẳng $(\alpha): x+y+z+3=0$. Viết phương trình hình chiếu của Δ_2 theo phương Δ_1 lên mặt phẳng (α)
3. Tìm điểm M trên mặt phẳng (α) để $\left|\overline{MM_1}+\overline{MM_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất biết $M_1(3;1;1)$ và $M_2(7;3;9)$

Giải:

1. **Cách 1:**

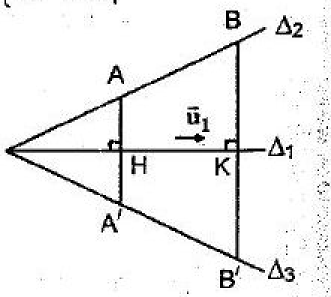
Đường thẳng có phương trình tham số $\Delta_1:\begin{cases}x=3-7t_1\\y=1+2t_1\\z=1+3t_1\end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\overline{u_1}=(-7;2;3)$

Đường thẳng có phương trình tham số

$\Delta_2:\begin{cases}x=7+t_2\\y=3+2t_2\\z=9-t_2\end{cases}$ đi qua hai điểm

$A(7;3;9),\ B(8;5;8)$ và có vtcp

$\overrightarrow{u_2}=(1;2;-1)$



Gọi H là hình chiếu của A trên Δ_1

$H\in\Delta_1\Rightarrow H(3-7t_1;1+2t_1;1+3t_1)\Rightarrow\overline{AH}=(-4-7t_1;-2+2t_1;-8+3t_1)$

$\overline{AH}\perp\overline{u_1}\Leftrightarrow -7(-4-7t_1)+2(-2+2t_1)+3(-8+3t_1)=0\Leftrightarrow t_1=0\Rightarrow H(3;1;1)$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $H\Rightarrow A'(-1;-1;-7)$

Gọi K là hình chiếu của B trên Δ_1 và B' là điểm đối xứng của B qua K.

Tương tự như trên ta tìm được: $K\left(\frac{114}{31};\frac{25}{31};\frac{22}{31}\right)\Rightarrow B'\left(-\frac{20}{31};-\frac{105}{31};-\frac{204}{31}\right)$

$\overline{A'B'}=\left(\frac{11}{31};-\frac{74}{31};-\frac{13}{31}\right)=\frac{1}{31}(11;-74;13)=\frac{1}{31}\vec{a}$ với $\vec{a}=(11;-74;13)$

Phương trình đường thẳng Δ_3 đối xứng với Δ_2 qua Δ_1 chính là phương trình đường thẳng $A'B'$ qua A' với vectơ chỉ phương $\vec{a}$.

Vậy phương trình chính tắc $\Delta_3:\dfrac{x+1}{11}=\dfrac{y+1}{-74}=\dfrac{z+7}{13}$.

ch 2:

Đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=3-7t'\\y=1+2t'\\z=1+3t'\end{cases}$.

Trên Δ_2 lấy điểm M bất kỳ, cho nên $M(7+t;3+2t;9-t)$

Gọi $N(x;y;z)$ đối xứng với M qua d thì : $\begin{cases}\overline{MN}\perp\vec{u}\\H\in d'\end{cases}$.

Với : $\overline{MN}=(x-7-t;y-3-2t;z-9+t)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-7(x-7-t)+2(y-3-2t)+3(z-9+t)=0\quad(*)\\\dfrac{x+7+t}{2}=3-7t'\\\dfrac{y+3+2t}{2}=1+2t'\\\dfrac{z+9-t}{2}=1+3t'\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x+7+t}{2}=3-7t'\\\dfrac{y+3+2t}{2}=1+2t'\\\dfrac{z+9-t}{2}=1+3t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-14t'-t\\y=-1+4t'-2t\quad(1)\\z=-7+6t'+t\end{cases}$$

Phương trình (*) trở thành :

$$\begin{cases} x=-1-14t'-t \\ y=-1+4t'-2t \\ z=-7+6t'+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-7=-8-14t'-t \\ y-3=-4+4t'-2t \\ z-9=-16+6t'+t \end{cases}$$

$\Rightarrow -7(-8-14t'-2t)+2(-4+4t'-4t)+3(-16+6t'+2t)=0$

$\Leftrightarrow 124t'+12t=0 \Rightarrow t=-\dfrac{31}{3}t'$

Thay vào (1) $\begin{cases} x=-1-14t'+\dfrac{31}{3}t'=-1-\dfrac{11}{3}t' \\ y=-1+4t'+\dfrac{62}{3}t'=-1+\dfrac{74}{3}t' \\ z=-7+6t'-\dfrac{31}{3}t'=-7-\dfrac{13}{3}t' \end{cases} \Leftrightarrow \Delta: \begin{cases} x=-1-\dfrac{11}{3}t' \\ y=-1+\dfrac{74}{3}t' \\ z=-7-\dfrac{13}{3}t' \end{cases}$

2. Mặt phẳng (α) chứa Δ_2 và $(\alpha) // \Delta_1$

$\Rightarrow (\alpha)$ có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(-7;2;3)$, $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right]=(-8;-4;-16)=-4(2;1;4)=-4\overrightarrow{n_\beta}$ với $\overrightarrow{n_\beta}=(2;1;4)$

Phương trình mp(α) qua $A(7;3;9)\in\Delta_2$ với pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}$:

$(\beta): 2x+y+4z-53=0$

Ta có: $(\alpha)\cap(\beta)=(\Delta_2')$ là hình chiếu của Δ_2 lên (α) theo phương Δ_1

Vậy: phương trình hình chiếu Δ_2': $\begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x+y+4z-53=0 \end{cases}$

3. Gọi I là trung điểm $M_1M_2 \Rightarrow I(5;2;5)$

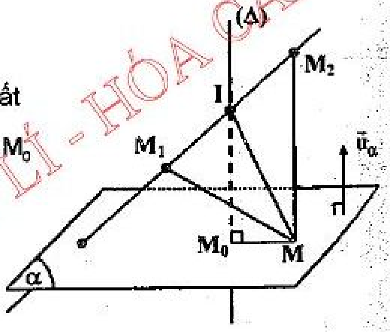
Ta có: $\left|\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}\right|$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ *M* là hình chiếu của *I* trên $(\alpha) \Leftrightarrow M \equiv M_0$

Phương trình đường thẳng Δ qua I

và vuông góc với (α) là $\begin{cases} x=5+t \\ y=2+t \\ z=5+t \end{cases}$



Gọi *M* là giao điểm của Δ và (α)

$M\in\Delta \Rightarrow M(5+t;2+t;5+t)$

$M\in(\alpha) \Rightarrow 5+t+2+t+5+t+3=0 \Leftrightarrow t=-5 \Rightarrow M(0;-3;0)$

Vậy: điểm M cần tìm $M(0;-3;0)$

Cách khác:

Giả sử $M(x;y;z)\in(\alpha) \Leftrightarrow x+y+z=3=0$ (1)

Ta có $\overrightarrow{MM_1}=(3-x;1-y;1-z)$, $\overrightarrow{MM_2}=(7-x;3-y;9-z)$

Gọi $d=\left|\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}\right|$

$\Leftrightarrow d^2=4\left[(x-5)^2+(y-2)^2+(z-5)^2\right]\ge 4.\dfrac{1}{3}(x-5+y-2+z-5)^2=\dfrac{4}{3}(x+y+z-12)^2$

Theo (1) ta có $\Leftrightarrow d^2=\dfrac{4}{3}(-3-12)^2=300 \Leftrightarrow d\ge 10\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases} x-5=y-2=z-5 \\ x+y+z=3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow M(0;-3;0)$

Thí dụ 14: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$ và trọng tâm $G(0;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm C và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Giải:

G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow C(-1;3;-4)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;2;-4) \Rightarrow \overrightarrow{a_\Delta}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=-6(1;1;0)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $G(0;2;-1)$ và có vtcp $\overrightarrow{a_\Delta}$ là:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=-4 \end{cases}$$

Thí dụ 15: **(ĐH – A 2012)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Giải:

Cách 1:

Chuyển đường thẳng d về dạng tham số $d: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt d tại $M\in d \Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$

Theo giả thiết A là trung điểm MN theo công thức tính trung điểm

$$\begin{cases} x_A=\dfrac{x_M+x_N}{2} \\ y_A=\dfrac{y_M+y_N}{2} \\ z_A=\dfrac{z_M+z_N}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N=3-2t \\ y_N=-2-2t \Rightarrow N(3-2t;-2-t;2-t) \\ z_N=2-t \end{cases}$$

Mặt khác $N\in(P) \Leftrightarrow 1.(3-2t)+1.(-2-t)-2(2-t)+5=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow N(-1;-4;0)$;

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và N nên phương trình có dạng:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{2}$$

Chú ý: Nếu học sinh viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overline{MA}=(-2;-3;-2)$ thì phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=-1-3t\\z=2-2t\end{cases}$ vẫn đúng

Hoặc nếu chọn $\overline{MA}=(2;3;2)$ thì $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=2+2t\end{cases}$ vẫn đúng

Cách 2:

Chuyển đường thẳng d về dạng tham số $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$

Đường thẳng Δ cắt d tại $M\in d\Rightarrow M(-1+2t;t;2+t)$

Đường thẳng Δ cắt (P) tại $N(a;b;c)\in(P)$

Theo giả thiết A là trung điểm MN theo công thức tính trung điểm

$$\begin{cases}-1+2t+a=2\\t+b=-2\\t+2+c=4\\N\in(P)\Leftrightarrow a+b-2c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2t+3\\b=-2-t\\c=2-t\\a+b-2c+5=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2t+3-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overline{MA}=(-2;-3;-2)$ có phương trình

$$\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=-1-3t\\z=2-2t\end{cases}$$

Cách 3:

Gọi (P') là mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (P) qua điểm A nên (P') có dạng $x+y-2z+m=0$ vì $d(A,(P))=d(A,(P'))\Leftrightarrow|m-4|=1\Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn) hoặc $m=5$ (loại) vì $(P)\equiv(P')$

Khi đó mặt phẳng (P') có phương trình là $x+y-2z+3=0$

Theo giả thiết $M=\Delta\cap d\Leftrightarrow M=(P')\cap d$ là nghiệm của phương trình

$-1+2t+t-2(2+t)+3=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)$

Vậy đường thẳng Δ đi qua A và có vtcp $\overline{MA}=(-2;-3;-2)$ có phương trình

$$\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\y=-1-3t\\z=2-2t\end{cases}$$

Dạng 2: Viết phương trình tham số (chính tắc) bằng cách tìm vtcp dựa vào các dữ kiện ban đầu

Đôi khi việc tìm vtcp (ở dạng trực tiếp hoặc gián tiếp) không khả thi thì chúng ta phải tìm vtcp bằng cách giải hệ, thường thì dựa vào giả thiết để thiết lập một hệ 3 ẩn, 3 phương trình, tương ứng với ba ẩn a, b, c

Điều kiện thường liên quan tới khoảng cách, góc, vị trí tương đối...

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=17$ và mặt phẳng $(P):2x+2y+z+7=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A(8; 0; – 23), nằm trong (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm I(−1;2;−3), bán kính $R=\sqrt{17}$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\bar{n}=(2;2;1)$

Gọi $\bar{u}=(a;b;c)$ là VTCP đường thẳng Δ cần tìm $(a^2+b^2+c^2>0)$

$\Delta\subset(P)\Rightarrow\bar{u}\perp\bar{n}\Leftrightarrow 2a+2b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-2b$ (1)

Ta có $\overline{AI}=(-9;2;20)$, $[\overline{AI},\bar{u}]=(2c-20b;20a+9c;-9b-2a)$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{\left|[\overline{AI},\bar{u}]\right|}{|\bar{u}|}=\sqrt{17}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(2c-20b)^2+(20a+9c)^2+(-9b-2a)^2}=\sqrt{17}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$(-4a-24b)^2+(2a-18b)^2+(-9b-2a)^2=17[a^2+b^2+(-2a-2b)^2]$

$\Leftrightarrow 896b^2-61a^2+20ab=0$

Nếu b = 0 thì a = 0 suy ra c = 0 vô lí, vậy b ≠ 0. Chọn b = 1

Ta có $-61a^2+20a+896=0\Leftrightarrow a=4$ hoặc $a=-\dfrac{224}{61}$

Với a = 4, b = 1 thì c = – 10 ; với $a=-\dfrac{224}{61}$, b = 1 thì $c=\dfrac{326}{61}$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\begin{cases}x=8+4t\\y=t\\z=-23-10t\end{cases}\quad\text{hoặc}\quad\begin{cases}x=8-\dfrac{224}{61}t\\y=t\\z=-23+\dfrac{326}{61}t\end{cases}$$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$ và điểm $A(1;0;-2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A và tạo với trục *Ox* một góc α có $\cos\alpha=\dfrac{1}{3\sqrt{10}}$.

Giải:

Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.
Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;0)$. Vì đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên $\overrightarrow{IA}=(2;-1;-2)\perp\overrightarrow{u_\Delta}\Leftrightarrow 2a-b-2c=0\Leftrightarrow b=2a-2c.$ (1)

Mặt khác đường thẳng Δ tạo với trục *Ox* một góc α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{3\sqrt{10}}$ nên

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{3\sqrt{10}}\Leftrightarrow b^2=89a^2-c^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình $85a^2+8ac-5c^2=0$ (3)

- Với $c=0$, suy ra $a=0$, $b=0$ (loại)
- Với $c\neq 0$, ta có (3) $\Leftrightarrow 85\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+8\dfrac{a}{c}-5=0\Leftrightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{5}$ hoặc $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{5}{17}$.

Với $\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{5}$, ta chọn $a=1$, $c=5\Rightarrow b=-8$.

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z+2}{5}$.

Với $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{5}{17}$, ta chọn $a=5$, $c=-17\Rightarrow b=44$.

Suy ra phương trình $\Delta:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{44}=\dfrac{z+2}{-17}$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là

$\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z+2}{5}$ hoặc $\Delta:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{44}=\dfrac{z+2}{-17}$.

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(3;-1;1)$, đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$, $(P):x-y+z-5=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d thỏa mãn các điều kiện: Đi qua A, nằm trong (P) và hợp với đường thẳng Δ một góc 90^0.

Giải:

Gọi $\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}$ lần lượt là các vtcp của đường thẳng d, đường thẳng Δ và vtpt của mp(P).
Đặt $\overrightarrow{u_d}=(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$.
Vì d nằm trong (P) nên ta có : $\overrightarrow{n_P}\perp\overrightarrow{u_d}\Leftrightarrow a-b+c=0\Leftrightarrow b=a+c$ (1).

Theo giả thiết: góc giữa 2 đường thẳng bằng $45^0\Leftrightarrow$ Góc giữa 2 vtcp bằng 45^0

$$\Leftrightarrow\frac{|a+2b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2(a+2b+c)^2=9(a^2+b^2+c^2)\ (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có : $14c^2+30ac=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\ c=-\dfrac{15a}{7}\end{array}\right.$

- Với c = 0: chọn $a=b=1$.

Ta có phương trình tham số của d là : $x=3+t;y=-1-t;z=1$

- Với $c=-\dfrac{15a}{7}$ chọn $a=7,c=-15,b=-8$.

Ta có phương trình tham số của d là: $x=3+7t;y=-1-8t;z=1-15t$.

Thí dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-12=0$ và đường thẳng $d:x=5+2t;y=4;z=7+t$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu **(S) tại điểm $M(5;0;1)$ biết** đường thẳng Δ tạo với đường thẳng **d một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$**.

Giải:

Mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=26\Rightarrow$ (S) có tâm **$I(2;-1;-3)$ và bán** kính $R=\sqrt{26}$.
$\overrightarrow{IM}=(3;1;4),\overrightarrow{u_1}=(2;0;1)$ là 1 vtcp của d.
Giả sử $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ là một vtcp của đường thẳng Δ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$
Do Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại M
$\Rightarrow\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{u_2}\Leftrightarrow 3a+b+4c=0\Leftrightarrow b=-3a-4c$ (1)
Mà góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d bằng φ.

$$\Rightarrow\left|\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\right|=\cos\varphi\Leftrightarrow\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\quad(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $\sqrt{7}|2a+c|=\sqrt{5}.\sqrt{a^2+(3a+4c)^2+c^2}$

$$\Leftrightarrow 7(4a^2+4ac+c^2)=5(a^2+9a^2+24ac+16c^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 22a^2+92ac+78c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3c\\ a=-\dfrac{13}{11}c\end{array}\right.$$

Với $a=-3c$, do $a^2+b^2+c^2\neq 0\Rightarrow c\neq 0$. Chọn $c=-1\Rightarrow a=3;b=-5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\left\{\begin{array}{l}x=5+3t\\ y=-5t\\ z=1-t\end{array}\right.$

- Với $a=-\frac{13}{11}c$, do $a^2+b^2+c^2\neq 0\Rightarrow c\neq 0$. Chọn $c=-11\Rightarrow a=13, b=5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=5+13t\\ y=5t\\ z=1-11t\end{cases}$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\begin{cases}x=5+3t\\ y=-5t\\ z=1-t\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=5+13t\\ y=5t\\ z=1-11t\end{cases}$

Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng có liên quan tới min và max

Dạng bài toán này khá mới và cũng gây không ít khó khăn cho các bạn học sinh, để làm tốt dạng này nên chú ý tính chất đường cao và hình chiếu, đôi khi kết hợp cả với đạo hàm, tam thức bậc hai, bất đẳng thức …

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất

Giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-1;2)$; $\overrightarrow{n_P}=(1;-2;2)$

Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và // (P) : $1(x+3)-2(y-0)+2(z-1)=0$ $\Leftrightarrow x-2y+2z+1=0$. Gọi Δ là đường thẳng bất kỳ qua A

Gọi H là hình chiếu của B xuống mặt phẳng (Q). Ta có : $d(B,\Delta)\geq BH$

$d(B,\Delta)$ đạt min $\Leftrightarrow \Delta$ qua A và H.

Phương trình tham số BH: $\begin{cases}x=1+t\\ y=-1-2t\\ z=3+2t\end{cases}$

Tọa độ $H=BH\cap(Q)$ thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases}x=1+t, y=-1-2t, z=3+2t\\ x-2y+2z+1=0\end{cases}\Rightarrow t=-\frac{10}{9}\Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$$

Đường thẳng Δ qua $A(-3;0;1)$ và có 1 VTCP $\overrightarrow{a_\Delta}=\overrightarrow{AH}=\frac{1}{9}(26;11;-2)$ có phương trình là $\Delta:\frac{x+3}{26}=\frac{y-0}{11}=\frac{z-1}{-2}$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d có phương trình: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ và hai điểm $A(1;2;-4)$; $B(1;2;-3)$. Lập phương trình

đường thẳng Δ đi qua B và cắt đường d đồng thời khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là lớn nhất

Giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ $\Rightarrow AH\leq AB\Rightarrow$ AH lớn nhất khi H trùng B $\Rightarrow d(A,\Delta)$ lớn nhất khi H trùng B

Trên (d) chọn điểm $C(2t;t+1;3t)$ khi đó

$BC\perp BA\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow C(-2;0;-3)$

đường thẳng Δ cần lập chính là đường thẳng BC do đó có phương trình

$\begin{cases}x=-2-3k\\ y=-2k\\ z=-3\end{cases}$

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-2}$. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P): $x+y+z-7=0$ cắt d_1, d_2 tại hai điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó là ngắn nhất.

Giải:

+ Đường thẳng d_1 có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(2;1;-1)$, d_2 có vec tơ chỉ phương: $\overrightarrow{u_2}=(1;3;-2)$.

+ mp(P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1)$

+ d_1 có phương trình tham số $\begin{cases}x=1+2t_1\\ y=t_1\\ z=-2-t_1\end{cases}$,

d_2 có phương trình tham số: $\begin{cases}x=1+t_2\\ y=-2+3t_2\\ z=2-2t_2\end{cases}$.

Với $\overrightarrow{u_1}\neq\overrightarrow{u_2}$ và hệ phương trình $\begin{cases}1+t_2=1+2t_1\\ -2+3t_2=t_1\\ 2-2t_2=-2-t_1\end{cases}$ vô nghiệm nên d_1 và d_2 chéo nhau

Lấy $A(1+2t_1;t_1;-2-t_1)\in d_1$; $B(1+t_2;-2+3t_2;2-2t_2)\in d_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t_2-2t_1;3t_2-t_1-2;-2t_2+t_1+4)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, B và song song với (P).

Có $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\Leftrightarrow t_2-2t_1+3t_2-t_1-2-2t_2+t_1+4=0\Leftrightarrow t_2=t_1-1$

$\Rightarrow AB=\sqrt{(-t_1-1)^2+(2t_1-5)^2+(-t_1+6)^2}=\sqrt{6t_1^2-30t_1+62}$

AB nhỏ nhất khi $6t_1^2 - 30t_1 + 62$ nhỏ nhất.

Vì $6t_1^2 - 30t_1 + 62 = 6\left(t_1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2} \ge \frac{49}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t_1 = \frac{5}{2}$. Khi đó $t_2 = \frac{3}{2}$

+ Với $t_1 = \frac{5}{2}$, $t_2 = \frac{3}{2}$ có $A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$, $\overline{AB} = \left(-\frac{7}{2};0;\frac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua A có một vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1;0;1)$ nên có phương trình tham số: $x = 6 - t; y = \frac{5}{2}; z = -\frac{9}{2} + t$

Thí dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm A(1;1;0), B(2;1;1). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, $\Delta \perp d$ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ là lớn nhất.

Giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên Δ, ta có $d(B,\Delta) = BH \le BA$ (vì Δ đi qua A).

Do đó khoảng cách từ B đến đường thẳng Δ là lớn nhất $\Leftrightarrow BH = BA \Leftrightarrow H \equiv A$.

Vậy đường thẳng Δ cần lập chính là đường thẳng đi qua A, $\Delta \perp d$ và $\Delta \perp AB$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ.

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;0;1)$ và $\overrightarrow{u_1}(2;1;1)$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng d

Do $\Delta \perp d \Rightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1}$; $\Delta \perp AB \Rightarrow \vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$, vậy ta lấy $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-1;1;1)$

Mặt khác Δ đi qua $A(1;1;0)$ vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

Thí dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1;1;1) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và cắt *d*, sao cho khoảng cách từ gốc toạ độ *O* đến Δ nhỏ nhất.

Giải:

Đường thẳng Δ thuộc mp (P) qua A và chứa d, nên (P): $3x + 2y - z - 4 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P). Toạ độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = -t \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{-2}{7}\right)$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên Δ: $d(O;\Delta) = OK \ge OH$

Để khoảng cách nhỏ nhất thì $K \equiv H \Rightarrow H \in \Delta$. Suy ra Δ qua A, H nên có phương trình là: $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{9}$, dễ thấy Δ cắt d nên Δ là đường thẳng cần tìm.

hí dụ 6: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và chứa đường thẳng Δ.
2. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm B và cắt đường thẳng Δ tại điểm C sao cho diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất.

Giải:

1. Ta có: $\overline{AM} = (-2;-4;0)$, $[\overline{AM}, \vec{u}] = (-8;4;10)$

Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và chứa đường thẳng Δ nên nhận vectơ $\left[\overline{AM}, \vec{u}\right] = (-8;-4;10)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$$-8(x-1)+4(y-5)+10(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 5z + 6 = 0.$$

2. Phương trình tham số của Δ: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$.

Điểm C thuộc đường thẳng Δ nên tọa độ điểm C có dạng $C(-1+2t;1-t;2t)$.

$\overrightarrow{AC} = (-2+2t;-4-t;2t); \overrightarrow{AB} = (2;-2;6)$

$\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right] = (-24-2t;12-8t;12-2t) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right]\right| = \sqrt{18t^2 - 36t + 216}$

Diện tích ΔABC là $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right]\right| = \sqrt{18t^2 - 36t + 216} = \sqrt{18(t-1)^2 + 198} \ge \sqrt{198}$

Vậy Min S = $\sqrt{198}$ khi t = 1 hay C(1; 0; 2).

Đường thẳng BC đi qua đi qua B và nhận $\overline{BC} = (-2;-3;-4)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc là $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-6}{-4}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm *M, N* sao cho đoạn $MN = \sqrt{54}$.

Bài 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng *(P)*: $2x+2y+z+5=0$, mặt phẳng *(Q)*: $2x-3y+2z+1=0$. Lập phương trình đường thẳng *d* nằm trong mặt phẳng *(Q)*, song song với mặt phẳng *(P)* và cách mặt phẳng *(P)* một khoảng bằng 3.

Bài 3: Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+z-29=0$ và hai điểm $A(4;4;6)$, $B(2;9;3)$. Gọi E,F là hình chiếu của A và B trên (α). Tính độ dài đoạn EF. Tìm phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đồng thời Δ đi qua giao điểm của AB với (α) và Δ vuông góc với AB.

Bài 4: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm *M*(1; –1; 0), cắt đường thẳng *d*: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$ và tạo với mặt phẳng *(P)*: $2x-y-z+5=0$ một góc 30^0.

Bài 5: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng *(P)*: $x-y+2z+5=0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{1}$, $d_2: \frac{x+3}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2, song song với *(P)* và cách *(P)* một khoảng bằng $\sqrt{6}$.

Bài 6: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho $M(0;-1;2)$, hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{2}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua M cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B khác I sao cho $IA=AB$, với I là giao điểm của d_1 và d_2.

Bài 7: Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. Gọi I là giao điểm của d và (P). Viết phương trình của đường thẳng Δ nằm trong (P), vuông góc với d và cách I một khoảng bằng $3\sqrt{2}$.

Bài 8: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+3=0$. Gọi d là đường thẳng cắt Δ tại I và vuông góc với (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng d biết khoảng cách từ I đến (P) bằng 3.

Bài 9: Trong không gian Oxyz. Cho mặt phẳng $(P): x+y-2z+4=0$ và mặt cầu (S) có phương trình là $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình tham số đường thẳng d tiếp xúc với (S) tại $A(3;-1;1)$ và song song với mặt phẳng (P).

10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t;(t\in R) \\ z=1+2t \end{cases}$, đường thẳng d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x-y-1=0$ và $(Q): 2x+y+2z-5=0$. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_2. Viết phương trình đường thẳng d_3 qua $A(2;3;1)$, đồng thời cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại B và C sao cho tam giác BIC cân đỉnh *I*.

11: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;-1)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z+2=0$. Viết phương trình đường thẳng *d* cắt *(P)* tại *C*, cắt Δ tại *D* sao cho *ABCD* là một hình thang vuông tại các đỉnh *A*, *B*.

12: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

$\Delta_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}$; $\Delta_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{2}$ và điểm $I(2;0;6)$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua I và cắt Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A và B sao cho I là trung điểm của AB.

13: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $M(0;4;2)$ và hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt có phương trình $3x-y-1=0$, $x+3y+4z-7=0$. Viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua *M* và song song với giao tuyến của (P) và (Q).

14: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba đường thẳng: $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{2}$; $d_2: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-3}$ và $d_3: \frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết Δ cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại các điểm *A*, *B*, *C* sao cho *AB* = *BC*.

15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm M(1;2;3) và hai đường thẳng có phương trình

$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x=4t \\ y=-2 \\ z=3t \end{cases}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

16: Trong không gian với hệ toạ độ 0xyz cho đường thẳng d: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$ song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d.

Bài 17: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{4}$ và điểm A(2;3;1). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt đường thẳng d và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến Δ là lớn nhất

Bài 18: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-3y+4z-1=0$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+3t\\y=-1+t\\z=2t\end{cases}$ và điểm A(3;1;1). Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua A cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (P)

Bài 19: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;1;1), B(3;1;1) và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$.

a. Viết phương trình tham số của đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB lên mặt phẳng (P).

b. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) để tam giác ABM đều.

Bài 20: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(0;0;4), B(2;0;0) và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+5=0$

a. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d, biết d nằm trong (P), cắt và vuông góc với đường thẳng AB.

2. Viết phương trình mặt cầu đi qua các điểm O, A, B, đồng thời tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Bài 21: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z-1=0$ và hai đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}$, $d':\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng *d* và cắt *d'* tại điểm Q có tung độ bằng 4.

Bài 22: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, lập phương trình đường thẳng *d* đi qua $A(1;0;-2)$ và cắt $d':\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}$ sao cho góc giữa đường thẳng *d* và mặt phẳng *(P)*: $2x-y+2z-1=0$ lớn nhất.

Bài 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+1=0$. Gọi I là giao điểm của d và (α). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α), vuông góc với d và cách một đoạn $3\sqrt{2}$.

Bài 24: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (P): $x-2y+z-1=0$ và hai đường thẳng: $(d_1)\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{2}$, $(d_2)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả 2 đường thẳng (d_1), (d_2).

25: Trong không gian cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-9}{-1}$ và $d_2: \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$. Viết phương trình tham số đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 và trục Ox lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho B là trung điểm AC.

26: Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;-1;0), B(2;3;-1), C(1;3;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2}$. Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng d sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ qua trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

HƯỚNG DẪN GIẢI

1:

Gọi $M(-1+t;2t;2-t)\in d_1, N(1+2m;7+m;3+4m)\in d_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(2m-t+2;m-2t+7;4m+t+1)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$

Ta có $\Delta \parallel (P)\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{n}=0\Rightarrow t=-5m\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(7m+2;11m+7;-m+1)$

Theo giả thiết $MN=\sqrt{54}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=-\frac{20}{19}\end{array}\right.$

Với $m=0\Rightarrow M(-1;0;2), N(1;7;3)\notin(P)\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=7t\\z=2+t\end{cases}$

Với

$m=-\frac{20}{19}\Rightarrow M\left(\frac{81}{19};\frac{200}{19};-\frac{62}{19}\right), N\left(-\frac{21}{19};\frac{113}{19};-\frac{23}{19}\right)\notin(P)\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=\frac{81}{19}+\frac{102}{19}t\\y=\frac{200}{19}+\frac{87}{19}t\\z=-\frac{62}{19}-\frac{39}{19}t\end{cases}$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn

2:

Gọi (R) là mặt phẳng song song với (P) và $d((R);(P))=3$

Suy ra $(R): 2x+2y+z+d=0$.

Lấy điểm $A(0;0;-5)\in(P)\Rightarrow d(A;(R))=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}d=14\\d=-4\end{array}\right.$

Suy ra $(R_1): 2x+2y+z+14=0, (R_2): 2x+2y+z-4=0$

Đường thẳng $d = (Q) \cap (R_1)$ có vtcp $\vec{u} = (-7;2;10)$ và đi qua điểm

$$M\left(-\frac{22}{5};-\frac{13}{5};0\right) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -\frac{22}{5} - 7t \\ y = -\frac{13}{5} + 2t \\ z = 10t \end{cases}$$

Đường thẳng $d = (Q) \cap (R_2)$ có vtcp $\vec{u} = (-7;2;10)$ và đi qua điểm

$$N(1;1;0) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 1 + 2t \\ z = 10t \end{cases}$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn

Bài 3:

Ta có $\overline{AB} = (-2;5;-3), \overline{n_\alpha} = (3;-2;1)$

$$\sin(AB,(\alpha)) = \left|\cos\left(\overline{AB},\overline{n_\alpha}\right)\right| = \frac{19}{\sqrt{532}}$$

$$EF = AB.\cos(AB,(\alpha)) = AB\sqrt{1-\sin^2(AB,(\alpha))} = \sqrt{38}\sqrt{1-\frac{361}{532}} = \sqrt{\frac{171}{14}}$$

Đường thẳng AB cắt (α) tại $K(6;-1;9)$

$$\overline{u_\Delta} = \left[\overline{AB},\overline{n_\alpha}\right] = (1;7;11)$$

Vậy đường thẳng cần tìm đi qua điểm K và có vtcp $\vec{u_\Delta}$ nên có phương trình là

$$\Delta: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 7t \\ z = 9 + 11t \end{cases}$$

Bài 4:

Gọi $N = d \cap \Delta \Rightarrow N(2 + 2t;t;-2 + t)$

Ta có: $\overline{MN} = (1 + 2t;t + 1;-2 + t)$ và mp(P) có vtpt $\vec{n} = (2;-1;-1)$

d tạo với (P) góc 30^0 nên:

$$\sin 30^0 = \left|\cos\left(\overline{MN},\vec{n}\right)\right| = \frac{|2 + 4t - t - 1 + 2 - t|}{\sqrt{(1+2t)^2 + (t+1)^2 + (t-2)^2}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t+3|}{\sqrt{6t^2 + 2t + 6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 10t^2 - 18t = 0 \Leftrightarrow t = 0;\ t = \frac{9}{5}$$

+ Với $t = 0$, phương trình $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{t} = \frac{z}{-2}$

+ Với $t = \frac{9}{5}$, phương trình $\Delta: \frac{x-1}{23} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{-1}$

5:

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của Δ với d_1 và d_2

$M(-1 + 2t_1;3 + t_1;1 + t_1)$, $N(-3 + 3t_2;-t_2;-1 + t_2)$

Ta có: $\overline{MN} = (3t_2 - 2t_1 - 2;\ -t_2 - t_1 - 3;\ t_2 - t_1 - 2)$ và vtpt của (P) $\vec{n} = (1;-1;2)$

Δ // (P) nên:

$\overline{MN}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3t_2 - 2t_1 - 2 + t_2 + t_1 + 3 + 2t_2 - 2t_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 6t_2 - 3t_1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow t_1 = 2t_2 - 1$ (1)

Theo giả thiết

$$d[\Delta,(P)] = \sqrt{6} \Leftrightarrow d[M,(P)] = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|-3 + 3t_2 + t_2 - 2 + 2t_2 + 5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$\Leftrightarrow |t_2| = 1 \Leftrightarrow t_2 = \pm 1$

Khi $t_2 = 1 \Rightarrow t_1 = 1$; $t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = -3$

Với $t_1 = t_2 = 1$, ta có $M(1;4;2)$, $\overline{MN} = (1;5;2) \Rightarrow \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{2}$

Với $\begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$, ta có $M(-7;0;-2)$, $\overline{MN} = (1;1;0) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -7 + t \\ y = t \\ z = -2 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

6:

Giao điểm I của d_1 và d_2 là $I(1;1;1)$.

$\overline{u_1} = (1;2;2)$ và $\overline{u_2} = (-1;-2;2)$ là các vectơ chỉ phương của d_1 và d_2

Dễ thấy $[\overline{u_1},\overline{u_2}].\overline{IM} = 0$ nên M, d_1 và d_2 đồng phẳng

Lấy $A_1(2;3;3) \in d_1$ và $B_1(-t;-1-2t;3+2t) \in d_2$ sao cho $IA_1 = A_1B_1$ thì $\overline{AB}$ cùng phương với $\overline{A_1B_1}$ (với B_1 không trùng với I)

Do $IA_1 = A_1B_1$ nên t là nghiệm của phương trình

$$9t^2 + 20t + 11 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -\frac{11}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B_1(1;1;1) \\ B_1\left(\frac{11}{9};\frac{11}{9};\frac{5}{9}\right) \end{array}\right. \Rightarrow B_1\left(\frac{11}{9};\frac{13}{9};\frac{5}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{A_1B_1} = \left(\frac{-7}{9};\frac{-14}{9};\frac{-22}{9}\right)$$

Vậy Δ qua $M(0;-1;2)$ có phương trình chính tắc: $\frac{x}{7} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-2}{22}$

7:

Gọi H là hình chiếu của I trên $\Delta \Rightarrow H \in (Q)$ qua I và vuông góc Δ

Phương trình (Q): $-2(x-1) + (y-2) - (z-4) = 0 \Leftrightarrow -2x + y - z + 4 = 0$

Gọi $d_1 = (P) \cap (Q) \Rightarrow d_1$ có véctơ chỉ phương

$\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(0;3;3)=3(0;1;1)$ và d_1 qua I $\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=1\\y=2+t\\z=4+t\end{cases}$

Ta có $H\in d_1\Rightarrow H(1;2+t;4+t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(0;t;t)$

Theo giả thiết $IH=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2t^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-3\end{array}\right.$

TH1: $t=3\Rightarrow H(1;5;7)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-7}{-1}$

TH2: $t=-3\Rightarrow H(1;-1;1)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$

Bài 8:

Lấy $I(-1+2t;1+3t;2+t)\in\Delta$

Theo giả thiết:

$$d(I,(P))=3\Leftrightarrow\frac{\left|2(-1+2t)-1-3t-2(2+t)+3\right|}{3}=3\Leftrightarrow|t+4|=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=-13\end{array}\right.$$

Với $t=5$ thì $I(9;16;7)$ suy ra $d:\begin{cases}x=9+2t\\y=16-t\\z=7-2t\end{cases}$

Với $t=-13$ thì $I(-27;-38;-11)$ suy ra $d:\begin{cases}x=-27+2t\\y=-38-t\\z=-11-2t\end{cases}$

Bài 9:

Mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}=(1;1;-2)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$

Ta có $\overrightarrow{IA}=(2;1;2)$. Gọi vtcp của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (S) tại $A\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{IA}$

Vì $\Delta\,//\,(P)\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}$. Chọn $\vec{u}=\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{n_P}\right]=(-4;6;1)$

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=3-4t\\y=-1+6t\\z=1+t\end{cases}$

Bài 10:

Đường thẳng d_2 có phương trình tham số: $\begin{cases}x=t_1\\y=-1+2t_1;(t_1\in R)\\z=3-2t_1\end{cases}$

Tìm được $I=d_1\cap d_2\Rightarrow I(1;1;1)$

Ta có $B(1+t;1+2t;1+2t),C(t_1;-1+2t_1;3-2t_1)$.

(Để B khác I, C khác $I\Rightarrow t\neq0,t_1\neq1$)

Tam giác BIC cân đỉnh $I\Leftrightarrow\begin{cases}IB=IC\ (1)\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}\ \ (2)\end{cases}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t_1=2\end{cases}$

Từ đó có phương trình tham số của đường thẳng $d_3:\begin{cases}x=2\\y=3\ \ ;(t\in R)\\z=1+2t\end{cases}$

Bài 11:

Ta có $D\in\Delta\Rightarrow D(1+t;t;-1+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;2;-2),\overrightarrow{AD}=(t;t-1;2t-2)$.

Theo đề bài

$\widehat{BAD}=90^0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow1.t+2(t-1)-2(2t-2)=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow D(3;2;3)$.

Từ đó ta được $\overrightarrow{u_{BC}}=\overrightarrow{AD}=(2;1;2)$. Vậy phương trình của đường thẳng *BC* là

Thay $\begin{cases}x=2+2t\\y=3+t\\z=-1+2t\end{cases}\Rightarrow C(2+2c;3+c;-1+2c)$.

Mặt khác do *C* thuộc mp(*P*) nên ta có

$2+2c-(3+c)-(-1+2c)+2=0\Leftrightarrow c=2\Rightarrow C(6;5;3)$.

Ta có $\overrightarrow{CD}=(-3;-3;0)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=(1;1;0)$.

Vậy phương trình của *d* là $\begin{cases}x=3+t\\y=2+t\\z=3.\end{cases}$

Bài 12:

Do A, B lần lượt thuộc Δ_1,Δ_2 nên

$A(-1+2t;3-4t;2+t)$; $B(1+s;3-s;5+2s)\Rightarrow I\left(\dfrac{2t+s}{2};\dfrac{6-4t-s}{2};\dfrac{7+t+2s}{2}\right)$

Theo giả thiết $I(2;0;6)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2t+s}{2}=2\\\dfrac{6-4t-s}{2}=0\\\dfrac{7+t+2s}{2}=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\s=2\end{cases}$

Khi đó: $A(1;-1;3),B(3;1;9)$

Đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua hai điểm A, B nên có phương trình: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{3}$

Bài 13:

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{p} = (3;-1;0)$ và mặt phẳng (Q) có véctơ pháp tuyến $\vec{q} = (1;3;4)$

Giao tuyến *d* của *(P)* và *(Q)* có véctơ chỉ phương

$\vec{u} = [\vec{p};\vec{q}] = (-4;-12;10) = -2(2;6;-5)$

Do Δ / /d nên Δ có véctơ chỉ phương $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u} = (2;6;-5)$

Do đó, Δ có phương trình $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-2}{-5}$

Bài 14:

Gọi $A(t;4-t;-1+2t); B(u;2-3u;-3u); C(-1+5v;1+2v;-1+v)$ lần lượt nằm trên ba đường thẳng d_1, d_2, d_3.

Do A, B, C thẳng hàng và AB = BC ⇔ B là trung điểm của AC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+(-1+5v)=2u \\ 4-t+(1+2v)=2.(2-3u) \\ -1+2t+(-1+v)=2(-3u) \end{cases}$$

Giải hệ trên được: t = 1; u = 0; v = 0

Suy ra $A(1;3;1); B(0;2;0); C(-1;1;-1)$

Đường thẳng Δ đi qua A, B, C có phương trình $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$

Bài 15:

Nhận xét: $M \notin d_1$ và $M \notin d_2$

Giả sử $\begin{cases} \Delta \cap d_1 = I \\ \Delta \cap d_2 = H \end{cases}$

Vì $I \in d_1 \Rightarrow I(2t;-1-2t;2+t)$; $H \in d_2 \Rightarrow H(4t';-2;3t')$

Theo giả thiết

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{TM} = k\overrightarrow{HM} \\ k \in R, k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t = k(1-4t') \\ 3+2t = k(2+2) \\ 1-t = k(3-3t') \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{23}{10} \Rightarrow I\left(-\frac{23}{5};\frac{18}{5};-\frac{3}{10}\right)$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua điểm M và có vtcp $\overrightarrow{IH}$ là: $\begin{cases} x = 1+56t \\ y = 2-16t \\ z = 3+33t \end{cases}$

Bài 16:

Ta có $\vec{u_d} = (2;1;3)$ và $\vec{n_P} = (1;-1;-1) \Rightarrow \left[\vec{u_d};\vec{n_P}\right] = (2;5;-3)$

Vì đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và Δ vuông góc với (P) nên đường thẳng Δ nhận $\vec{u} = (2;5;-3)$ làm vectơ chỉ phương.

Vậy đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

Bài 17:

Giả sử Δ cắt d tại $B \Rightarrow B(3+t;1+2t;5+4t)$. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ khi đó OH ≤ OA do đó OH lớn nhất khi H trùng A, như vậy đường thẳng Δ cần lập vuông góc với OA ⇔ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA} = 0$

Mà $\overrightarrow{AB} = (t+1;2t-2;4t+4); \overrightarrow{OA} = (2;3;1)$,

nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow 2t+2+6t-6+4t+4=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow B(3;1;5)$

Vậy $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-5}{4}$

Bài 18:

Giả sử B là giao điểm của d và Δ $\Rightarrow B(1+3t;-1+t;2t)$

Vì AB // (P) nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow B(1;-1;0)$

Vậy đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$

Bài 19:

a. Đường thẳng AB có VTCP :$\vec{u}_{AB}$ =(1;0;0) nên phương trình tham số của

AB: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Đường thẳng AB cắt (P) tại M(0;1;1)

d ⊂ (Q), (Q) đi qua AB và (Q) ⊥ (P), mp(P) có VTPT $\overrightarrow{n_p} = (1;1;1)$

Mặt phẳng (Q) có VTPT: $\overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}_{AB},\overrightarrow{n_p}\right] = (0;-1;1)$.

d ⊂ (P) nên d có VTCP $\vec{u} = \left[\vec{n}_Q,\overrightarrow{n_P}\right] = (-2;1;1)$

Đường thẳng d đi qua M(0;1;1) và có vtcp $\vec{u}$ nên có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

b. Đường thẳng AB có VTCP $\vec{u} = (1;0;0)$. Trung điểm của AB là I(2;1;1)

(Q) là mặt phẳng trung trực của $AB \Rightarrow (Q): x-2$

M cách đều A và $B \Rightarrow M \in (Q)$. Mặt khác $M \in (P) \Rightarrow M \in \Delta = (P) \cap (Q)$

Mọi điểm trên Δ có toạ độ thoả mãn hệ: $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-2=0 \end{cases}$

Vậy Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow M(2; t; -t)$

Do ΔMAB đều nên $MA = AB = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3 + 2t^2} = 2 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy có hai điểm thoả mãn là $M\left(2; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $M\left(2; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Bài 20:

a. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 0; -4)$ nên vtcp AB là $\vec{u}_{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 0; -2)$

Vậy phương trình tham số cuả đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - 2t \end{cases}$

Đường thẳng AB cắt (P) tại điểm M có toạ độ thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - 2t \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{4}; 0; \dfrac{9}{2}\right)$$

$d \subset (P)$ và vuông góc với AB nên d có VTCP $\vec{u} = \left[\vec{n}_P, \vec{u}_{AB}\right]$

với $\vec{n}_P = (2, 1, -1)$ và $\vec{u}_{AB} = (1; 0; -2)$ nên $\vec{u} = (-2; 3; -1)$

Đường thẳng d cắt AB nên d đi qua điểm M

Vậy phương trình chính tắc của d là: $\dfrac{x + \frac{1}{4}}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z - \frac{9}{2}}{-1}$

b. Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz - d = 0$

với tâm I(a;b;c), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Do O, A, B $\in$ (S) nên ta có hệ $\begin{cases} d = 0 \\ 16 - 8c + d = 0 \\ 4 - 4a + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$

Vậy $(S): (x - 1)^2 + (y - b)^2 + (z - 2)^2 = b^2 + 5$ nên (S) có tâm I(1;b;2), bán kính $R = \sqrt{b^2 + 5}$

Mặt khác (S) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Rightarrow \dfrac{|b + 5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{b^2 + 5} \Rightarrow b = 1$

Vậy (S) có phương trình là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$

Bài 21:

Đường thẳng Δ cắt d' tại điểm Q có tung độ bằng 4 nên Q(1;4;4)

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của Δ (a, b, c không đồng thời bằng 0).

Do Δ song song với (P) và vuông góc với d nên ta có hệ:

$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \end{cases}$ cộng, trừ vế với vế ta có: $\begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases}$

Đường thẳng Δ đi qua Q(1;4;4) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-c; -c; c)$ có phương trình: $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 4}{1} = \dfrac{z - 4}{-1}$

Bài 22:

Gọi M là giao điểm của d và d'

Khi đó $M(1 + 3t; -1 + 2t; 2 - 2t)$ và $\overrightarrow{AM} = (3t; -1 + 2t; 4 - 2t)$

Gọi $\vec{n} = (2; -1; 2)$ là tọa độ VTPT của (P), gọi φ là góc giữa đường thẳng d và giá của $\vec{n}$ khi đó

$$\cos\varphi = \frac{|6t + 1 - 2t + 8 - 4t|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{9t^2 + (-1 + 2t)^2 + (4 - 2t)^2}} = \frac{3}{\sqrt{17t^2 - 20t + 17}} \quad (*).$$

d tạo với (P) góc lớn nhất khi và chỉ khi d tạo với giá của vectơ pháp tuyến của (P) một góc nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos\varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow f(t) = 17t^2 - 20t + 17$ nhỏ nhất

Mà $\min f(t) = -\dfrac{\Delta'}{a} = \dfrac{189}{17} \Leftrightarrow t = \dfrac{10}{17} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{30}{17}; \dfrac{3}{17}; \dfrac{48}{17}\right)$

Khi đó phương trình d có dạng: $\dfrac{x - 1}{10} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z + 2}{16}$

Bài 23:

Do $\Delta \subset (\alpha), \Delta \perp d \Rightarrow$ vtcp $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; -1; 1)$

Gọi $I = d \cap (\alpha) \Rightarrow I(1; 2; 4)$

Gọi d' qua I, nằm trong (α) và vuông góc với $\Delta \Rightarrow$ vtcp $\overrightarrow{u_{d'}} = (0; 1; 1)$

$\Rightarrow d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$

Gọi $M(1; 2 + t; 4 + t) \in d'$: $MI = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow t = \pm 3 \Rightarrow M(1; 5; 7), M(1; -1; 1)$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$d: \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 5}{-1} = \dfrac{z - 7}{1}; \ \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 1}{-1} = \dfrac{z - 1}{1}$

Bài 24:

Gọi *A* là giao điểm của d_1 và mặt phẳng (*P*).

Toạ độ *A* là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{2}\\ x-2y+z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\Rightarrow A(1;1;2)\\ z=2\end{cases}$$

Gọi B là giao điểm của d_1 và mặt phẳng (P).

Toạ độ B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x-2y+z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=5\Rightarrow B(7;5;4)\\ z=4\end{cases}$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(6;4;2)$. Đường thẳng cần tìm là đường thẳng AB có VTCP là $\vec{u}=(3;2;1)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+2t\\ z=2+t\end{cases}$

Bài 25:

Lấy $A(7+a;4+2a;9-a)\in d_1, B(3-7b;1+2b;1+3b)\in d_2, C(c;0;0)$

B là trung điểm AC $\Leftrightarrow\begin{cases}7+a+c=2(3-7b)\\ 4+2a=2(1+2b)\\ 9-a=2(1+3b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=-16\end{cases}$

$\Rightarrow A(8;6;8), B(4;3;4)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=(12;3;4)$

Đường thẳng Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=-4+12t\\ y=3+3t\\ z=4+4t\end{cases}$

Bài 26:

Viết được phương trình $(ABC): 6x-2y+3z-3=0$.

D thuộc d $\Rightarrow D(t;1+t;3-2t)$.

Tính được khoảng cách: $d(D,(ABC))=\dfrac{|-2t+4|}{7}$.

Tính được $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{7}{2}$.

Sử dụng $V_{D.ABC}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=5\end{array}\right.\Rightarrow D(-1;0;5), D'(5;6;-7)$.

Đường thẳng Δ cần lập là giao tuyến của hai mặt phẳng:

(P) qua A và vuông góc BC và mặt phẳng (Q) qua B và vuông góc AC.

Từ đó viết được phương trình Δ

§ 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Phương trình chính tắc của mặt cầu (S)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R khi đó mặt cầu (S) có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (1)

Đặc biệt khi $I\equiv O$ thì $(S): x^2+y^2+z^2=R^2$

II. Phương trình tổng quát của mặt cầu (S)

Từ (1) khai triển ra ta được

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2=R^2$ (2)

Đặt $d=a^2+b^2+c^2-R^2$ khi đó

(2) $\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (3) điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$

(3) là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$

và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

III. Vị trí tương đối của một điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ với mặt cầu (S)

Cách 1: Phương tích của một điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ với mặt cầu (S)

Giả sử phương trình mặt cầu (S) ở dạng tổng quát, khi đó

Phương tích $\mathcal{P}(M_0,(S))=x_0^2+y_0^2+z_0^2-2ax_0-2by_0-2cz_0+d$

Nếu $\mathcal{P}>0\Leftrightarrow$ điểm M_0 nằm ngoài mặt cầu (S)

Nếu $\mathcal{P}<0\Leftrightarrow$ điểm M_0 nằm trong mặt cầu (S)

Nếu $\mathcal{P}=0\Leftrightarrow$ điểm M_0 nằm trên mặt cầu (S)

Cách 2: Tính khoảng cách từ tâm I đến điểm M_0 và so sánh với bán kính R

Nếu $IM_0>R\Leftrightarrow$ điểm M_0 nằm ngoài mặt cầu (S)

Nếu $IM_0<R\Leftrightarrow$ điểm M_0 nằm trong mặt cầu (S)

Nếu $IM_0=R\Leftrightarrow$ điểm M_0 nằm trên mặt cầu (S)

IV. Vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (P)

Tính khoảng cách $d=IH$ từ tâm I đến mặt phẳng (P) và so sánh với bán kính R

Nếu $d>R\Leftrightarrow(P)\cap(S)=\varnothing\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S)

Nếu $d<R\Leftrightarrow(P)\cap(S)=(C)\Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến (thiết diện) là một đường tròn (C), đường tròn này

+ Có tâm H là hình chiếu của tâm I trên mặt phẳng (P)

+ Bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$

Đặc biệt khi (P) đi qua tâm của mặt cầu (S) thì $I \equiv H, R \equiv r$ và đường tròn (C) được gọi là đường tròn lớn

- Nếu $d = R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = M \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M khi đó mặt phẳng (P) gọi là tiếp diện và điểm M gọi là tiếp điểm

V. Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và mặt cầu (S)

Tính khoảng cách $d = IH$ từ tâm I đến đường thẳng Δ và so sánh với bán kính R

- Nếu $d > R \Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \varnothing \Leftrightarrow$ đường thẳng Δ không cắt mặt cầu (S)
- Nếu $d < R \Leftrightarrow \Delta \cap (S) = \{A, B\} \Leftrightarrow$ đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B
- Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta \cap (S) = M \Leftrightarrow$ đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M khi đó điểm M gọi là tiếp điểm

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Viết phương trình mặt cầu

Để viết được phương trình mặt cầu ta phải xác định được tâm và bán kính của mặt cầu và sử dụng công thức (1) hoặc công thức (3)

Thông thường dựa vào các dữ kiện của giả thiết để thiết lập các hệ, các phương trình từ đó tìm được tâm và bán kính

Chú ý:

Một điểm $M_o \in (S) \Leftrightarrow$ Tọa độ điểm M_o phải thỏa mãn phương trình mặt cầu hoặc $IM_o = R$

Một mặt phẳng (P) tiếp xúc với một mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,(P)) = R$

Một đường thẳng Δ tiếp xúc với một mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d(I,\Delta) = R$

THÍ DỤ MINH HỌA

***Thí dụ 1:* (ĐH – B 2012)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0), B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua *A*, *B* và có tâm thuộc đường thẳng *d*.

Giải:

Cách 1:

Gọi tâm mặt cầu là $I \in d \Leftrightarrow I(1+2t;t;-2t)$

$IA^2 = 9t^2 - 6t + 2$, $IB^2 = 9t^2 + 14t + 22$

Mặt cầu (S) đi qua điểm A, B nên $IA = IB = R \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow I(-1;-1;2)$, bán kính $R = IA = \sqrt{17}$

Vậy phương trình mặt cầu là : $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$

Cách 2:

Nhận xét: Tam giác IAB cân tại I nên mặt phẳng trung trực (P) của AB đi qua tâm I

Mặt phẳng (P) đi qua $H(0;2;1)$ là trung điểm của AB và nhận vecto $\overrightarrow{AB} = (-4;2;2) = -2(2;-1;-1)$ làm vtpt có phương trình là

$2(x-0) - 1(y-2) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 3 = 0$

Tọa độ tâm $I = d \cap (P)$ là nghiệm của phương trình

$2(1+2t) - (t) - (-2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-1;-1;2)$, bán kính $R = IA = \sqrt{17}$

Vậy phương trình mặt cầu là : $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(2;0;1); B(1;0;0); C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng *(P)*

Giải:

Mặt cầu (S) có dạng : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*)

(S) qua A, B, C ta thay tọa độ của A, B, C vào (*) ta được hệ ba phương trình :

$$\begin{cases} 4a + 2c - d = 5 \\ 2a - d = 1 \\ 2a + 2b + 2c - d = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 4 \\ d = 2a - 1 \\ b + c = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow (S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Giải:

Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = t \end{cases}$

Điểm $I \in \Delta \Leftrightarrow I(1+2t;3+4t;t)$

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P)

$\Leftrightarrow d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2(1+2t) - (3+4t) + 2t|}{3} = 1 \Leftrightarrow |2t-1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$

- Với $t = 2 \Rightarrow I_1(5;11;2) \Rightarrow$ Pt mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1$
- Với $t = -1 \Rightarrow I_2(-1;-1;-1) \Rightarrow$ Pt mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

Thí dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 4 = 0$

1. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P).
2. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$, có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với (P).

Giải:

VTPT của (P) là $\overrightarrow{n_P} = (1; 1; 1)$

1. Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) thì : Δ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$

H là hình chiếu của A lên (P) thì H = (Δ) ∩ (P) nên tọa độ H thỏa :

$$\begin{cases} x+y+z+4=0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \\ z=1 \end{cases}.\ \text{Vậy } H(-1;-4;1)$$

2. Ta có $AB = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ và $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-2)$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = \frac{AB}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$(AB): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Vì tâm $I \in (AB) \Rightarrow I(t-1;-t;t+1)$

(S) tiếp xúc (P) nên d (I; (P)) = R $\Leftrightarrow |t+4| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=-5 \end{array}\right. \Rightarrow I(-4;3;-2)$ hoặc $I(-6;5;-4)$

Vậy ta có hai mặt cầu thỏa yêu cầu đề bài :

$(S_1): (x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$ hoặc $(S_2): (x+6)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$

Thí dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (α): 2x – y + 2z + 1 = 0 và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$

1. Tìm tọa độ giao điểm của d với (α). Tính sin của góc giữa d và (α).
2. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d tiếp xúc với hai mặt phẳng (α) và (Oxy)

Giải:

1. Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mp(α) là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2} \\ 2x-y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \\ 2x-y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2};2;-1\right)$$

d có VTCP $\vec{u} = (1;2;-2)$; (α) có VTPT $\vec{n} = (2;-1;2)$. Gọi φ là góc giữa d và (α)

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{4}{9}$$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mp(Oxy) là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2} \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \Rightarrow B(1;1;0) \\ z=0 \end{cases}$$

Mặt cầu có tâm I thuộc d tiếp xúc với (α) và (Oxy) ⇒ Tâm I là trung điểm AB

Tâm $I\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R = d(I;(Oxy)) = \frac{1}{2}$

Phương trình mặt cầu cần tìm $(S): \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$

Viết phương trình mặt cầu có tâm *I* thuộc đường thẳng d, tâm *I* cách mặt phẳng (*P*) một khoảng bằng 2 và mặt cầu cắt mặt phẳng (*P*) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3

Viết phương trình mặt phẳng (R) qua d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất .

Giải:

Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng d và tâm I cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2 .

Nếu $I \in d \Rightarrow I = (-t;-1+2t;2+t)$

$$\Leftrightarrow h(I,P) = \frac{|-2(t)-(2t-1)-2(2+t)-2|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Leftrightarrow |-6t-5| = 6$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6t+5=6 \\ 6t+5=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{6} \\ t=-\frac{11}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1\left(-\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{13}{6}\right) \\ I_2\left(\frac{11}{6};-\frac{14}{3};\frac{1}{6}\right) \end{array}\right.$$

Do đó :

Với $I_1\left(-\frac{1}{6};-\frac{2}{3};\frac{13}{6}\right); R_1 = \sqrt{(2)^2+9} = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow (S_1): \left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \left(y+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{13}{6}\right)^2 = 13$$

Với $I_2\left(\frac{11}{6};-\frac{14}{3};\frac{1}{6}\right); R_2 = \sqrt{(2)^2+9} = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow (S_2): \left(x-\frac{11}{6}\right)^2 + \left(y+\frac{14}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{6}\right)^2 = 13$$

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng : $\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} \\ \frac{x}{-1} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$.

Do vậy mặt phẳng (R) qua d thì (R) thuộc chùm : $2x+y+1+m(x+z-2)=0$

Hay $mp(R):(2+m)x+y+mz+1-2m=0$ (*).

Mp(R) có $\vec{n_1}=(m+2;1;m);\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-2)$.

Vậy :

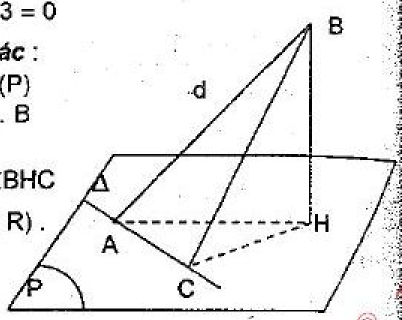
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_P}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_P}\right|}=\frac{2(m+2)+1-2m}{\sqrt{(m+2)^2+1+m^2}\sqrt{4+1+4}}$$

$$=\frac{5}{3\sqrt{2m^2+4m+5}}=\frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2 3}}\le\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Do α nhỏ nhất cho nên $\cos\alpha$ lớn nhất khi $m=-1$.

Vậy thay vào (*) ta có $mp(R)$: $x+y-z+3=0$

Chú ý : ***Dạng toán này còn có cách giải khác*** :



Giả sử (R) là mặt phẳng qua d và cắt (P) theo giao tuyến Δ và A = d giao với (P) . B là một điểm bất kỳ trên d .

Kẻ $BH\perp(P), BC\perp(\Delta)\Rightarrow\Delta\perp(BHC)\Leftrightarrow\angle BHC$

Là góc phẳng của nhị diện tạo bởi (P) và (R) .

Vì $HC\perp\Delta\Rightarrow HC\le HA$

$\Leftrightarrow\tan\alpha=\frac{BH}{HC}\ge\frac{BH}{HA}=$ hằng số .

Nên α có giá trị nhỏ nhất khi C trùng với A $\Leftrightarrow d\perp\Delta$.

Vậy (R) là mặt phẳng qua AB và cắt (P) theo giao tuyến $\Delta\perp(ABH)$.

Ta có : $\overrightarrow{v_d}=(-1;2;1),\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-3;0;-3)//\overrightarrow{v_\Delta}=(1;0;1)$

Mặt khác ta lại có : $\left[\overrightarrow{v_d},\overrightarrow{v_\Delta}\right]=(2;2;-2)//(1;1;-1)=\overrightarrow{n_R}$

Để ý $M(0;-1;2)$ thuộc d nằm trong (R).

Ta có phương trình mặt phẳng

$(R):x+y+1-(z-2)=0$ hay $(R): x+y-z+3=0$

Đáp số: $(S_1):\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{13}{6}\right)^2=13$

hoặc $(S_2):\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y+\frac{14}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2=13$

Thí dụ 7: **(ĐH – D 2012)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):2x+y-2z+10=0$ và điểm $I(2;1;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Giải:

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Ta có $IH=d(I,(P))=\frac{|4+1-6+10|}{\sqrt{9}}=3$

Mặt khác theo định lý pitago ta có $R^2=IH^2+r^2=9+16=25$

Vậy phương trình mặt cầu có tâm I, bán kính $R=5$ có phương trình là

$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$.

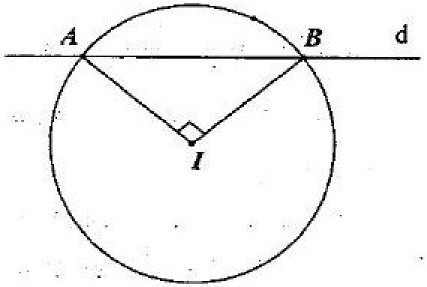
hí dụ 8: **(ĐH – A A_1 2012)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

Giải :

ách 1:

Chọn $M(-1;0;2)\in d$, gọi $\overrightarrow{u_d}=(1;2;1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Ta có ΔIAB vuông cân tai I và ΔIHB vuông cân tại H (với H là trung điểm của AB)



$$\Rightarrow\begin{cases}IH=HB=\frac{AB}{2}\\HB=R\cos45^0=\frac{R\sqrt{2}}{2}\\IH=d(I,d)=\frac{\left|[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{u_d}]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow R=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

với $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{u_d}]=(-2;0;2)$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm I, bán kính R là : $x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{8}{3}$.

hú ý: Để tính IH ta có thể tìm tọa độ điểm H như sau

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua I góc với đường thẳng d, tọa độ $H=(P)\cap d\Rightarrow IH$

Giả sử $H(-1-t;2t;2+t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}$. Áp dụng $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow t\Rightarrow IH$

ách 2:

Chuyển d về dạng tham số d : $\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$

Gọi $\begin{cases}A(a-1;2a;a+2)\\B(b-1;2b;b+2)\\I(0;0;3)\end{cases}$ với $a\ne b$

$\Rightarrow \vec{IA} = (a-1;2;a-1); \vec{IB} = (b-1;2b;b-1)$

$\Rightarrow IA^2 = 2(a-1)^2 + 4a^2 = 6a^2 - 4a + 2; IB^2 = 2(b-1)^2 + 4b^2 = 6b^2 - 4b + 2$

Vì ΔIAB vuông cân tại I nên

$$\begin{cases} \vec{IA}.\vec{IB} = 0 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1)(b-1) + 4ab = 0 \\ 6a^2 - 4a + 2 = 6b^2 - 4b + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3ab - (a+b) + 1 = 0 & (1) \\ (a-b)\left[6(a+b) - 4\right] = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) vì $a \neq b \Leftrightarrow a + b = \frac{2}{3}$ thế vào (1)

Ta được $ab = -\frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \\ b = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow IA^2 = \frac{8}{3}$

Vậy $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$

Cách 3:

Gọi $\begin{cases} A(a-1;2a;a+2) \\ B(b-1;2b;b+2) \\ I(0;0;3) \end{cases}$ với $a \neq b$

Giả sử phương trình mặt cầu (S) tâm I có dạng $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = R^2$ với

$R^2 = \frac{AB^2}{2} = 3(a-b)^2$

$$\begin{cases} A \in (S) \Leftrightarrow (S): (a-1)^2 + (2a)^2 + (a-1)^2 = 3(a-b)^2 \\ B \in (S) \Leftrightarrow (S): (b-1)^2 + (2b)^2 + (b-1)^2 = 3(a-b)^2 \end{cases} \dots$$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} a = \\ b = \end{cases} \Rightarrow R \Rightarrow (S)$

Thí dụ 9: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm *A*(0;0;–2) và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ *A* đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm *A*, cắt Δ tại hai điểm *B* và *C* sao cho *BC* = 8.

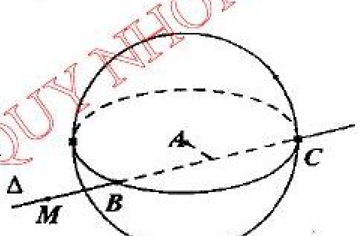
Giải :

Tính khoảng cách từ A đến Δ

- Đường thẳng Δ đi qua điểm qua $M(-2;2;-3)$ và có vtcp: $\vec{u} = (2;3;2)$
- Ta có $\overline{MA} = (2;-2;1)$ và $\left[\vec{u}, \overline{MA}\right] = (7;2;-10) \Rightarrow \left|\left[\vec{u}, \overline{MA}\right]\right| = \sqrt{49+4+100} = \sqrt{153}$,

$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

Khi đó $d(A,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{a}; \overline{MA}\right]\right|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} = 3$



Viết phương trình mặt cầu

Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ,

Suy ra H là trung điểm của BC $\Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = 4$

Bán kính mặt cầu (*S*) được xác định là

$R = AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{d^2(A,\Delta) + \frac{BC^2}{4}} = 9 + 16 = 25$

(tam giác AHB vuông tại H)

Vậy mặt cầu (*S*) có tâm A và bán kính R có phương trình

$(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

Nhận xét:

Để tính khoảng cách từ A tới đường thẳng Δ ta có thể làm như sau

Cách 1:

Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng Δ, suy ra $H \in \Delta$, tính $\Rightarrow \overline{AH}$, vì $AH \perp \Delta \Leftrightarrow \overline{AH}\vec{u} = 0 \Rightarrow$ tọa độ điểm $H \Rightarrow d(A,\Delta) = AH$

Cách 2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng Δ.

Khi đó $H = (P) \cap \Delta \Rightarrow$ tọa độ điểm $H \Rightarrow d(A,\Delta) = AH$

Thí dụ 10: Trong không gian với tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A, B, C, D có tọa độ xác định bởi hệ thức $A(2;4;-1)$, $\overline{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}; C = (2;4;3); \overline{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Chứng minh rằng : $AB \perp AC, AC \perp AD, AD \perp AB$. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

Viết phương trình tham số đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABD).

Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Viết phương trình tiếp diện (α) của cầu (S) song song với mặt phẳng (ABD).

Giải:

Chứng minh rằng : $AB \perp AC, AC \perp AD, AD \perp AB$.

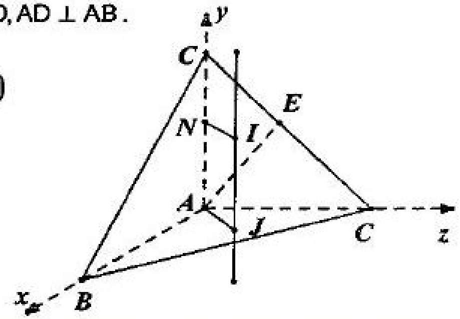
Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

Ta có : $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3)$

và $D(2;2;-1)$ suy ra :

$$\begin{cases} \overline{AB} = (-1;0;0) \\ \overline{AC} = (0;0;4) \\ \overline{AD} = (0;-2;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB}\overline{AC} = 0 \\ \overline{AC}.\overline{AD} = 0 \\ \overline{AD}.\overline{AB} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow AB \perp AC; AC \perp AD, AD \perp AB$.



2. Viết phương trình tham số đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABD).

Do Δ là đường vuông góc chung cho nên :

$$\begin{cases}\Delta \perp AB \\ \Delta \perp CD\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ -2 & -4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & -1\\ -4 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right)$$

$$= (0;-4;2) // \vec{u} = (0;2;-1) \Leftrightarrow \Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 - t\end{cases}$$

Vì : $\overrightarrow{CD} = (0;-2;-4)$ và Δ qua $A(2;4;-1)$

Mặt phẳng (ABD) qua $A(2;4;-1)$ có

$\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (0;0;4) // \vec{k} = (0;0;1) \Rightarrow (ABD) : z + 1 = 0$

Gọi $\varphi = (\Delta; ABD) \Rightarrow \sin\varphi = \cos\left(\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{k}\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{4+1}.1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

3. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Viết phương trình tiếp diện (α) của cầu (S) song song với mặt phẳng (ABD).

Cách 1:

Gọi (S) : $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0\left(a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = d > 0\right)$ (2)

- Mặt cầu (S) qua $A(2;4;-1)$ suy ra : $4a + 8b - 2c - d = 21$ (1)
- Mặt cầu (S) qua $B(1;4;-1)$ suy ra : $2a + 8b - 2c - d = 18$ (2)
- Mặt cầu (S) qua $C(2;4;3)$ suy ra : $4a + 8b + 6c - d = 29$ (3)
- Mặt cầu (S) qua $D(2;2;-1)$ suy ra : $4a + 4b - 2c - d = 9$ (4)

Như vậy giải hệ bốn phương trình trên ta có :

$$a = \frac{3}{2}; b = 4, c = 1; d = 8 \Leftrightarrow (S) = x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 8y - \frac{1}{2}z + 8 = 0$$

Cách 2:

- Tâm của đường tròn đáy của tam giác (ABC) là J là trung điểm của BC, suy ra $J\left(\frac{3}{2};4;1\right)$
- Lập phương trình đường thẳng d qua J và vuông góc với (ABC) cho nên d có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{k} = (0;0;1) \Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 4 \\ z = 1 + t\end{cases}$

Lập phương trình mặt phẳng (P) qua $K(2;3;-1)$ là trung điểm của AD và vuông góc với AD suy ra (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1) \Rightarrow (P) : z - 1 = 0$.

Tâm I của cầu (S) là giao của d với (P) cho nên I có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 4 \\ z = 1 + t \\ z - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow 1 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \leftrightarrow I = \left(\frac{3}{2};4;1\right)$$

Tính bán kính R bằng

$$IA = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow (S) : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Vdụ 11: Trong không gia tọa độ Oxyz, cho bốn điểm

$A(1;-1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(4;3;2)$ và $D(4;-1;2)$.

Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng Oxy. Hãy viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A', B, C, D.

Viết phương trình tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tại điểm A'.

Giải:

Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

$$\text{Ta có : }\begin{cases}\overrightarrow{AB} = (0;4;0) \\ \overrightarrow{AC} = (3;4;0) \\ \overrightarrow{AD} = (3;0;0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = 3.\begin{vmatrix}4 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{A, B, C, D đồng phẳng}$$

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng Oxy. Hãy viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A', B, C, D.

Nếu A' là hình chiếu của A trên (Oxy) thì $A'(1;-1;0)$

Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm thì (S):

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0\left(a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = d > 0\right)$ (*)

(S) qua $A'(1;-1;0)$ thì $1 + 1 - 2a + 2b + d = 0 \Leftrightarrow 2a - 2b - d = 2$ (1)

(S) qua $B(1;3;2)$ thì :

$1 + 9 + 4 - 2a - 6b - 4c + d = 0 \Leftrightarrow 2a + 6b + 4c - d = 14$ (2)

(S) qua $C(4;3;2)$ thì :

$16 + 9 + 4 - 8a - 6b - 4c + d = 0 \Leftrightarrow 8a + 6b + 4c - d = 29$ (3)

(S) qua $D(4;-1;2)$ thì :

$16 + 1 + 4 - 8a + 2b - 4c + d = 0 \Leftrightarrow 8a - 2b + 4c - d = 21$ (4).

Từ bốn phương trình trên ta có một hệ.

Giải hệ ta tìm được : $a = \frac{5}{2}, b = 2, c = 1, d = 1$.

Thay vào (*) : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 4y - 2z - 1 = 0$

3. Viết phương trình tiếp diện (P) của mặt cầu (S) tại điểm A'.

Nếu (P) là tiếp diện của (S) tại $A'(1;-1;0)$ thì : $\overline{IA} = \left(\frac{3}{2};3;1\right) // \vec{n} = (3;6;2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Cho nên $(P): 3(x-1) + 6(y+1) + 2z = 0$ hay $(P): 3x + 6y + 2z + 3 = 0$

Thí dụ 12: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho bốn điểm

$A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$

1. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.
2. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải:

1. Giả sử phương trình mặt cầu có dạng

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Mặt cầu (S) đi qua A, B, C, D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}; b = \frac{3}{2}; c = \frac{3}{2}; d = 0.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$

2. Mp (ABC) đi qua A và có VTPT là $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (-9;-9;-9)$ nên có phương trình $x + y + z - 6 = 0$

d đi qua tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ của (S) và ⊥ với mp (ABC) có phương trình:

$$x = \frac{3}{2} + t,\ y = \frac{3}{2} + t,\ z = \frac{3}{2} + t$$

Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là giao điểm H của d và mp(ABC) $\Rightarrow H(2;2;2)$.

Dạng 2: Tìm điểm liên quan tới mặt cầu

Xem lại lý thuyết vị trí tương đối của điểm với mặt cầu, mặt phẳng với mặt cầu, đường thẳng với mặt cầu

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$

a. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3

b. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất

Giải:

a. Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$ có tâm $I(-1;2;-1)$ và có bán kính $R = 3$

Mặt phẳng (Q) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r = R = 3$ nên (Q) chứa I

(Q) có cặp vtcp là $\overline{OI} = (1;-2;-1), \vec{i} = (1;0;0)$

Suy ra (Q) có vtpt $\vec{n} = (0;-1;2)$

Phương trình mặt phẳng (Q) là : $0(x-0) - 1(y-0) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow y - 2z = 0$

b. **Cách 1:**

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông với mặt phẳng (P)

Đường thẳng cắt (S) tại hai điểm A, B

Nhận xét : nếu $d(A,(P)) \geq d(B,(P))$ thì $d(M,(P))_{Max} \Leftrightarrow M \equiv A$

Đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Tọa độ $\{A,B\} = \Delta \cap (S)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A(-1;-1;-3), B(3;-3;1)$$

Ta có $d(A,(P)) = 7 > d(B,(P)) = 1$

Nên khoảng cách từ M tới (P) lớn nhất $M \equiv A(-1;-1;-3)$

Cách 2:

$\forall M(x_0;y_0;z_0) \in (S) \Leftrightarrow (x_0-1)^2 + (y_0+2)^2 + (z_0+1)^2 = 9$

Ta có $d(M,(P)) = \frac{1}{3}|2x_0 - y_0 + 2z_0 - 14|$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopski ta có

$$|2(x_0-1) - (y_0+2) + 2(z_0+1)| \leq \sqrt{9}\sqrt{(x_0-1)^2 + (y_0+2)^2 + (z_0+1)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow -21 \leq 2x_0 - y_0 + 2z_0 - 14 \leq -3 \Leftrightarrow 1 \leq d(M,(P)) \leq 7 \Leftrightarrow d(M,(P))_{Max} = 7$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0-1}{2} = \frac{y_0+2}{-1} = \frac{z_0+1}{2} \\ 2x_0 - y_0 + 2z_0 - 14 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow M(-1;-1;-3)$

Đáp số: a. Mặt phẳng (Q): $y - 2z = 0$ b. Điểm $M(-1;-1;3)$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x+y-z+3=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-6x-8y-2z+23=0$. Tìm trên (S) điểm M sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó hãy viết phương trình mặt cầu (T) có tâm M và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;4;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

Gọi d là đường thẳng qua I vuông góc với (P) $\Rightarrow$ PTTS của d: $\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=1-t \end{cases}$

Khi đó M là giao điểm của d với (S) $\Rightarrow$ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=1-t \\ x^2+y^2+z^2-6x-8y-2z+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=4 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases} \cup \begin{cases} t=-1 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(4;5;0), M_2(2;3;2)$

Ta thấy $d(M_1,(P))=4\sqrt{3} > d(M_2,(P))=2\sqrt{3}$. Vậy $M(4;5;0)$ là điểm cần tìm.

Mặt cầu (T) có $R'=\sqrt{MH^2+HE^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$

$\Rightarrow (T):(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=64$

Thí dụ 3: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$.

Tìm những điểm $M\in(S)$, $N\in(P)$ sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

Mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$

Tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=1$

$(P): x-2y+2z-3=0 \Rightarrow d(I;(P))=2 \Rightarrow (P)\cap(S)=\varnothing$

Giả sử tìm được $N_0(P) \Rightarrow N_0$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow N_0=(d)\cap(P)$, với: $\begin{cases} (d)\ni I(-1;2;1) \\ (d)\perp(P) \Rightarrow \overline{u_d}=(1;-2;2) \end{cases}$

$\Rightarrow d: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \end{cases} \Rightarrow N_0\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$

$(d)\cap(S)=\{M_1;M_2\} \Rightarrow M_1\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, $M_2\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)$

Vì $M_1M_0=1<M_2M_0=3$ nên $M_0\in(S)$ để M_0N_0 nhỏ nhất $\Rightarrow M_0\equiv M_1$

Vậy, những điểm cần tìm là $M\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$, $N\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$

í dụ 4: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình là: $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$, $(P): 2x+2y-z+16=0$. Điểm M di động trên (S) và điểm N di động trên (P). Tính độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN. Xác định vị trí của M, N tương ứng.

Giải:

Mặt cầu (S) tâm I(2;-1;3) và có bán kính R = 3.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P):

$$d=d(I,(P))=\frac{|2.2+2.(-1)-3+16|}{3}=5\Rightarrow d>R.$$

Do đó (P) và (S) không có điểm chung. Do vậy, $\min MN=d-R=5-3=2$.

Trong trường hợp này, M ở vị trí M_0 và N ở vị trí N_0. Dễ thấy N_0 là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và M_0 là giao điểm của đoạn thẳng IN_0 với mặt cầu (S).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với (P), thì N_0 là giao điểm của Δ và (P).

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{n}_P=(2;2;-1)$ và qua I nên có phương trình là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+2t \ (t\in\mathbb{R}). \\ z=3-t \end{cases}$

Tọa độ của N_0 ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$2(2+2t)+2(-1+2t)-(3-t)+16=0 \Leftrightarrow 9t+15=0 \Leftrightarrow t=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

Suy ra $N_0\left(-\frac{4}{3};-\frac{13}{3};\frac{14}{3}\right)$.

Ta có $\overline{IM_0}=\frac{3}{5}\overline{IN_0}$. Suy ra $M_0(0;-3;4)$

í dụ 5: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện ABCD có thể tích lớn nhất.

Giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=2$.

Phương trình mp (ABC): $2x-2y+z+1=0$

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d(D;(ABC)).S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất $\Leftrightarrow d(D;(ABC))$ lớn nhất.

Gọi D_1D_2 là đường kính của (S) vuông góc với mp(ABC).

Ta thấy với D là 1 điểm bất kỳ thuộc (S) thì

$d(D;(ABC)) \le \max\{d(D_1;(ABC)); d(D_2;(ABC))\}$.

Dấu "=" xảy ra khi D trùng với D_1 hoặc D_2.

D_1D_2 đi qua I(1;0;–1), và có VTCP là $\vec{n}_{ABC} = (2;-2;1) \Rightarrow D_1D_2: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t \\ z = -1+t \end{cases}$

Tọa độ D_1 và D_2 thỏa:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t \\ z = -1+t \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{-2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3};\frac{-4}{3};\frac{-1}{3}\right); D_2\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$$

Ta thấy: $d(D_1;(ABC)) > d(D_2;(ABC))$.

Vậy điểm $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

Thí dụ 6: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm *A*(2;1;0), *B*(1;1;–1), *C*(3;3;1) và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6z + 5 = 0$. Tìm tọa độ điểm *M* trên (*S*) sao cho *M* cách đều ba điểm *A*, *B*, *C*.

Giải:

Giả sử M(x;y;z). Điểm M cách đều A, B, C nên:

$$\begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1-t \end{cases}$$

$M \in (S)$

nên $t^2 + 9 + (1-t)^2 + 2t - 18 - 6 + 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $M\left(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}; 3; \frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-3-3\sqrt{3}}{2}; 3; \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Trong không gian toạ độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 4 = 0$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng d, tâm mặt cầu cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3 và mặt cầu cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 4.

Bài 2: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;3;4), B(1;2;-3), C(6;-1;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 1 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (α) và đi qua ba điểm A, B, C. Tìm diện tích hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (α).

Bài 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 3) và H là hình chiếu của O lên mp (ABC). Gọi D là điểm đối xứng với H qua O. Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ABCD.

Bài 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm O(0; 0; 0), A(0; 0; 4), B(2; 0; 0) và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 5 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm O, A, B và có khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{5}{3}$

Bài 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 5 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z - 13 = 0$. Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ O, qua điểm $A(5;2;1)$ và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bài 6: Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho 4 điểm A(1; –1; 2), B(1; 3; 2), C(4; 3; 2), $D(4;-1;2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + y + z - 2 = 0$. Gọi A' là hình chiếu của A lên mặt phẳng Oxy. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm A', B, C, D. Xác định toạ độ tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao của (P) và (S).

Bài 7: Trong không gian tọa độ Oxyz, lập phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng $(Q): x + 3y - 2z + 1 = 0$ và giao của mặt phẳng $(P): x - y - z + 6 = 0$ với mặt cầu (S) là đường tròn có tâm $H(-1;2;3)$ và bán kính $r = 8$.

Bài 8: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) và đường thẳng d có phương trình: $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z - 2 = 0$, $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$

a. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với đường thẳng d. Tìm tọa độ của hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng d.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

Bài 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau và vuông góc với nhau, AB là đoạn vuông góc chung của d và d'. Điểm $M(2;-2;1)$ thuộc d, điểm $N(-2;0;1)$ thuộc d' và $AM + BN = AB$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc mp$(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng trên lần lượt tại M, N biết hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu trên AB là điểm $H(0;1;2)$.

Bài 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): y + 2z - 7 = 0; (Q): x - y - 4z + 9 = 0$ và điểm $I(4;1;6)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm tại I, biết đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn AB = 6.

Bài 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích của tam giác IAB bằng 12.

Bài 12: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$.

Bài 13: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S), hai đường thẳng d_1,d_2 có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-4x-4y+2z-16=0$;

$$d_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{1}\quad d_2:\begin{cases}x=3+t\\ y=2t\\ z=-1+2t\end{cases}$$

. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1,d_2 và khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng 3.

Bài 14: Trong không gian với hệ trục Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oz, cách mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$ một khoảng bằng 2 và cắt mp (P) theo đường tròn có bán kính bằng 3.

Bài 15: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với A(–1; 0; 1), B(1; 2; -1), C(-1; 2; 3) và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz).

Bài 16: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(-1;-1;4), B(1;-1;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A,B có tâm nằm trên mp (Oyz) và tiếp xúc với mp (Oxy).

Bài 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+16=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (S), điểm N thuộc (P) sao cho đoạn thẳng MN nhỏ nhất.

Bài 18: Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $M(13;-1;0), N(12;0;4)$. Lập phương trình mặt phẳng đi qua. hai điểm M, N và tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$.

Bài 19: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ và mặt phẳng (P): $x+y+z+2012=0$.

a. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) và tiếp xúc (S)

b. Từ M thuộc (P) vẽ tiếp tuyến MN đến mặt cầu (S) ; $N\in(S)$. Xác định tọa độ điểm M sao cho độ dài đoạn MN đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 20: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-4}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích của tam giác IAB bằng 12.

Bài 21: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P_1): x-2y+2z-3=0$, $(P_2): 2x+y-2z-4=0$ và đường thẳng d: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{3}$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm $I\in d$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

Bài 22: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x-y-2z-3=0$ và đường thẳng (Δ): $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I\in\Delta$ và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 2 và mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến đường tròn (C) có bán kính r = 3.

Bài 23: Trong không gian Oxyz, cho $A(5;3;1), B(4;-1;3), C(-6;2;4), D(2;1;7)$.

Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$

Bài 24: Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD biết A(3; 2; 6), B(3; –1; 0), C(0; –7; 3) véc tơ $\overline{OD}$ ngược hướng với véc tơ $\bar{u}=(4;-2;2)$, thể tích tứ diện ABCD bằng 45. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Gọi I là tâm mặt cầu $I\in d\Rightarrow I(-t,-1+2t,1+t)$

Tâm mặt cầu cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3 nên

$$d(I,(P))=\frac{|6t+5|}{3}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\\ t=-\frac{7}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)\\ I\left(\frac{7}{3};-\frac{17}{3};-\frac{4}{3}\right)\end{array}\right.$$

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính bằng 4 nên mặt cầu có bán kính bằng $R=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(S_1):\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=25$$

hoặc $(S_2):\left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y+\frac{17}{3}\right)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=25$

Bài 2:

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ta có :

$$\begin{cases}IA=IB\\ IA=IC\\ I\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-a)^2+(3-b)^2+(4-c)^2=(1-a)^2+(2-b)^2+(-3-c)^2\\ (1-a)^2+(3-b)^2+(4-c)^2=(6-a)^2+(-1-b)^2+(1-c)^2\\ a+2b+2c-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b+7c=6\\ 5a-4b-3c=6\\ a+2b+2c-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\Rightarrow I(1;-1;1)\text{ và }R^2=IA^2=25\\ c=1\end{cases}$$

Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=25$

Tam giác ABC đều cạnh bằng $5\sqrt{2}$ nên $S_{ABC}=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

$\overline{AB}=0;-1;-7;\overline{AC}=5;-4;-3\Rightarrow\bar{p}=\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]=(-25;-35;5)$

$\cos((\alpha),(ABC))=\left|\cos\left(\overline{n_\alpha},\bar{p}\right)\right|=\dfrac{17}{15\sqrt{3}}$

Gọi S' là diện tích hình chiếu của tam giác ABC lên mặt phẳng (α)

Ta có $S'=S_{ABC}.\cos((\alpha),(ABC))=\dfrac{50\sqrt{3}}{4}\dfrac{17}{15\sqrt{3}}=\dfrac{85}{6}$ (đvdt)

Bài 3:

Phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow x+y+z-3=0$$

Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với mp (ABC).

Phương trình d là: $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$.

H là hình chiếu của O lên mp (ABC), suy ra toạ độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow H(1;1;1)$$

D là điểm đối xứng với H qua O suy ra $D(-1;-1;-1)$

Gọi $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

Vì $A\in(S)$ ta có $9+6a+d=0$ (1)

Vì $B\in(S)$ ta có $9+6b+d=0$ (2)

Vì $C\in(S)$ ta có $9+6c+d=0$ (3)

Vì $D\in(S)$ ta có $3-2a-2b-2c+d=0$ (4)

Giải hệ (1), (2), (3) và (4) ta được $a=b=c=-\dfrac{1}{2};d=-6$

Vậy $(S): x^2+y^2+z^2-x-y-z-6=0$ là phương trình mặt cầu cần tìm

Bài 5:

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S). Từ giả thiết ta có:

$$OI=AI=d(I,(P))=d(I,(Q))\Leftrightarrow\begin{cases}OI=AI\\OI=d(I,(P))\\d(I,(P))=d(I,(Q))\end{cases}$$

Ta có:

$OI=AI\Leftrightarrow OI^2=AI^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=(a-5)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\Leftrightarrow 10a+4b+2c=30$ (1)

$OI=d(I,(P))$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{|a+2b-2c+5|}{3}\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+2b-2c+5)^2$ (2)

$d(I,(P))=d(I,(Q))\Leftrightarrow\dfrac{|a+2b-2c+5|}{3}=\dfrac{|a+2b-2c-13|}{3}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+2b-2c+5=a+2b-2c-13\ (\text{loại})\\a+2b-2c+5=-a-2b+2c+13\end{array}\right.\Leftrightarrow a+2b-2c=4$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra: $b=\dfrac{17}{3}-\dfrac{11a}{6};c=\dfrac{11-4a}{3}$ (4)

Từ (2) và (3) suy ra: $a^2+b^2+c^2=9$ (5)

Thế (4) vào (5) và thu gọn ta được: $(a-2)(221a-658)=0$

Như vậy $a=2$ hoặc $a=\dfrac{658}{221}$.

Suy ra: $I(2;2;1)$ và $R=3$ hoặc $I\left(\dfrac{658}{221};\dfrac{46}{221};-\dfrac{67}{221}\right)$ và $R=3$.

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn yêu cầu với phương trình lần lượt là:

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ và $\left(x-\dfrac{658}{221}\right)^2+\left(y-\dfrac{46}{221}\right)^2+\left(z+\dfrac{67}{221}\right)^2=9$

Bài 6:

Dễ thấy $A'(1;-1;0)$

Giả sử phương trình mặt cầu (S) đi qua A', B, C, D là:

$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\ \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

Vì $A',B,C,D\in(S)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}2a-2b+d+2=0\\2a+6b+4c+d+14=0\\8a+6b+4c+d+29=0\\8a-2b+4c+d-21=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2}\\b=-1\\c=-1\\d=-1\end{cases}$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-5x-2y-2z+1=0$

(S) có tâm $I\left(\dfrac{5}{2};1;1\right)$, bán kính $R=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

Gọi H là hình chiếu của I lên (P). H là tâm của đường tròn (C)

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P).

d có vectơ chỉ phương là: $\bar{n}=(1;1;1)$

Suy ra phương trình của d: $\begin{cases} x = 5/2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{2} + t; 1 + t; 1 + t\right)$

Do $H = (d) \cap (P)$ nên:

$$\frac{5}{2} + t + 1 + t + 1 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow 3t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{5}{6} \Rightarrow H\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$$

$IH = \sqrt{\frac{75}{36}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{29}{4} - \frac{75}{36}} = \sqrt{\frac{31}{6}} = \frac{\sqrt{186}}{6}$

Bài 7:

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I ,bán kính R

Phương trình IH: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$ (Vì IH đi qua H và vuông góc với (P))

Do đó $I = IH \cap (Q) \Rightarrow$ Tọa độ $I(0;1;2)$

$IH = \sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + IH^2} = \sqrt{67}$

Phương trình mặt cầu (S): $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 67$

Bài 8:

a. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R = 4$.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (1;2;1)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua I và vuông góc d , phương trình (α) là:

$$1(x+1) + 2(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$$

Gọi H là hình chiếu của I lên d , tọa độ H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

b. Do đường tròn giao tuyến có chu vi bằng 8π nên bán kính $r = 4$. Do đó:

$$d(I,(P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{16 - 16} = 0$$

Suy ra mặt phẳng (P) cần tìm chính là mặt phẳng chứa d và qua I.

Mặt phẳng (P) có vtpt là $\vec{n} = \left[\vec{a}; \overrightarrow{IM}\right]$

Do $\begin{cases} \vec{a} = (1;\ 2;\ 1) \\ \overrightarrow{IM} = (3;-1;-3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left[\vec{a}; \overrightarrow{IM}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-5;6;-7)$.

Phương trình (P) là : $-5(x+1) + 6(y-2) - 7(z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 6y + 7z - 4 = 0$

Bài 9: Gọi tâm mặt cầu cần tìm là I. Ta có:

$$\begin{cases} IM^2 + AM^2 = AH^2 + IH^2 \\ IN^2 + BN^2 = BH^2 + IH^2 \end{cases} \Rightarrow AM^2 - BN^2 = AH^2 - BH^2$$

$\Rightarrow AM - BN = AH - HB$

$\Rightarrow AM = AH$ (do $AM + BN = AB$) $\Rightarrow IM = IH = IN$

Vậy mặt cầu cần tìm đi qua 3 điểm M, N, H. Gọi mặt cầu có tâm I(a,b,c) ta có:

$$\begin{cases} (a-2)^2 + (b+2)^2 + (c-1)^2 = (a+2)^2 + b^2 + (c-1)^2 \\ (a-2)^2 + (b+2)^2 + (c-1)^2 = a^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \\ 2a + 2b + c - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases} \Rightarrow I(2;3;-7)$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-7)$, bán kính $R = \sqrt{89}$ có phương trình:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 89$$

Bài 10:

Theo giả thiết $d = (P) \cap (Q)$ suy ra đường thẳng d là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} y + 2z - 7 = 0 \\ x - y - 4z + 12 = 0 \end{cases}$ cho $z = t \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 7 - 2t \\ z = t \end{cases}$ nên $\vec{u} = (2;-2;1)$ là 1VTCP của đường thẳng d.

Gọi $H(-2+2t; 7-2t; t)$ là hình chiếu của I trên d.

Ta có $\overrightarrow{IH} = (2t-6; 6-2t; t-6)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-6) - 2(6-2t) + (t-6) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$$

$\Rightarrow IH = \sqrt{8}$

Theo giả thiết đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tâm I tại hai điểm A, B

Do H là hình chiếu của I trên d suy ra H là trung điểm của AB.

Ta có $IA^2 = IH^2 + HA^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 17$

Suy ra phương trình mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 17$

Bài 11:

Gọi *H* là trung điểm của *AB*. Ta có Δ đi qua $M(1;2;-1)$ và có $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;-4)$.

Ta có $IH = d(I,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3$.

Suy ra $AB = \frac{2S_{IAB}}{IH} = \frac{2.12}{3} = 8$.

Do đó $AH = \frac{AB}{2} = 4 \Rightarrow R^2 = AH^2 + IH^2 = 25$.

Vậy phương trình của mặt cầu (*S*) cần tìm là $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$.

Bài 12:

Đường thẳng *d* đi qua $M(0;-2;0)$, có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$.

Tính được $\overrightarrow{MI} = (1;4;3)$

+ Khoảng cách $d(I;d) = \frac{\left|[\overrightarrow{MI};\vec{u}]\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{233}}{3}$

Mặt cầu cần tìm có bán kính bằng $d(I;d)$ và có tâm I nên có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{233}{9}$$

Bài 13:

(S) có tâm $I(2;2;-1)$ bán kính $R = 5$

d_1 đi qua điểm $M_1(1;-1;1)$ có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (-1;4;1)$

d_2 đi qua điểm $M_2(3;0;-1)$ có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1;2;2)$

$$[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix}4&1\\2&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&4\\1&2\end{vmatrix}\right) = (6;3;-6) = 3(2;1;-2)$$

Gọi (P) là mặt phẳng song song với d_1, d_2 $\Rightarrow$ (P) nhận $\frac{1}{3}[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}] = (2;1;-2)$ làm véc tơ phép tuyến $\Rightarrow$ phương trình của (P): $2x + y - 2z + D = 0$.

$$d(I,(P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2.2 + 1.2 - 2(-1) + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |D + 8| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 1 \\ D = -17 \end{array}\right.$$

Với $D = 1 \Rightarrow$ phương trình của (P_1): $2x + y - 2z + 1 = 0$

Với $D = -17 \Rightarrow$ phương trình của (P_2): $2x + y - 2z - 17 = 0$

Ta thấy M_1, M_2 không thuộc (P_2) nên (P_2) thoả mãn đề bài

$M_1(1;-1;1)$ nằm trên (P_1) nên (P_1) chứa d_1 $\Rightarrow (P_1): 2x + y - 2z + 1 = 0$ loại.

Vậy phương trình của (P) thoả mãn đề bài là $2x + y - 2z - 17 = 0$

Bài 14:

Gọi tâm mặt cầu là $I(0;0;2)$ thuộc trục Oz.

Do khoảng cách từ I đến mp P bằng 2 nên ta có : $\frac{|-2c-2|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = -4 \end{array}\right.$

Vậy $I(0;0;2)$ hoặc $I(0;0;-4)$

Do (S) cắt P theo đường tròn có bán kính bằng 3 nên bán kính mặt cầu (S) là : $R = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 13$ hoặc $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 13$

Bài 15:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (0;2;2)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng trung trực của *AB, AC* là:
$x + y - z - 1 = 0$, $y + z - 3 = 0$.

Vectơ pháp tuyến của mp(*ABC*) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (8;-4;4)$. Suy ra (*ABC*):
$2x - y + z + 1 = 0$.

Giải hệ: $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$. Suy ra tâm đường tròn là $I(0;2;1)$.

Bán kính mặt cầu là $R = d(I,(Oxz)) = 2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$

Bài 16:

Gọi I là tâm mặt cầu, vì I thuộc (Oyz) nên I có toạ độ I(0;b;c)
Vì mặt cầu đi qua A ,B và tiếp xúc với mp (Oxy) nên ta có

$IA = IB = d(I,Oxy) \Leftrightarrow 1 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = 1 + (b+1)^2 + (c-2)^2 = c^2$

$\Rightarrow c = 3;\ b = -1 \pm \sqrt{7}$

Vậy có hai mặt cầu thoả mãn bài toán là :

$x^2 + \left(y+1+\sqrt{7}\right)^2 + (z-3)^2 = 9$ hoặc $x^2 + \left(y+1-\sqrt{7}\right)^2 + (z-3)^2 = 9$

Bài 17:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$, bán kính $R = 3$

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và tiếp xúc với (S).
Phương trình (Q): $2x + 2y - z + D = 0$

Ta có $d(I,(Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.2 + 2(-1) - 3 + D|}{3} = 3 \Leftrightarrow |D - 1| = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = 10 \\ D = -8 \end{array}\right.$

Suy ra phương trình (Q): $2x + 2y - z + 10 = 0$ hoặc $2x + 2y - z - 8 = 0$

Xét (Q) : $2x + 2y - z + 10 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2;2;-1)$.

Tiếp điểm của (Q) và (S) là $A(x;y;2x+2y+10) \Rightarrow \overrightarrow{IA}(x-2;y+1;2x+2y+10)$

Ta có $\overrightarrow{IA} = t\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2t \\ y + 1 = 2t \\ 2x + 2y + 7 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow M(0;-3;4)$

$d(A,(P)) = 2,\ d(I,(P)) = 5 \Rightarrow M \equiv A$

N là hình chiếu của M trên (P) $\Rightarrow N\left(\frac{-4}{3};\frac{-13}{3};\frac{14}{3}\right)$

Bài 18:

Mặt cầu (S) có tâm I(1;2;3) bán kính R = 9.
Mặt phẳng (P) đi qua M(13;-1;0) nên có phương trình dạng :

$$A(x-13) + B(y+1) + Cz = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Vì điểm N thuộc (P) nên thay tọa độ N vào pt (P) ta được: $A = B + 4C$

Lúc này pt(P) : $(B + 4C)x + By + Cz - 12B - 52C = 0$

(P) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi : $d(I,(P)) = 9$

$$\Leftrightarrow |B+5C| = \sqrt{2B^2+8BC+17C^2} \Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=4C \\ B=-2C \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được hai phương trình mặt phẳng thỏa mãn bài toán:

$(P_1): -2x+2y-z+28=0; (P_2): 8x+4y+z-100=0$

Bài 19:

a. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) và tiếp xúc (S)

(S) có tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R = 4$

(Q): $x + y + z + D = 0$ $(D \neq 2012)$

$d(I,(Q)) = 4 \Leftrightarrow D = -2 \pm 4\sqrt{3}$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) : $x + y + z - 2 \pm 4\sqrt{3} = 0$

b. Từ M thuộc (P) vẽ tiếp tuyến MN đến mặt cầu (S) ; $N \in (S)$. Xác định tọa độ điểm M sao cho độ dài đoạn MN đạt giá trị nhỏ nhất.

$MN^2 = IM^2 - R^2$

MN nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất suy ra M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

phương trình đường thẳng IM: $x - 1 = y + 2 = z - 3$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-1=y+2=z-3 \\ x+y+z+2012=0 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $M\left(\frac{2017}{3};\frac{2008}{3};\frac{2023}{3}\right)$

Bài 20:

Gọi *H* là trung điểm của *AB*. Ta có Δ đi qua $M(1;2;-1)$ và có $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;-4)$.

Ta có $IH = d(I;\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \dfrac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3$.

Suy ra $AB = \dfrac{2S_{IAB}}{IH} = \dfrac{2.12}{3} = 8$.

Do đó $AH = \dfrac{AB}{2} = 4 \Rightarrow R^2 = AH^2 + IH^2 = 25$.

Vậy phương trình của mặt cầu (*S*) cần tìm là $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25$.

Bài 21:

Giả sử $I \in d$: $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-4}{3} \Rightarrow I(-2-t;-2t;4+3t)$ là tâm của mặt cầu (S)

Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P_1), (P_2) $\Leftrightarrow d(I,(P_1)) = d(I,(P_2))$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}|9t+3| = \frac{1}{3}|10t+16| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-13 \\ t=-1 \end{array}\right. \Rightarrow I_1(11;26;-35); I_2(-1;2;1)$$

$\Rightarrow R_1 = 38;\ R_2 = 2$

Vậy có hai mặt cầu cần tìm:

$(S_1): (x-11)^2+(y-26)^2+(z+35)^2=38^2$, $(S_2): (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$

Bài 22:

Giả sử *I*(−*t*; −1 + 2*t*; 2 + *t*) thuộc đường thẳng Δ

Vì khoảng cách từ *I* đến đường thẳng Δ bằng 2 nên

$$\frac{|-2t+1-2t-4-2t-3|}{3} = 2 \Leftrightarrow |-6t-6| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=0 & \Rightarrow I(0;-1;2) \\ t=-2 & \Rightarrow I(2;-5;0) \end{array}\right.$$

Vì mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến đường tròn (C) có bán kính *r* = 3 nên mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{2^2+3^2} = 13$

Vậy có 2 mặt cầu thoả mãn:

$x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=13$, $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=13$

ài 23:

Xác định được điểm I thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ là : $I\left(1;\frac{14}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Biến đổi $\left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}AB$.

Kết luận được tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{3}AB = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Viết được phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + \left(y-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{7}{3}$.

ài 24:

Vì véc tơ $\overrightarrow{OD}$ ngược hướng với $\vec{u} = (4;-2;2)$ nên tồn tại $t < 0$ sao cho $\overrightarrow{OD} = t\vec{u}$ suy ra $\overrightarrow{OD} = (4t;-2t;2t)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|-45(4t-3)+18(-2t-2)-9(2t-6)\right| = \frac{1}{6}\left|9(-26t+17)\right|$$

GT có $V_{ABCD} = 45 \Rightarrow 45 = \frac{1}{6}\left|9(-26t+17)\right| \Leftrightarrow 30 = \left|-26t+17\right|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -26t+17=30 \\ -26t+17=-30 \end{array}\right. \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ (vì } t<0\text{). Suy ra } D(-2;1;-1)$$

Viết được phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$x^2+y^2+z^2+5y+6z-5=0$$

§ 4: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG HOẶC MẶT PHẲNG VÀ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Dạng 1: Tìm điểm thuộc đường thẳng

Phương pháp:

Đường thẳng là tập hợp của vô số điểm nên

- Khi đường thẳng d ở dạng tham số $d:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ thì ta luôn biết được một điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và một vecto chỉ phương $\vec{u}(a;b;c)$ nhưng khi tìm một điểm thuộc đường thẳng d thỏa mãn điều kiện cho trước ta thử trước điểm $M_0\in d$ có thỏa mãn không, nếu không thỏa mãn ta chọn điểm $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)\in d$, từ điều kiện cho trước tìm t và từ đó tìm được điểm $M\in d$. Thông thường trong các bài toán ta thường chọn điểm M
- Khi đường thẳng d ở dạng chính tắc $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$, ta chuyển d về dạng tham số

THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1: Trong không gian vơi hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+9}{6}$; $\Delta_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm $M\in d_1$ sao cho khoảng cách từ *M* đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (*P*) bằng nhau

Giải:

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $A(1;3;-1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}=(1;2;-2)$

Điểm $M\in\Delta_1\Rightarrow M(-1+t;t;-9+6t)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(2-t;3-t;8-6t)$,

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{u_2}=(8t-14;20-14t;t-4)\Rightarrow\left[MA.u_2\right]=3\sqrt{29t^2-88t+68}$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ_2 là

$$d(M,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\sqrt{29t^2-88t+68}$$

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là

$$d(M,(P))=\frac{|-1+t-2t+12t-18-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|11t-20|}{3}$$

Theo giả thiết ta có

$d(M,\Delta_2)=d(M,(P))$

$$\Leftrightarrow\sqrt{29t^2-88t+68}=\frac{|11t-20|}{3}\Leftrightarrow 35t^2-88t+53=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{53}{35}\end{array}\right.$$

Với $t=1\Rightarrow M(0;1;-3)$; $t=\dfrac{53}{35}\Rightarrow M\left(\dfrac{18}{35};\dfrac{53}{35};\dfrac{3}{35}\right)$

Đáp số: $M(0;1;-3)$ và $M\left(\dfrac{18}{35};\dfrac{53}{35};\dfrac{3}{35}\right)$

Thí dụ 2: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai điểm $A(1;4;2),B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho: $MA^2+MB^2=28$

Giải:

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}\Rightarrow M\in\Delta\Rightarrow M(1-t;-2+t;2t)$

Ta có: $MA^2+MB^2=28\Leftrightarrow 12t^2-48t+48=0\Leftrightarrow t=2$

Từ đó suy ra $M(-1;0;4)$

hí dụ 3: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM.

Giải:

Ta có $d(M,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{a_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|}$. Điểm $M\in Ox\Leftrightarrow M(m;0;0)$

Đường thẳng Δ qua *N* (0;1;0) có VTCP $\vec{a}=(2;1;2)$

$\overrightarrow{NM}=(m;-1;0)\Rightarrow\left[\vec{a},\overrightarrow{NM}\right]=(2;2m;-2-m)$

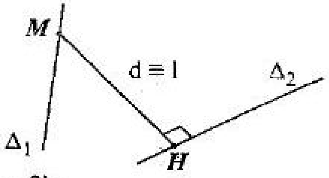
Ta có: $d(M,\Delta)=OM=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{a_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{5m^2+4m+8}}{3}=|m|$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$

Vậy *M*(–1;0;0) hoặc *M*(2;0;0).

Thí dụ 4: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Giải:



Điểm $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3 + t;\ t;\ t)$

Đường thẳng $\Delta_2: \begin{cases} \text{qua } A(2;1;0) \\ \text{có 1 vtcp } \overrightarrow{a_2} = (2;1;2) \end{cases}$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1 + t; t - 1; t) \Rightarrow [\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{AM}] = (2 - t; 2; t - 3)$;

$$d(M; \Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2-t)^2 + 4 + (t-3)^2}}{\sqrt{4+1+4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2t^2 - 10t + 17} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow M(4;1;1) \\ t = 4 \Rightarrow M(7;4;4) \end{array}\right.$$

Thí dụ 5: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2;1;1)$;. $B(-3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Giải:

Điểm $M \in \Delta \Rightarrow M(-2 + t; 1 + 3t; -5 - 2t)$

$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6 - 2t)$; $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (t + 12; -t - 6; -t)$

Ta có $S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}]\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{(t+12)^2 + (-t-6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 36t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -12 \end{array}\right.$$

Vậy $M(-2;1;-5)$ hoặc $M(-14;-35;19)$

Thí dụ 6: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(1;1;3) và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$.

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d

b. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MOA cân tại đỉnh O

Giải:

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d

$(P) \perp d \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} = (1;-1;2)$.

Do đó $(P): (x - 1) - (y - 1) + 2(z - 3) = 0$ hay : $(P): x - y + 2z - 6 = 0$ (1)

b. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MOA cân tại đỉnh O

Nếu M thuộc d, thì $M(t; -t; 2t + 1) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (t; -t; 2t + 1)$

Tam giác MOA cân tại O thì : OA = OM , hay : $OA^2 = OM^2$

$$\Leftrightarrow t^2 + t^2 + (2t+1)^2 = 1 + 1 + 9 = 11 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \to M(1;-1;3) \\ t = -\dfrac{5}{3} \to M\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; -\dfrac{7}{3}\right) \end{array}\right.$$

Thí dụ 7: Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm A(2;1;0), B(1;2;2), C(1;1;0) và mặt phẳng $(P): x + y + z - 20 = 0$. Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với (P).

Giải:

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1;1;2) \Rightarrow (AB)$ qua A(2;1;0) và có vtcp $\overrightarrow{AB}$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

D thuộc (AB) $\Rightarrow D = (2 - t; t + 1; 2t) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = (1 - t; t; 2t)$.

Nếu (CD)//(P) $\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (1 - t) + 2t - 6t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{5} \Rightarrow D = \left(\dfrac{9}{5}; \dfrac{6}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$

Thí dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2.
2. Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Giải:

a. (xem phần viết phương trình mặt phẳng)

b. Tìm tọa độ điểm A là giao của d_1 với mp(Oxz), cho y = 0.

Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - t = 0 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = -5 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow A(-5;0;-5)$

Tìm tọa độ B là giao của d_1 với mặt phẳng (Oxz):

Cho y = 0, tạo độ B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ x = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12;0;10)$$

Tính diện tích tam giác OAB : $S = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right|$ với

$$\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(\begin{vmatrix}0&-5\\0&10\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-5&-5\\10&12\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-5&0\\12&0\end{vmatrix}\right)=(0;-10;0)$$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}|10|=5$ (đvdt)

Thí dụ 9: Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1:\begin{cases}x-2y+z-4=0\\x+2y-2z+4=0\end{cases};\quad \Delta_2:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=1+2t\end{cases}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.

b. Cho điểm $M(2;1;4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất ?

Giải:

a. (xem phần viết phương trình mặt phẳng)

b. Tìm tọa độ H

Nếu H thuộc Δ_2 thì $H(1+t;2+t;1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{MH}=(-1+t;1+t;-3+2t)$.

Do đó : $MH^2=(t-1)^2+(t+1)^2+(2t-3)^2=6t^2-12t+11=6(t-1)^2+5\ge5$.

Độ dài MH nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ đạt được khi $t=1\Rightarrow H(2;3;3)$

Thí dụ 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0;1;2)$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=2+t\end{cases}$.

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A đồng thời song song với hai đường thẳng d_1 và d_2

b. Tìm điểm các điểm $M\in d_1$ và $N\in d_2$ sao cho ba điểm A, M, N thẳng hàng

Giải:

a. (xem phần viết phương trình mặt phẳng)

b. Tìm tọa độ M,N ?

Do $M\in d_1\Rightarrow M=(2t';1+t';-1-t');N\in d_2\Rightarrow N=(1+t;-1-2t;2+t)$

Tính tọa độ của $\overrightarrow{AM}=(2t';t';-t'-3);\overrightarrow{AN}=(t+1;-2t-2;t)$

Nếu ba điểm A, M, N thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}$ cùng phương, do đó tồn tại một số m nào đó sao cho : $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AN}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2t'=m(t+1)\\t'=m(-2t-2)\\-t'-3=m(t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t+1}{2t'}=\dfrac{-2t-2}{t'}\\\dfrac{t+1}{2t'}=\dfrac{t}{-t'-3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5t'(1+t)=0\\3tt'+t'+3t+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t'=0\\t=-1\end{cases}\\\begin{cases}t=-1\\t'=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}t'=0\\t=-1\end{cases}$$

Vậy hai điểm cần tìm là $M(0;0;3)$ và $N(0;1;1)$

Thí dụ 11: **(ĐH – D 2012)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M.

Giải:

Chuyển d về dạng tham số $d:\begin{cases}x=2t+1\\y=-1-t\\z=t\end{cases}$

Điểm $M(2t+1;-1-t;t)$ thuộc d

ΔAMB vuông tại M $\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=(2t;-t;t-2)$ vuông góc với $\overrightarrow{BM}=(2t-1;-t;t)$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow6t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M(1;-1;0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Ta có thể làm như sau:

Giả sử $M(a;b;c)\in d\Leftrightarrow\frac{a-1}{2}=\frac{b+1}{-1}=\frac{c}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2c+1\\b=-c-1\end{cases}\Rightarrow M(2c+1;-c-1;c)$ và giải tương tự như trên, coi như $c=t$

Nhận xét:

Với hai cách biểu diễn tọa độ điểm I theo t (hoặc c). Ta có thể giải như sau

ΔAMB vuông tại M $\Leftrightarrow MI=\frac{AB}{2}$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng một nửa cạnh huyền)

Với I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};-1;1\right)\Rightarrow\overrightarrow{MI}=\left(\frac{1}{2}-2t;t;1-t\right)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;0;-2)$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{AB^2}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}-2t\right)^2+t^2+(1-t)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow6t^2-4t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Từ đó ta sẽ được tọa độ điểm M như trên

Hoặc: Tam giác MAB vuông tại M $\Leftrightarrow MA^2+MB^2=AB^2$

Thí dụ 12: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x-y+2z-2=0$.

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P).

Giải:

1. $d:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x-y+2z-2=0$

d qua $A(0;1;0)$ có vtcp $\overrightarrow{a_d} = (-2;1;1)$

(P) có 1 VTPT : $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;-1;2)$

(α) chứa d và vuông góc với (P) nên :

(α) qua A (0; 1; 0) và có 1 VTPT : $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \left[\overrightarrow{a_{(d)}}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = 3(1;2;0)$

Ptmp (α) : $(x-0)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-2=0$

2. $M \in d \Rightarrow M(-2t;1+t;t)$

M cách đều O và (P) ⇔ OM = d (M, (P))

$$\Leftrightarrow \sqrt{4t^2+(1+t)^2+t^2} = \frac{|2(-2t)-(1+t)+2(t)-2|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6t^2+2t+1} = |t+1| \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow M(0;1;0)$$

Dạng 2: Tìm điểm thuộc mặt phẳng

Thí dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;1;2)$; $B(2;-2;1)$ và $C(-2;0;1)$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C

b. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(Q): 2x+2y+z-3=0$ sao cho

$$MA = MB = MC$$

Giải:

a. (xem phần viết phương trình mặt phẳng)

b. **Cách 1:**

Giả sử $M(x;y;z)$

Theo giả thiết MA = MB = MC $\Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = (x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 \\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = (x+2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6y-2z-4=0 & (1) \\ 4x+2y+2z=0 & (2) \end{cases}$$

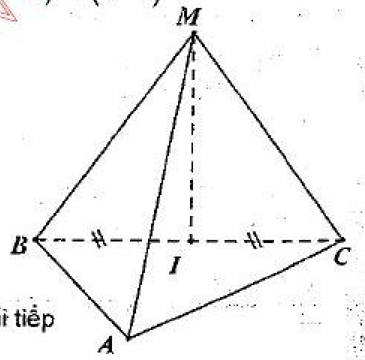
Mà $M \in (Q) \Leftrightarrow 2x+2y+z-3=0$ (3)

Giải hệ (1), (2) và (3) ta được $M(2;3;-7)$

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Theo giả thiết điểm M cách đều ba điểm A, B,C nên điểm M thuộc trục đường tròn ngoại tiếp



ΔABC hay thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trung điểm $I(0;-1;1)$ của BC

Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ $\begin{cases} 2x+2y+z-3=0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{-4} \end{cases} \Rightarrow M(2;3;-7)$

Thí dụ 2: Trong không gian hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.

Giải:

Ta có Δ cắt (P) tại $I(1;1;1)$; điểm $M \in (P) \Rightarrow M(x;y;3-x-y)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MI} = (1-x;1-y;-2+x+y)$. Vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a} = (1;-2;-1)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MI}.\vec{a} = 0 \\ MI^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ (1-x)^2+(1-y)^2+(-2+x+y)^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 5$

+ Với $x = -3 \Rightarrow y = -7$. Điểm $M(4;-7;6)$

+ Với $x = 5 \Rightarrow y = 9$. Điểm $M(5;9;-11)$

Thí dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc *(P)* sao cho MA = MB = 3

Giải:

Cách 1: Phương pháp hình học

Mặt phẳng (Q) trung trực đoạn AB qua trung điểm $I(1;-1;2)$ của AB có VTPT $\overrightarrow{IA} = (1;1;-1)$ có phương trình là : $x+y-z+2=0$

Giao tuyến d của *(P)* và *(Q)* qua $J(0;1;3)$ có VTCP $\vec{a} = (2;1;3)$

$\Rightarrow$ Phương trình của đường thẳng d : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 3+3t \end{cases}$

Theo giả thiết MA = MB, $M \in (P) \Rightarrow M \in d \Rightarrow M(2t;1+t;3+3t)$

$$MA = 3 \Leftrightarrow (2-2t)^2+(-1-t)^2+(-2-3t)^2 = 9 \Leftrightarrow 14t^2+6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\dfrac{3}{7} \end{array}\right.$$

Vậy $M(0;1;3)$ hay $M\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{4}{7};\dfrac{12}{7}\right)$.

Cách 2: Phương pháp đại số

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0) \in (P) \Rightarrow (P): 2x_0 - y_0 - z_0 + 4 = 0$ (1)

Theo giả thiết $MA = MB = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = 9 \\ MB^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 - 2)^2 + y_0^2 + (z_0 - 1)^2 = 9 \quad (2) \\ x_0^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 3)^2 = 9 \quad (3) \end{cases}$

giải hệ (1), (2) và (3) ta được tọa độ điểm M

Nhận xét:

Để tránh độ phức tạp khi giải hệ ta có thể làm như sau

$M(x_0;y_0;z_0) \in (P) \Rightarrow z_0 = 2x_0 - y_0 + 4 = 0 \Rightarrow M(x_0;y_0;2x_0 - y_0 + 4)$

Theo giả thiết $MA = MB = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = 9 \\ MB^2 = 9 \end{cases}$ dẫn tới một hệ hai ẩn x_0 và y_0 và được tọa độ điểm M

Thí dụ 4: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3,7,-18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp (P).
2. Tìm tọa độ điểm $M \in (P)$ sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Giải:

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2,4,-16)$ cùng phương với $\vec{a} = (-1,2,-8)$, mp(P) có PVT $\vec{n} = (2,-1,1)$

Ta có $[\vec{n},\vec{a}] = (6;15;3)$ cùng phương với $(2;5;1)$

Phương trình mp chứa AB và vuông góc với (P) là :

$2(x+1) + 5(y-3) + 1(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + z - 11 = 0$

2. Tìm $M \in (P)$ sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Vì khoảng cách đại số của A và B cùng dấu nên A, B ở cùng phía với Mp (P).

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P)

Phương trình AA' : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$

AA' cắt (P) tại H, tọa độ H là nghiệm của $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow H(1,2,-1)$

Vì H là trung điểm của AA' nên ta có : $\begin{cases} 2x_H = x_A + x_{A'} \\ 2y_H = y_A + y_{A'} \\ 2z_H = z_A + z_{A'} \end{cases} \Rightarrow A'(3,1,0)$

Ta có $\overrightarrow{A'B} = (-6,6,-18)$ (cùng phương với $(1;-1;3)$)

Phương trình đường thẳng A'B : $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow M(2,2,-3)$

Thí dụ 5: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(-3,5,-5)$; $B(5,-3,7)$; và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$

1. Tìm giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).
2. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Giải:

1. Đường thẳng AB có VTCP $\vec{a} = (8,-8,12) = 4(2,-2,3)$

Phương trình đường thẳng AB: $AB: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$

Điểm $I(-3+2t;5-2t;-5+3t) \in AB \cap (P)$

$\Leftrightarrow (-3+2t) + (5-2t) + (-5+3t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại $I(-1,3,-2)$

2. Tìm $M \in (P)$ để $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất

Gọi H là trung điểm của đoạn AB.

Tam giác MAB có trung tuyến MH nên: $MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$

Do đó $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH^2$ nhỏ nhất

Ta dễ thấy $H(1,1,1)$, $M \in (P)$

MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp (P)$ và để ý rằng mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ có PVT $\overrightarrow{OH} = (1,1,1)$ và $O \in (P) \Rightarrow M \equiv O(0,0,0)$

Vậy, với M(0,0,0) thì $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Khi đó, ta có $\min(MA^2 + MB^2) = OA^2 + OB^2 = (9+25+25) + (25+9+49) = 142$

Thí dụ 6: Cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1;-3;0); B(5;-1;-2)$

a. Chứng tỏ rằng đường thẳng đi qua A, B cắt mặt phẳng (P) tại một điểm I. Tìm toạ độ điểm I.

b. Tìm toạ độ điểm M thuộc (*P*) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

a. Chứng minh rằng đường thẳng (AB) cắt mặt phẳng (P) tại điểm I . Tìm tọa độ của I

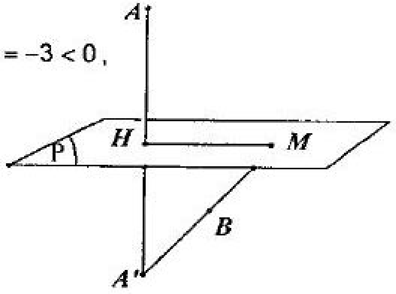
Ta có : $P_{(A/P)}.P_{(B/P)} = (1-3-1)(5-1-2-1) = -3 < 0$,

suy ra A,B nằm về hai phía của (P).

Tìm tọa độ A' đối xứng với A qua (P).

Lập đường thẳng Δ qua $A(1;-3;0)$

và vuông góc với $(P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}$



Tìm tọa độ H là giao của Δ với (P) , thì tọa độ của H là nghiệm của hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3t = 3 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2;-2;1)$$

Tọa độ A' : $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2.2 - 1 = 3 \\ y_{A'} = 2x_H - y_A = -2.2 + 3 = -1 \Leftrightarrow A' = (3;-1;2) \\ z_{A'} = 2x_H - z_A = 2.1 - 0 = 2 \end{cases}$

Lập đường thẳng d = (A'B), qua $A(1;-3;0)$ có $\overrightarrow{A'B} = (2;0;-4) // \vec{u} = (1;0;-2)$.

Do đó đường thẳng (A'B) : $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 \\ z = -2 - 2t \end{cases}$

Tìm tọa độ điểm M là giao của (A'B) với (P) , tọa độ của M là nghiệm của hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 1 = -0 \\ x = 3 + t \\ y = -1 \\ z = -2 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow -t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(2;-1;0).$$

Đó chính là điểm cần tìm .

Chứng minh M là điểm duy nhất .

Do A' đối xứng với A qua (P) cho nên (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA' : MA = MA' suy ra $|MA - MB| = |MA' - MB| = A'B$. Với một điểm M' khác M ta có : $|M'A - M'B| = |M'A' - M'B| < A'B$. Chứng tỏ M là điểm duy nhất cần tìm .

Thí dụ 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(-1;0;1)$, $B(2;-1;0)$, $C(2;4;2)$ và mặt phẳng (P): $x + y + 2z + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Giả sử $M(x;y;z) \in (P) \Rightarrow x + y + 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) + (y-1) + 2(z-1) + 6 = 0$ (1)

Ta có:

$T = 3(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z) + 31 = 3\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right] + 22$ (2)

Từ (1), áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho các bộ số: (1;1;2) và (x – 1; y – 1; z – 1), ta được:

$$(-6)^2 = \left[1(x-1) + 1(y-1) + 2(z-1)\right]^2 \le (1 + 1 + 4)\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right]$$

$$\Rightarrow T \ge 3.\frac{6^2}{6} + 22 = 40.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2} \\ x + y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-1)$

Thí dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) : $x + y + z - 1 = 0$ và ba điểm $A(2;1;3), B(0;-6;2), C(1;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị bé nhất.

Giải:

Dễ thấy A,B,C không thẳng hàng. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, thì G(1;–2;3). Khi đó với mọi $M \in (P)$ ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị bé nhất $\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right|$ đạt giá trị bé nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G trên (P) .

(P) có VTPT $\vec{n} = (1;1;1)$.

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0) \in (P) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0$ (1).

M là hình chiếu của G trên (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = (x_0 - 1; y_0 + 2; z_0 - 3)$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 - 1}{1} = \frac{y_0 + 2}{1} = \frac{z_0 - 3}{1} = \frac{(x_0 - 1) + (y_0 + 2) + (z_0 - 3)}{1 + 1 + 1}$$

$$= \frac{(x_0 + y_0 + z_0 - 1) - 1}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{2}{3}, y_0 = \frac{-7}{3}, z_0 = \frac{8}{3}. \text{ Vậy } M\left(\frac{2}{3};\frac{-7}{3};\frac{8}{3}\right).$$

Thí dụ 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $3x - 3y + 2z + 37 = 0$ và các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$S = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

Giải:

Giả sử $M(x;y;z) \in (P) \Rightarrow 3x - 3y + 2z + 37 = 0$ (1)

Khi đó $S = 3\left[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 - 5\right]$.

Áp dụng BĐT Bunhiacốpxki cho (1) ta được:

$$(-44)^2 = \left[3(x-2) - 3(y-1) + 2(z-2)\right]^2 \le (9 + 9 + 4)\left[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2\right]$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \ge \frac{44^2}{22} = 88.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow M(4;7;-2).$

Vậy $\min S = 3.88 - 5 = 259$ khi $M(4;7;-2)$.

Thí dụ 10: Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 9 = 0$ và 2 điểm $A(3;-1;2)$; $B(1;-5;0)$. Tìm tọa độ M thuộc (*P*) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Giải:

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(2;-3;1)$

$$T = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

$T_{min} \Leftrightarrow MI_{min}$. Vậy M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng IM: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

Tọa độ M là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{2} \\ 2x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy *M*(–2 ; –1 ; –3)

Hoặc: Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $I(2;-3;1)$ và $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}$ đạt giá tṭị nhỏ nhất (do $IA^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ không đổi).

$\Rightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

Chọn $\overrightarrow{u_{IM}} = \overrightarrow{n_p} = (2;-1;2) \Rightarrow$ phương trình IM: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Thay vào phương trình (P) suy ra $t = -2 \Rightarrow M(-2;-1;-3)$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(-1;0;2)$, $B(2;1;4)$, $C(1;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho MA = MB = MC và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) bằng $\sqrt{5}$.

Bài 2: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 8 = 0$ và các điểm $A(-1;2;3)$, $B(3;0;-1)$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Bài 3: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$ và các điểm $A(-1;2;3)$, $B(3;0;-1)$, $C(1;4;7)$.

Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất.

Bài 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. Gọi d' là hình chiếu vuông góc của *d* lên (*P*) và *E* là giao điểm của *d* và (*P*). Tìm tọa độ điểm *F* thuộc (*P*) sao cho *EF* vuông góc với d' và $EF = 5\sqrt{3}$.

Bài 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$. Tìm điểm *I* thuộc đường thẳng *d* sao cho IA + IB nhỏ nhất.

Bài 6: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1; –5; 2), B(3; –1; –2) và mặt phẳng (P) có phương trình: x – 6y + z + 18 = 0. Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất.

Bài 7: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(–1;2;0), B(1;2;–5) và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho tổng MA + MB nhỏ nhất.

Bài 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ, xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 9: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng d : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

Bài 10: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng Δ : $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2;1;1)$; $B(-3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Bài 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và các đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{2}$, $d_2: \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{-5}$. Tìm điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2 sao cho MN song song với (P) và đường thẳng MN cách (P) một khoảng bằng 2.

Bài 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x + z = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm A thuộc d và tọa độ điểm B trên trục Oz sao cho AB // (P) và độ dài đoạn AB nhỏ nhất.

Bài 13: Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-2=0$. Tìm tọa độ điểm M trên d có khoảng cách đến trục hoành gấp $\sqrt{2}$ lần khoảng cách đến mặt phẳng (P).

Bài 14: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $B(5;-2;2)$, $C(3;-2;6)$. Tìm toạ độ điểm A thuộc mặt phẳng $(P): 2x+y+z-5=0$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A.

Bài 15: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm $B(1;2;-1), C(3;0;5)$. Tìm toạ độ điểm A thuộc mặt phẳng $(P): -x+2y-2z+10=0$ sao cho tam giác ABC cân tại A và có diện tích bằng $2\sqrt{11}$.

Bài 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}, d_2:\dfrac{x+1}{-2}=y=z-1$ và mặt phẳng $(P): x-y-z=0$. Tìm tọa độ hai điểm $M\in d_1, N\in d_2$ sao cho MN song song (P) và $MN=\sqrt{6}$.

Bài 17: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;5;4), B(0;1;1), C(1;2;1)$. Tìm tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho độ dài đoạn thẳng CD nhỏ nhất.

Bài 18: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz. Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=1\end{cases}$ và điểm $A(1;0;-1)$. Tìm tọa độ các điểm E và F thuộc đường thẳng Δ để tam giác AEF là tam giác đều.

Bài 19: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz* cho $(P): x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=y+1=z-3$, điểm $A(-2;3;4)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trên *(P)* đi qua giao điểm của *d* và *(P)* đồng thời vuông góc với *d*. Tìm trên Δ điểm *M* sao cho khoảng cách *AM* ngắn nhất.

Bài 20: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm A(3; 1; 1), B(1; 1; –1), C(–1; 2; 3), D(4; –2; 0) và mp (P) có phương trình $2x+3y+z-13=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên mp (P) sao cho $\left|-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right|$ ngắn nhất.

Bài 21: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;1), B(2;-1;2)$ và đường thẳng $d: x=y=z$.

a. Trong mặt phẳng (OAB), tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b. Tìm điểm M trên d sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất.

Bài 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2; 0; 3); B(2; –2; –3) và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$. Chứng minh A, B và Δ cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm toạ độ điểm M thuộc Δ sao cho MA^4+MB^4 nhỏ nhất.

Bài 23: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x+2y-z+5=0$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=-1+t\\z=3+t\end{cases}$ và điểm $A(-2;3;4)$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với đường thẳng d. Tìm trên Δ điểm M sao cho độ dài AM ngắn nhất.

Bài 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng: $(d_1):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ và $(d_2):\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ các điểm *M* thuộc (d_1) và N thuộc (d_2) sao cho đường thẳng *MN* song song với mp(P): $7x-7y+7z-8=0$ và độ dài đoạn *MN* bằng $\sqrt{2}$.

Bài 25: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho hai mặt phẳng *(P)*: $x+z-3=0$, *(Q)*: $y+z+5=0$ và điểm $A(1;-1;-1)$. Tìm tọa độ các điểm *M* trên *(P)*, *N* trên *(Q)* sao cho *MN* vuông góc với giao tuyến của *(P)*, *(Q)* và nhận *A* là trung điểm.

Bài 26: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm $A(-1;0;1), B(2;-1;0), C(2;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+2z+2=0$. Tìm tọa độ điểm *M* trên (α) sao cho biểu thức $T=MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 27: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho bốn điểm *A*(6;–6; 6), *B*(4;4;4), *C*(–2;10;–2) và *S*(–2;2;6). Chứng minh *O, A, B, C* là bốn đỉnh của một hình thoi và hình chiếu vuông góc của *S* trên mặt phẳng (*OABC*) trùng với tâm *I* của *OABC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *SO* và *AC*.

Bài 28: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm *A, B, C* lần lượt di động trên các tia *Ox*, *Oy* và *Oz* sao cho mặt phẳng (*ABC*) không đi qua *O* và luôn đi qua điểm *M*(1;2;3). Xác định tọa độ các điểm *A, B, C* để thể tích khối tứ diện *OABC* đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 29: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm *A*(0;0;–3); *B*(2;0;–1) và mặt phẳng *(P)*: $3x-y-z+1=0$. Tìm tọa độ điểm *C* nằm trên *(P)* sao cho *ABC* tam giác đều.

Bài 30: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho tam giác *ABC* có *A*(3;1;0), *B* nằm trên mặt phẳng *Oxy* và *C* nằm trên trục *Oz*. Tìm tọa độ các điểm *B, C* sao cho *H*(2;1;1) là trực tâm của tam giác *ABC*.

Bài 31: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(4;0;0), B(x_0;y_0;0)$ với $x_0>0$, $y_0>0$ sao cho OB = 8 và góc $\widehat{AOB}=60^0$.

a. Xác định điểm C trên tia Oz để thể tích của tứ diện OABC bằng 8.

b. Gọi G là trọng tâm tam giác OAB và điểm M trên đường thẳng AC với AM = x. Tìm x để OM vuông góc GM.

Bài 32: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): x-y-z+2=0$. Tìm tọa độ điểm *C* thuộc mặt phẳng (*P*) sao cho tam giác *ABC* vuông tại *B*, đồng thời hai đường thẳng *AB* và *AC* tạo với nhau một góc α thỏa mãn $\tan\alpha = 2$.

Bài 33: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x+y+z=0$ và hai điểm $A(4;-3;1)$, $B(2;1;1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Q) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

Bài 34: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x=30 \\ y=4 \\ z=1975+t \end{cases}$ Hai điểm A, B thay đổi trên Δ sao cho AB = 2 và hai điểm C, D thay đổi trên trục hoành sao cho CD = 3. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

Bài 35: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(-2;1;3)$. Tìm tọa độ điểm *M* trên trục *Ox* để tam giác *AMB* có diện tích nhỏ nhất.

Bài 36: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1;0;1), B(-1;1;1)$. Tìm tọa độ điểm *M* thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho tam giác MAB cân tại *M* và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

Giả sử $M(a;b;c)$.

$MA = MB \Leftrightarrow 3a+b+2c-8=0$ (1)

$MA = MC \Leftrightarrow 4a-2b-1=0$ (2)

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+4y-5z+12=0$

Theo giả thiết

$$d_{(M;(ABC))} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|2a+4b-5c+12|}{3\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a+4b-5c=3 \ (3) \\ 2a+4b-5c=-27 \end{array}\right. \quad (4)$$

Giải hệ (1), (2), (3) ta được $M\left(\frac{7}{6};\frac{11}{6};\frac{4}{3}\right)$

Giải hệ (1), (2), (4) ta được $M\left(\frac{-1}{6};\frac{-5}{6};\frac{14}{3}\right)$

Bài 2:

Ta có: $I(1;1;1)$ là trung điểm của AB

$2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên mp (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{n_p}\ , M(x;y;z) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=1+2t \\ x-2y+2z+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=0 \\ y=+3 \\ z=-1 \end{cases}$$

Vậy $M(0;3;-1)$ là điểm cần tìm.

Bài 3:

Ta có: $G(1;2;3)$ là trọng tâm ΔABC

$3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow GM^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G trên mp (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = t\,\overrightarrow{n_p}$; $M(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+2t \\ x-2y+2z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=0 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy $M(0;4;1)$ là điểm cần tìm.

Bài 4:

Đường thẳng d cắt (P) tại $E(-1;\ 0;\ 4)$

Giả sử $F(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $F \in (P) \Rightarrow x_0 + 2y_0 - z_0 + 5 = 0$. (1)

Vì $EF \perp d'$ nên $EF \perp d$ (định lí 3 đường vuông góc) $\Rightarrow \vec{u}_d.\overrightarrow{EF} = 0$

$\Leftrightarrow 2x_0 + y_0 + z_0 - 2 = 0$. (2)

$EF = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow (x_0+1)^2 + y_0^2 + (z_0-4)^2 = 75$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $F(4;-5;-1)$, hoặc $F(-6;\ 5;\ 9)$.

Bài 5:

Giả sử $I(-1+3t;2-2t;2+2t) \in d$

Ta có $IA + IB = \sqrt{17t^2+13} + \sqrt{17t^2-68t+81}$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{17t^2+13} + \sqrt{17t^2-68t+81}$ thì

$$f'(t) = 17\left(\frac{t}{\sqrt{17t^2+13}} + \frac{t-2}{\sqrt{17t^2-68t+81}}\right)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t\left(\sqrt{17t^2-68t+81}\right) = (2-t)\left(\sqrt{17t^2+13}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 2 \\ 52t-52=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

Điểm I cần tìm là $I(2;0;4)$.

Bài 6:

Ta có trung điểm của *AB* là *I*(2; –3; 0)

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 9$

Suy ra $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I trên d

$M \in d \Rightarrow M(-3+4t;\ 2+t;\ -3+2t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (-5+4t;\ 5+t;\ -3+2t)$

d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;\ 1;\ 2)$

$\overrightarrow{IM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4(-5+4t)+5+t+2(-3+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1;\ 3;\ -1),\ MI = \sqrt{38}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)_{min} = 29$ đạt được khi $M(1;\ 3;\ -1)$

Bài 7:

$M \in d$ nên $M(1+2t;\ 3+2t;\ -t)$

$MA = \sqrt{(2+2t)^2+(1+2t)^2+t^2} = \sqrt{9t^2+12t+5} = \sqrt{(3t+2)^2+1}$

$MB = \sqrt{4t^2+(1+2t)^2+(-t+5)^2} = \sqrt{9t^2-6t+26} = \sqrt{(3t-1)^2+25}$

Trong mpOxy xét các vectơ $\vec{u} = (3t+2;\ 1),\ \vec{v} = (-3t+1;\ 5)$

Có: $|\vec{u}+\vec{v}| = 3\sqrt{5}$; $|\vec{u}| = \sqrt{(3t+2)^2+1}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(-3t+1)^2+25}$

Ta luôn có bất đẳng thức đúng:

$|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}| \Leftrightarrow 3\sqrt{5} \le \sqrt{(3t+2)^2+1}+\sqrt{(-3t+1)^2+25}$ hay $MA+MB \ge 3\sqrt{5}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{3t+2}{-3t+1} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $(MA+MB)_{min} = 3\sqrt{5}$ đạt được khi $M\left(0;\ 2;\ \dfrac{1}{2}\right)$

Bài 8:

Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì P = AB + AM + BM.
Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi AM + BM nhỏ nhất.

Đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$.

Điểm $M \in \Delta$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$.

$AM = \sqrt{(-2+2t)^2+(-4-t)^2+(2t)^2} = \sqrt{9t^2+20} = \sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$BM = \sqrt{(-4+2t)^2+(-2-t)^2+(-6+2t)^2} = \sqrt{9t^2-36t+56} = \sqrt{(3t-6)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$AM+BM = \sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{(3t-6)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u} = \left(3t;2\sqrt{5}\right)$ và $\vec{v} = \left(-3t+6;2\sqrt{5}\right)$.

Ta có $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2} \end{cases}$

Suy ra $AM+BM = |\vec{u}|+|\vec{v}|$ và $\vec{u}+\vec{v} = \left(6;4\sqrt{5}\right) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = 2\sqrt{29}$

Mặt khác, với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\vec{u}+\vec{v}|$

Như vậy $AM+BM \ge 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{3t}{-3t+6} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ và $\min(AM+BM) = 2\sqrt{29}$.

Vậy khi M(1;0;2) thì $\min P = 2\left(\sqrt{11}+\sqrt{29}\right)$

Bài 9:

Vì $M \in d$ nên $M(1+t;-2+2t;-2t)$. Trục Oz đi qua điểm O(0; 0; 0) và có vtcp $\vec{k} = (0;0;1)$

$\overrightarrow{OM} = (1+t;-2+2t;-2t)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right] = (-2+2t;-1-t;0) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]\right| = \sqrt{5t^2-6t+5}$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S), ta có $R = d(M;Oz) = \sqrt{5t^2-6t+5}$

R = 2 suy ra $\sqrt{5t^2-6t+5} = 2$

$\Leftrightarrow 5t^2-6t+5 = 4 \Leftrightarrow 5t^2-6t+1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(2;0;-2) \\ M\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{5}\right) \end{array}\right.$

ài 10:

Điểm $M \in \Delta \Leftrightarrow M(-2+t;1+3t;-5-2t)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;1)$; $\overrightarrow{AM} = (t;3t;-6-2t)$; $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}] = (t+12;-t-6;-t)$

Theo giả thiết

$S_{MAB} = 3\sqrt{5} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}]\right| = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{(t+12)^2+(-t-6)^2+t^2} = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 3t^2+36t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -12$.

Vậy $M(-2;1;-5)$ hoặc $M(-14;-35;19)$

i 11:

Gọi $M(1+2t;3-3t;2t), N(5+6t';4t';-5-5t')$

Theo giả thiết $d(M;(P)) = 2 \Leftrightarrow |2t-1| = 1 \Leftrightarrow t = 0; t = 1$.

ường hợp 1: $t = 0 \Rightarrow M(1;3;0), \overrightarrow{MN} = (6t'+4;4t'-3;-5t'-5)$

$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow N(5;0;-5)$

ường hợp 2: $t = 1 \Rightarrow M(3;0;2), N(-1;-4;0)$

Bài 12:

$A(1+t;-2+t;-t)\in d,\ B(0;0;b)\in Oz$

$\overrightarrow{AB}=(-1-t;2-t;b+t),\ \overrightarrow{n_{(P)}}=(2;0;1)$

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0\Leftrightarrow b=2+t$ suy ra $B\notin(P)\Rightarrow b\neq 0$

Ta có $AB^2=6t^2+6t+9=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\geq\frac{15}{2}$.

AB đạt giá trị nhỏ nhất $AB_{min}=\sqrt{\frac{15}{2}}$ khi $t=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}$

Vậy $A\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right),B\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$

Bài 13:

Ta có $M(1+2t;t;-2-3t)\in d$

$d(M;Ox)=\left|\overrightarrow{OM}\wedge\vec{i}\right|=\sqrt{(2+3t)^2+t^2}$

$d(M;(P))=\frac{|2+4t+t-4-6t-2|}{3}=\frac{|t+4|}{3}$

Theo giả thiết $d(M;Ox)=\sqrt{2}d(M;(P))\Leftrightarrow 9\left(10t^2+12t+4\right)=2\left(t^2+8t+16\right)$.

Giải được $\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-\frac{1}{22}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(-1;-1;1)\\ M\left(\frac{10}{11};-\frac{1}{22};-\frac{41}{22}\right)\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn

Bài 14:

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-2;0;4)$. Trung điểm của BC có toạ độ $(4;-2;4)$

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của BC.

$(Q):-2(x-4)+0(y+2)+4(z-4)=0\Leftrightarrow(Q):x-2z+4=0$

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và (Q)

Chọn $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(2;-5;1)$

Điểm $(0;3;2)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q) suy ra $d:\begin{cases}x=2t\\ y=3-5t\\ z=2+t\end{cases}$.

Ta có tam giác ABC cân suy ra A thuộc d.

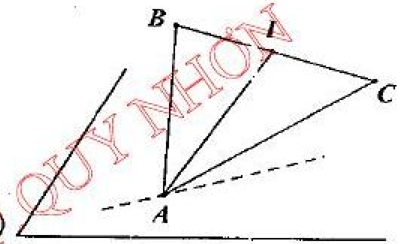
Gọi toạ độ $A(2t;3-5t;2+t)\Rightarrow\overrightarrow{BA}=(2t-5;5-5t;t);\overrightarrow{CA}=(2t-3;5-5t;t-4)$

Tam giác ABC vuông suy ra $\overrightarrow{BA}\overrightarrow{CA}=0$

$\Leftrightarrow(2t-5)(2t-3)+(5-5t)^2+t(t-4)=0\Leftrightarrow 3t^2-7t+4=0\Leftrightarrow t=1\vee t=\frac{4}{3}$

Với $t=1\Rightarrow A(2;-2;3)$, $t=\frac{4}{3}\Rightarrow A\left(\frac{8}{3};\frac{-11}{3};\frac{10}{3}\right)$

Bài 15:



Ta có $\overrightarrow{BC}=(2;-2;6)$.

Trung điểm của BC có toạ độ $I(2;1;2)$

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của BC.

$(Q):2(x-2)-2(y-1)+6(z-2)=0$

$\Leftrightarrow(Q):x-y+3z-7=0$

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và (Q)

Chọn $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-4;-1;1)$.

Điểm $(4;-3;0)$ thuộc mặt phẳng (P) và (Q) suy ra $d:\begin{cases}x=4-4t\\ y=-3-t\\ z=t\end{cases}$.

Ta có tam giác ABC cân suy ra A thuộc d.

Gọi toạ độ $A(4-4t;-3-t;t)\Rightarrow\overrightarrow{IA}=(2-4t;-4-t;t-2)$

$S_{ABC}=2\sqrt{11}\Leftrightarrow\frac{1}{2}BC.AI=11\sqrt{2}$. Do $BC=2\sqrt{11}\Rightarrow AI=\sqrt{22}$

$(2-4t)^2+(t+4)^2+(t-2)^2=22\Leftrightarrow 18t^2-12t+24=22\Leftrightarrow 9t^2-6t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$

Suy ra $A\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$

Bài 16:

Gọi $M\in d_1\Rightarrow M(t;t;2t),N\in d_2\Rightarrow N(-1-2t';t';1+t')$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}=0\\ \left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2t'+1\\ \sqrt{(-1-2t'-t)^2+(t'-t)^2+(1+t'-2t)^2}=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=1\\ t'=0\end{cases}\\ \begin{cases}t=-\frac{11}{13}\\ t'=-\frac{12}{13}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $M\left(-\frac{11}{13};-\frac{11}{13};-\frac{22}{13}\right),N\left(\frac{11}{13};-\frac{12}{13};\frac{2}{13}\right)$ hoặc $M(1;1;2)$, $N(-1;0;1)$

Bài 17:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;-3)$

Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases}x=1-t\\ y=5-4t\\ z=4-3t\end{cases}$

Để độ dài đoạn CD ngắn nhất $\Leftrightarrow$ D là hình chiếu vuông góc của C trên cạnh AB

Gọi tọa độ điểm $D(1-a;5-4a;4-3a)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(a;4a-3\ 3a-3)$

Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow -a-16a+12-9a+9=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{21}{26}$

Tọa độ điểm $D\left(\dfrac{5}{26};\dfrac{49}{26};\dfrac{41}{26}\right)$

Bài 18:

Đường thẳng Δ đi qua $M_0(0,0,1)$ và có vtcp $\vec{u}=(1,2,0)$;

$\overrightarrow{M_0A}=(1,0,-2)$; $\left[\overrightarrow{M_0A},\vec{u}\right]=(4,-2,2)$

Khoảng cách từ A đến Δ là $AH=d(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{M_0A},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

Tam giác AEF đều $\Rightarrow AE=AF=AH.\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Vậy E, F thuộc mặt cầu tâm A, bán kính $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ và đường thẳng Δ, nên tọa độ E, F là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=1 \\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=\dfrac{32}{5} \end{cases}$

Giải ra được $t=\dfrac{1\mp 2\sqrt{2}}{5}$ suy ra tọa độ E và F là:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-2\sqrt{2}}{5} \\ y=\dfrac{2-4\sqrt{2}}{5} \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{5} \\ y=\dfrac{2+4\sqrt{2}}{5} \\ z=1 \end{cases}$$

Bài 19:

Chuyển phương trình d về dạng tham số ta được: $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t-1 \\ z=t+3 \end{cases}$

Gọi I là giao điểm của (d) và (P) $\Rightarrow I(2t-3;t-1;t+3)$

Do $I\in(P)\Rightarrow 2t-3+2(t-1)-(t-3)+5=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(-1;0;4)$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;1)$, mp(P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-1)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{n}\right]=(-3;3;3)$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của $\Delta\Rightarrow\vec{u}=(-1;1;1)$

$\Rightarrow\Delta:\begin{cases} x=1-u \\ y=u \\ z=4+u \end{cases}$. Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(-1-u;u;4+u)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1-u;u-3;u)$

AM ngắn nhất

$\Leftrightarrow AM\perp\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow-1(1-u)+1(u-3)+1.u=0\Leftrightarrow u=\dfrac{4}{3}$

Vậy $M\left(\dfrac{-7}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{16}{3}\right)$

Bài 20:

Gọi I là điểm thỏa mãn: $-2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Leftrightarrow(5-x;-6-y;-7-z)=\vec{0}$

Ta tìm được $I(5;-6;-7)$

Lúc đó: $\left|-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right|=MI$

$\left|-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}\right|$ ngắn nhất ⇔ đoạn MI ngắn nhất khi $M=\text{hc}\ {}^{I}/_{(P)}$

Phương trình chính tắc của d qua I và d vuông góc với (P) là:

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+6}{3}=z+7$$

$M=(P)\cap d\Rightarrow M(9;0;-5)$

Bài 21:

a. $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(1;2;1)\\ \overrightarrow{OB}=(2;-1;2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(5;0;-5)$

Phương trình mp(ABC) là $x-z=0$

Phương trình mặt phẳng trung trực cạnh OA là $x+2y+z-3=0$

Phương trình mặt phẳng trung trực cạnh OB là $2x-y+2z-\dfrac{9}{2}=0$

Tọa độ tâm I thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y+z=3 \\ 2x-y+2z=4,5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{6}{5} \\ y=\dfrac{3}{10} \\ z=\dfrac{6}{5} \end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{3}{10};\dfrac{6}{5}\right)$$

Bán kính $r=\dfrac{\sqrt{297}}{10}$

b. Vì $M\in d\Rightarrow M(t;t;t)$.

Chu vi $P=MA+MB+AB$; $P_{min}\Leftrightarrow(MA+MB)_{min}$

$$MA+MB=\sqrt{(t-1)^2+(t-2)^2+(t-1)^2}+\sqrt{(t-2)^2+(t+1)^2+(t-2)^2}$$

$$=\sqrt{3t^2-6t+6}+\sqrt{3t^2-6t+9}=\sqrt{3}\left(\sqrt{(t-1)^2+1}+\sqrt{(t-1)^2+2}\right)\geq\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $t=1$ hay $M(1;1;1)$.

Bài 22:

Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases}x=2\\y=t\\z=3+3t\end{cases}$

Phương trình Δ: $\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=3t'\end{cases}$,

Gọi $I=AB\cap\Delta\Rightarrow\begin{cases}2=2+t'\\t=-1+2t'\\3+3t=3t'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=0\end{cases}\Rightarrow I(2;-1;0)$

Vậy AB và Δ cắt nhau tại I nên A, B và Δ đồng phẳng

Ta có $\overrightarrow{IA}=(0;1;3)$, $\overrightarrow{IB}=(0;-1;-3)\Rightarrow\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}\Rightarrow IA+IB=AB$

Khi đó $MA^4+MB^4\geq\frac{1}{2}\left(MA^2+MB^2\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(MA+MB)^2\right)^2\geq\frac{1}{8}AB^4=\frac{1}{8}(IA+IB)^4$

$\Rightarrow$ MA^4+MB^4 nhỏ nhất khi M trùng với $I(2;-1;0)$.

Bài 23:

Gọi I là giao điểm của d và (P) $\Rightarrow I(2t-3;t-1;t+3)$

Do $I\in(P)\Rightarrow 2t-3+2(t-1)-(t-3)+5=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(-1;0;4)$

d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;1)$, mp(P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;-1)$.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{n}\right]=(-3;3;3)$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ $\Rightarrow\vec{u}=(-1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases}x=1-u\\y=u\\z=4+u\end{cases}$

Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(-1-u;u;4+u)$, $\Rightarrow\overrightarrow{AM}(1-u;u-3;u)$

AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM\perp\Delta$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow-1(1-u)+1(u-3)+1.u=0\Leftrightarrow u=\frac{4}{3}$.

Vậy $M\left(\frac{-7}{3};\frac{4}{3};\frac{16}{3}\right)$ là điểm cần tìm

Bài 24:

$M,N\in(d_1),(d_2)$ nên ta giả sử $M(t_1;t_1;2t_1)$, $N(-1-2t_2;t_2;1+t_2)$

$\Rightarrow\overrightarrow{NM}=(t_1+2t_2+1;t_1-t_2;2t_1-t_2-1)$.

MN song song mp(*P*) nên:

$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{NM}=0\Leftrightarrow 1.(t_1+2t_2+1)-1.(t_1-t_2)+1(2t_1-t_2-1)=0$.

$\Leftrightarrow t_2=-t_1\Rightarrow\overrightarrow{NM}=(-t_1+1;2t_1;3t_1-1)$.

Ta có: $MN=\sqrt{2}\Leftrightarrow(-t_1+1)^2+(2t_1)^2+(3t_1-1)^2=2\Leftrightarrow 7t_1^2-4t_1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=0\\t_1=\frac{4}{7}\end{array}\right.$.

Suy ra: $M(0;0;0)$, $N(-1;0;1)$ hoặc $M\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{8}{7}\right)$, $N\left(\frac{1}{7};-\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$.

Kiểm tra lại thấy trường hợp $M\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{8}{7}\right)$, $N\left(\frac{1}{7};-\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)\in(P)$.

Vậy có cặp $M(0;0;0)$, $N(-1;0;1)$ thoả mãn.

Bài 25:

$M\in(P)\Rightarrow M(x;y;3-x)$

A là trung điểm *MN* $\Rightarrow N(2-x;-2-y;-5+x)$

$N\in(Q)\Rightarrow x-y=2$ (1)

$\overrightarrow{MN}=(2-2x;-2-2y;-8+2x)$

Vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*): $\vec{n}_1=(1;0;1)$, $\vec{n}_2=(0;1;1)$

$\Rightarrow\vec{n}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=(-1;-1;1)$

MN vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (*P*), (*Q*) $\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\vec{n}=0$

$\Rightarrow 2x+y=4$ (2)

Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) ta được $x=2$, $y=0$

$\Rightarrow M(2;0;1)$, $N(0;-2;-3)$

Bài 26:

$M\in(\alpha)\Rightarrow M(-y-2z-2;y;z)$

Gọi *G* là điểm sao cho:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow G(1;1;1)\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2=\text{const}$

$$T=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=3MG^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

$\Rightarrow$ *T* nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *MG* nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *M* là hình chiếu vuông góc của G trên mp(α)

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}=(y+z+3;1-y;1-z)$ cùng phương với vtpt của (α): $\vec{n}=(1;1;2)$

$\Leftrightarrow\frac{y+2z+3}{1}=\frac{1-y}{1}=\frac{1-z}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+2z=-2\\2y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\z=-1\end{cases}$

Vậy: $M(0;0;-1)$ và $T_{mn}=40$

Bài 27:

Ta có:Các đoạn *OB* và *AC* đều nhận *I*(2; 2; 2) làm trung điểm (1)

$\overrightarrow{AC} = (-8; 16; -8), \overrightarrow{OB} = (4; 4; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OB} = -32 + 64 - 32 = 0 \Rightarrow AC \perp OB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra *O*, *A*, *B*, *C* là 4 đỉnh của hình thoi OABC

$\overrightarrow{SI} = (4; 0; -4); \begin{cases} \overrightarrow{SI}.\overrightarrow{AC} = -32 + 32 = 0 \\ \overrightarrow{SI}.\overrightarrow{OB} = 16 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow SI \perp (OABC)$

Do *OABC* là hình thoi và $SI \perp (OABC)$ nên: $\begin{cases} AC \perp OB \\ AC \perp SI \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SOB)$

Từ đó trong mp(*SOB*) nếu kẻ $IH \perp SO$ tại H thì $IH \perp AC$ tại H. Vậy IH là đoạn vuông góc chung của SO và AC

$\Rightarrow d(SO, AC) = IH = \frac{SI.OI}{SO} = \frac{4\sqrt{2}.2\sqrt{3}}{2\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{66}}{11}$

Ghi chú: Có thể dùng công thức: $d(SO, AC) = \frac{|[\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{OI}|}{|[\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AC}]|}$

Bài 28:

Từ giả thiết ta suy ra tọa độ các điểm *A*, *B*, *C* định bởi: A(a ; 0 ; 0), B(0 ; b ; 0), C(0 ; 0 ; c) trong đó a, b, c là các số thực dương ⇒ phương trình mp(*ABC*):

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

M(1;2;3) ∈ mp(*ABC*) nên: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

Thể tích của khối tứ diện OABC được tính bởi: $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}a.b.c$

Theo BĐT CauChy: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} \Rightarrow a.b.c \geq 162 \Rightarrow V \geq 27$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$ hay a = 3;= 6; c = 9

Vậy $V_{max} = 27$ đạt được khi A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;9)

Bài 29:

$C \in (P): 3x - y - z + 1 = 0 \Rightarrow C(x_0; y_0; 3x_0 - y_0 + 1)$

Δ ABC đều

$\Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AB^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + (3x_0 - y_0 + 4)^2 = 8 \\ y_0 = 4x_0 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0; y_0 = 2 \\ x_0 = y_0 = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy C(0;2;–1) hoặc $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Bài 30:

$B \in mpOxy \Rightarrow B(x; y; 0), C \in Oz \Rightarrow C(0; 0; z)$.

$\overrightarrow{AH} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{BH} = (2 - x; 1 - y; 1)$

$\overrightarrow{BC} = (-x; -y; z), \quad \overrightarrow{AC} = (-3; -1; z), \overrightarrow{AB} = (x - 3; y - 1; 0)$

H là trực tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 3x + y + z - 7 = 0 \\ x + yz - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 7 - 2x \\ 2x^2 + x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3; y = 1; z = -3 \\ x = -\frac{7}{2}\ \ y = 14; z = \frac{7}{2} \end{array}\right.$

Vậy chỉ nhận: $B\left(-\frac{7}{2}; 14; 0\right), C\left(0; 0; \frac{7}{2}\right)$

Bài 31:

a . $B(x_0; y_0; 0)$ nên $OB = 8 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 64$ (1)

$\overrightarrow{OB} = (x_0; y_0; 0)$, $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0)$

$\cos \widehat{AOB} = \left|\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\right| = \frac{|4x_0|}{4.8} = \frac{x_0}{8}$ (vì $x_0 > 0$)

$\Leftrightarrow \cos 60^0 = \frac{x_0}{8} \Leftrightarrow x_0 = 4$ thay vào (1) ta được $y_0 = 4\sqrt{3}$ hay $y_0 = -4\sqrt{3}$ (loại)

Vậy $B(4; 4\sqrt{3}; 0) \Rightarrow$ tam giác AOB vuông tại A .
C thuộc tia Oz nên C(0 ;0 ;a) , a > 0 và OC = a

Thể tích của tứ diện OABC là : $V = \frac{1}{6}OC.OA.AB = \frac{1}{6}a.4.4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}a}{3}$

$V = 8 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{3}a}{3} = 8 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.

Vậy $C(0; 0; \sqrt{3})$

b. G là trọng tâm tam giác OAB nên $G(\frac{8}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-4; 0; \sqrt{3})$, đt AC có phương trình: $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 0 \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}$

M thuộc đt AC nên $M(4-4t; 0; \sqrt{3}t)$

$\overrightarrow{OM} = (4-4t; 0; \sqrt{3}t)$, $\overrightarrow{GM} = \left(\frac{4}{3} - 4t; \frac{-4\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}t\right)$

$OM \perp GM \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{GM} = 0 \Leftrightarrow (4-4t)(\frac{4}{3} - 4t) + 3t^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 57t^2-64t+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{32+4\sqrt{7}}{57} \\ t=\dfrac{32-4\sqrt{7}}{57} \end{array}\right.$$

$\overline{AM}=(-4t\,;0\,;\sqrt{3}\,t)$, $AM=x \Leftrightarrow x=|t|\sqrt{19}$

Với $t=\dfrac{32+4\sqrt{7}}{57}$, $x=\dfrac{32+4\sqrt{7}}{57}.\sqrt{19}$

Với $t=\dfrac{32-4\sqrt{7}}{57}$, $x=\dfrac{32-4\sqrt{7}}{57}.\sqrt{19}$

Bài 32:

Ta có $C\in(P)\Rightarrow C(a+b-2;a;b)$.

Ta có $\overline{AB}=(1;2;-2),\overline{BC}=(a+b-4;a-3;b+1)$.

Theo đề bài

$\widehat{ABC}=90^0 \Leftrightarrow \overline{AB}.\overline{BC}=0$

$\Leftrightarrow 1.(a+b-4)+2(a-3)-2(b+1)=0 \Leftrightarrow 3a-b-12=0 \Rightarrow b=3a-12$

$\Rightarrow \overline{BC}=(4a-16;a-3;3a-11)$.

Theo đề bài ta có $\widehat{BAC}=\alpha \Rightarrow BC=AB.\tan\alpha=3.2=6$.

Từ đó ta được

$$(4a-16)^2+(a-3)^2+(3a-11)^2=36 \Leftrightarrow 26a^2-200a+350=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=\dfrac{35}{13} \end{array}\right.$$

Vậy $C(6;5;3)$ hoặc $C\left(-\dfrac{42}{13};\dfrac{35}{13};\dfrac{-51}{13}\right)$

Bài 33:

Gọi M(a;b;c) khi đó . $M\in(Q)\Leftrightarrow a+b+c=0$ (1)

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi

$AM^2=BM^2 \Leftrightarrow (a-4)^2+(b+3)^2+(c-1)^2=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$

$\Leftrightarrow -a+2b+5=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+2b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b+5 \\ c=-5-3b \end{cases}$ (*)

Trung điểm AB là $I(3;-1;1)$,

Tam giác ABM cân tại M , suy ra $MI=\dfrac{AB}{2} \Leftrightarrow (a-3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2=5$ (3)

Thay (*) vào (3) ta được

$(2b+2)^2+(b+1)^2+(-6-3b)^2=5 \Leftrightarrow 7b^2+23b+18=0 \Leftrightarrow b=-2$ hoặc $b=-\dfrac{9}{7}$

Với $b=-2 \Rightarrow a=1, c=1 \Rightarrow M(1;-2;1)$.

Với $b=-\dfrac{9}{7}\Rightarrow a=\dfrac{17}{7};c=-\dfrac{8}{7}\Rightarrow M\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{9}{7};-\dfrac{8}{7}\right)$

Vậy điểm M cần tìm là $M(1;-2;1)$ và $M\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{9}{7};-\dfrac{8}{7}\right)$

Bài 34:

Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$ (trong đó $d=d(\Delta;Ox)$; α là góc Δ và Ox)

Tính $d=4$; $\sin\alpha=1$

Suy ra $V_{ABCD}=4$

Bài 35:

Vì M ở trên Ox nên toạ độ có dạng M(t;0;0)

Khi đó, $\overline{AM}=(t-1;-2;1),\overline{AB}=(-3;-1;4)\Rightarrow\left[\overline{AM};\overline{AB}\right]=(-7;-4t+1;-t-5)$

$S_{ABM}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overline{AM};\overline{AB}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{17t^2+2t+75}$

Hàm số $f(t)=\sqrt{17t^2+2t+75}$ đạt GTNN tại $t=\dfrac{-1}{17}$.

Vậy $M\left(\dfrac{-1}{17};0;0\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 36:

Điểm $M\in(Oxy)\Rightarrow M(a;b;0)$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} AM=BM \\ \dfrac{1}{2}\left|\left[\overline{AM},\overline{BM}\right]\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+b^2=(a+1)^2+(b-1)^2 \\ \sqrt{5+(1-a-2b)^2}=\sqrt{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b+1=0 \\ |1-a-2b|=4 \end{cases}$$

Giải hệ được: $a=-\dfrac{4}{5};b=-\dfrac{11}{10}$ hoặc $a=\dfrac{4}{5};b=\dfrac{21}{10}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$M\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{11}{10};0\right) \text{ hoặc } M\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{21}{10};0\right)$$

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ 9: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

§ 1: QUAN HỆ VUÔNG GÓC 3
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 3
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 5
Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng 5
Dạng 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc 8
Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc 9
§ 2: BÀI TOÁN TÌM KHOẢNG CÁCH 13
Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 13
Dạng 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 17
§ 3: BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH GÓC - GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VÀ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU 20
BÀI TẬP VẬN DỤNG 26
HƯỚNG DẪN GIẢI 28
§ 4: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN 34
Dạng 1: Tính thể tích bằng cách áp dụng trực tiếp công thức tính thể tích 34
Dạng 2: Sử dụng phép phân chia khối đa diện để tính diện tích và thể tích 55
Dạng 3: Dựa vào tỉ số thể tích để tính thể tích 61
Dạng 4: Thể tích liên quan tới max – min 67
Dạng 5: Ứng dụng thể tích để tính khoảng cách 75
BÀI TẬP VẬN DỤNG 77
HƯỚNG DẪN GIẢI 78
§ 5: XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN 84
A. LÝ THUYẾT 84
B. THÍ DỤ MINH HỌA 85
BÀI TẬP VẬN DỤNG 94
HƯỚNG DẪN GIẢI 95
BÀI TẬP TỔNG HỢP CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN 100
HƯỚNG DẪN GIẢI 109
§ 6: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN ĐỂ GIẢI HHKG 167
I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN 167
II. BÀI TẬP VẬN DỤNG 169
Dạng 1: Với hình lập phương hoặc hình hộp chữ nhật 169
Dạng 2: Với hình chóp đều 175
Dạng 3. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy 181
Dạng 4: Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy 191
Dạng 5: Bài toán với hình lăng trụ 197
Dạng 6: Bài toán hình không mẫu mực 207
BÀI TẬP TỔNG HỢP 209

CHUYÊN ĐỀ 10: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

PHẦN 1: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

§ 1: ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG 218
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 218
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 220
Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng 220
Dạng 2: Bài toán viết phương trình đường thẳng và tìm điểm liên quan tới tam giác 230
Dạng 3: Bài toán liên quan tới các hình 236
Dạng 4: Bài toán tìm điểm thuộc đường thẳng thỏa mãn điều kiện cho trước 243
BÀI TẬP VẬN DỤNG 249
HƯỚNG DẪN GIẢI 258
§ 2: ĐƯỜNG TRÒN 296
A. KIẾN THỨC VỀ ĐƯỜNG TRÒN 296
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 299
Dạng 1: Bài toán về viết phương trình đường tròn 299
Dạng 2: Bài toán liên quan tới điểm và đường tròn 308
Dạng 3: Bài toán về đường thẳng và đường tròn 312
BÀI TẬP VẬN DỤNG 316
HƯỚNG DẪN GIẢI 323
§ 3: BA ĐƯỜNG CONIC 357
A. KIẾN THỨC VỀ ĐƯỜNG TRÒN 357
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 358
Dạng 1: Lập phương trình các đường conic 358
Dạng 2: Các bài toán về sự tương giao của ba đường conic với các đường khác 362
Dạng 3: Các bài toán định tính về đường conic 365
Dạng 4: Bài toán tìm điểm và bài toán cực trị liên quan tới 3 đường conic 371
BÀI TẬP VẬN DỤNG 380
HƯỚNG DẪN GIẢI 383

PHẦN 2: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

§ 1: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 395
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 395
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 397
Dạng 1: Sử dụng phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết một vtpt 397
Dạng 2: Sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn để viết phương trình mặt phẳng 400
Dạng 3: Ứng dụng phương trình đặc biệt của mặt phẳng để viết phương trình mặt phẳng 408
Dạng 4: Sử dụng phương trình tổng quát của mặt phẳng để viết phương trình mặt phẳng 414
Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng liên quan tới cực trị 427
BÀI TẬP VẬN DỤNG 431
HƯỚNG DẪN GIẢI 434
§ 2: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN 446
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 446
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 452
Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng 452
Dạng 2: Viết phương trình tham số (chính tắc) bằng cách tìm vtcp dựa vào các dự kiện ban đầu 465
Dạng 3: Viết phương trình đường thẳng có liên quan tới min và max 468
BÀI TẬP VẬN DỤNG 471
HƯỚNG DẪN GIẢI 475
§ 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU 485
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 485
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP 486
Dạng 1: Viết phương trình mặt cầu 486
Dạng 2: Tìm điểm liên quan tới mặt cầu 496
BÀI TẬP VẬN DỤNG 500
HƯỚNG DẪN GIẢI 503
§ 4: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG HOẶC MẶT PHẲNG VÀ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC 512
Dạng 1: Tìm điểm thuộc đường thẳng 512
Dạng 2: Tìm điểm thuộc mặt phẳng 518
BÀI TẬP VẬN DỤNG 524
HƯỚNG DẪN GIẢI 528

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : LAN HƯƠNG – NGỌC THẮNG
Chế bản : CÔNG TY KHANG VIỆT
Trình bày bìa : CÔNG TY KHANG VIỆT

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT
CẨM NANG LUYỆN THI ĐẠI HỌC: HÌNH HỌC – QUYỂN 3
Mã số: 1L–299ĐH2013
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm
Tại: Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 616 – 2013/CXB/05 – 91/ĐHQGHN ngày 14/05/2013.
Quyết định xuất bản số: 290LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 03/07/2013
In xong và nộp lưu chiểu Quý IV năm 2013